Глава 12
БОЗОНИЗАЦИЯ И ЛАТТИНЖЕРОВСКАЯ ЖИДКОСТЬ

Взаимодействующие фермионы на прямой представляют собой особую интересную систему. Оказывается, даже слабое взаимодействие полностью меняет характер одномерной ферми-системы, приводит к перестройке спектра возбуждений и делает теорию ферми-жидкости неприменимой (см. задачу 82, в которой отсутствие ферми-жидкости при $D = 1$ проиллюстрировано с помощью теории возмущений). Одномерные фермионы могут быть успешно описаны в рамках модели Томонаги–Латтинжера и ее обобщений, и по этой причине часто используется название *латтинжеровская жидкость*.

Метод бозонизации, с помощью которого строится теория латтинжеровской жидкости, является своеобразным квантовомеханическим аналогом гидродинамики. Элементарные возбуждения системы вводятся с помощью фурье-компонент операторов плотности и коммутационных соотношений между ними. Соответствующие квазичастицы подчиняются статистике Бозе. Исходные же фермионные операторы в таком представлении выражаются через бозонные операторы весьма нетривиально. Операторные соотношения между фермионными и бозонными полями напоминают соотношения Йордана–Вигнера для фермионного представления спиновых операторов, рассмотренного в разд. 1.4.

Вообще говоря, представление возбуждений ферми-системы с помощью эквивалентных бозонов имеет место для произвольной размерности системы. Так, в гл. 8 мы продемонстрировали, что теорию ферми-жидкости можно «проквантовать», используя бозе-операторы электрон-дырочных пар (см. разд. 8.3 и задачи 44, 45, 49). Однако только в одномерном случае метод бозонизации приводит к результатам, которые невозможно или же трудно получить более стандартными методами.

Помимо задачи о взаимодействующих фермионах на прямой, метод бозонизации находит применение также при изучении динамики невзаимодействующих фермионов в произвольной размерности. В частности, этот метод оказывается весьма удобным при описании встряски ферми-системы под действием возмущения, зависящего от времени. Примерами такого рода являются «катастрофа ортогональности» и задача о крае рентгеновского спектра поглощения в металле (см. задачи 78 и 79).

12.1. Гидродинамика одномерного ферми-газа

Гидродинамическое описание применимо, если характерные пространственный и временной масштабы велики по сравнению с микроскопическими длинами и временами. Соответствующие условия для ферми-газа записываются в виде: $k \ll p_0$, $\omega \ll E_F$.

Некоторые факты гидродинамики одномерного ферми-газа нам уже известны из задачи 24, в которой мы нашли флуктуации числа частиц одномерного ферми-газа внутри фиксированного интервала большой длины $L \gg p_0^{-1}$,

$$\langle\langle N_L^2 \rangle\rangle = \langle N_L^2 \rangle - \langle N_L \rangle^2 = \frac{1}{\pi^2} \ln (p_0 L), \tag{12.1}$$

а также из задачи 25, в которой был найден коррелятор плотность–плотность

$$Q(\omega, k) = \nu \frac{v^2 k^2}{\omega^2 - v^2 k^2 + i\delta \operatorname{sgn} \omega}, \quad k \ll p_0, \ \omega \ll E_F, \tag{12.2}$$

где ν — плотность состояний на уровне Ферми.

Интересно сопоставить эти результаты со свойствами одномерной упругой среды. Гриновская функция фононов в одномерной модели Дебая есть $D(x - x', t - t') = -i\rho c^2 \langle \mathrm{T}\, \partial_x \widehat{u}(x,t) \partial_x \widehat{u}(x',t') \rangle$, где $\widehat{u}(x,t)$ — оператор смещения среды [1]. В одномерном случае оператор $\widehat{u}(x,t)$ имеет вид

$$\widehat{u}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_k \frac{\operatorname{sgn} k}{(2\rho c|k|)^{1/2}} \left(b_k e^{ikx - ic|k|t} + b_k^+ e^{-ikx + ic|k|t} \right), \tag{12.3}$$

где L — длина системы, а b_k и b_k^+ — канонические бозе-операторы фононов [2] (ср. с трехмерным выражением (6.1)). В фурье-представлении:

$$D(\omega, k) = \frac{c^2 k^2}{\omega^2 - c^2 k^2 + i\delta \operatorname{sgn} \omega}. \tag{12.4}$$

Обратим внимание на то, что это выражение совпадает с коррелятором плотности (12.2), с точностью до множителя ν и замены $v \to c$. Можно сделать еще одно наблюдение, сравнив флуктуации числа частиц (12.1) в интервале большой длины с коррелятором смещений (12.3). Пользуясь теоремой Вика, усредняем:

$$\langle\, \widehat{u}(x,t) \widehat{u}(x',t') \rangle_{t'=t} = \int \frac{e^{ik(x'-x)}}{2\rho c|k|} \frac{dk}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\rho c} \ln \frac{L}{|x - x'|}. \tag{12.5}$$

[1] Обычно гриновская функция фононов вводится несколько иначе, через операторы $\widehat{\varphi}(x,t)$ (см. [1], (7.9)–(7.16)). Однако в модели Дебая ∇u и φ отличаются множителем: $\varphi(r,t) = c\sqrt{\rho}\, \nabla u(r,t)$.

[2] Предполагается, что $\sum_k \ldots = \int \ldots \frac{dk}{2\pi}$ и $[b_k, b_{k'}^+] = 2\pi L \delta(k - k')$, где L — размер системы. Данные соглашения используются всюду в этой главе.

Отсюда нетрудно получить, что

$$\langle\, (\widehat{u}(x,t) - \widehat{u}(x',t))^2 \,\rangle = \frac{1}{\pi\rho c} \ln \frac{|x - x'|}{a}, \tag{12.6}$$

где a — период решетки (см. также задачу 54, где коррелятор смещений (12.5) найден при произвольной температуре).

Совпадение корреляторов (12.6) и (12.1) подсказывает, что должно существовать преобразование, переводящее одну задачу в другую. Сравнивая коэффициенты перед логарифмами, определяем правило соответствия:

$$\partial_x \widehat{u}(x,t) \rightleftarrows (\pi/\rho c)^{1/2}\, \widehat{n}(x,t) = (\pi/\rho c)^{1/2} \widehat{\psi}^+(x,t) \psi(x,t). \tag{12.7}$$

Нетрудно видеть, что если бы нашлось преобразование, обеспечивающее такую связь, то при этом коррелятор плотность–плотность (12.2) в точности перешел бы в гриновскую функцию фононов.

Преобразование фермионной задачи в эквивалентную задачу динамики одномерной упругой среды называется *бозонизацией*. Оно имеет много общего с преобразованием Йордана–Вигнера, связывающим спиновые и фермиевские операторы в одномерной цепочке (см. разд. 1.4). Причина сходства заключается в том, что спиновые операторы на разных узлах коммутируют, а значит — удовлетворяют таким же бозонным коммутационным соотношениям, как и операторы фононов. Эту аналогию можно развить, построив из спиновых операторов, взятых на узлах, операторы спиновых волн в импульсном представлении: и фононы, и спиновые волны представляют собой квазичастицы, подчиняющиеся бозе-статистике. Однако, в отличие от точного преобразования Йордана–Вигнера, преобразование бозонизации — приближенное. Точность его ограничена пределом длинных волн. Иначе говоря, оно законно только если речь идет об эффектах в ферми-системе, связанных с электронами или дырками вблизи уровня Ферми.

12.2. Коммутаторы операторов плотности

Преобразование бозонизации нетрудно построить явно. Начнем с того [3], что разобьем фурье-компоненту оператора плотности бесспиновых фермионов на два слагаемых:

$$\widehat{\rho}(k) = \sum_p a_{p-k/2}^+ a_{p+k/2} = \widehat{\rho}_1(k) + \widehat{\rho}_2(k), \tag{12.8}$$

где

$$\widehat{\rho}_1(k) = \frac{1}{L} \sum_{p>0} a_{p-k/2}^+ a_{p+k/2}, \quad \widehat{\rho}_2(k) = \frac{1}{L} \sum_{p<0} a_{p-k/2}^+ a_{p+k/2}. \tag{12.9}$$

Как уже было отмечено, всегда подразумевается, что существенными окажутся только состояния вблизи уровня Ферми, поэтому k мало,

[3] Мы следуем работе: *S. Tomonaga*// Progr. Theor. Phys. 1950. V. 5. P. 544.

а p близко либо к p_0, либо к $-p_0$. Такого рода соображения и служат основой для выбора представления (12.8) оператора $\widehat{\rho}(k)$ в виде суммы «правого» и «левого» операторов плотности (12.9), а также всех нижеследующих манипуляций с $\widehat{\rho}_{1,2}(k)$.

Рассмотрим коммутационные соотношения для введенных операторов. Фурье-компоненты полной плотности $\widehat{\rho}(k)$ просто коммутируют:

$$[\widehat{\rho}(k), \widehat{\rho}(k')] = 0. \tag{12.10}$$

А вот коммутаторы $\widehat{\rho}_1(k)$ и $\widehat{\rho}_2(k)$ нетривиальны. Для примера найдем

$$\begin{aligned}[\widehat{\rho}_1(k), \widehat{\rho}_1(k')] = \frac{1}{L}\sum_{p>0}\Bigg[a^+_{p-k/2}a_{p+k'+k/2}\theta\left(p+\frac{k}{2}+\frac{k'}{2}\right) - \\ - a^+_{p-k'-k/2}a_{p+k/2}\theta\left(p-\frac{k}{2}-\frac{k'}{2}\right)\Bigg] = \\ = \frac{1}{L}\sum_p a^+_{p-q}a_{p+q}\left(\theta\left(p+\frac{k}{2}\right)-\theta\left(p-\frac{k}{2}\right)\right),\end{aligned} \tag{12.11}$$

где $q = \frac{1}{2}(k+k')$. Заметим, что разность θ-функций ограничивает область изменения p следующим образом: $|p| < k/2$. В то же время, при интересующих нас малых $|k| \ll p_0$ практически все состояния, дающие вклад в сумму (12.11), находятся глубоко под уровнем Ферми. Поэтому естественный шаг — заменить в (12.11) произведения операторов $a^+_{p_1}a_{p_2}$ на их средние значения $\langle a^+_{p_1}a_{p_2}\rangle = 2\pi L n(p_1)\delta(p_1-p_2)$, где $n(p_1)$ — фермиевское распределение. Сделав такую замену, получаем

$$[\widehat{\rho}_1(k), \widehat{\rho}_1(-k')] = \delta_{kk'}\begin{cases} k & \text{при } |k| < 2p_0, \\ 2p_0\,\mathrm{sgn}\,k & \text{при } |k| > 2p_0. \end{cases} \tag{12.12}$$

Аналогично вычисляем остальные коммутаторы. Как уже отмечалось, нас интересуют малые $k, k' \ll p_0$. При этом условии находим

$$[\widehat{\rho}_1(k), \widehat{\rho}_1(-k')] = k\,\delta_{kk'}, \quad [\widehat{\rho}_2(k), \widehat{\rho}_2(-k')] = -k\,\delta_{kk'}, \tag{12.13}$$

$$[\widehat{\rho}_1(k), \widehat{\rho}_2(-k')] = 0. \tag{12.14}$$

Из вывода ясно, что эти выражения есть результат приближения, пренебрегающего изменением состояний частиц глубоко под уровнем Ферми.

Отметим, что в координатном представлении коммутационные соотношения (12.13), (12.14) принимают вид

$$[\widehat{\rho}_j(x), \widehat{\rho}_l(x')] = \pm\frac{1}{2\pi i}\delta_{jl}\delta'(x-x'), \quad (\delta'(x) \equiv \partial_x\delta(x)), \tag{12.15}$$

где положительный знак соответствует правым частицам, а отрицательный — левым. Соотношение такого вида называют *аномальным коммутатором Швингера*.

Замена операторов в правой части коммутационных соотношений на скаляры, позволяющая перейти от (12.11) к (12.13), (12.14), является центральным пунктом теории Томонаги. Хотя на первый взгляд такого рода приближение может показаться малообоснованным, тем не менее было выяснено, что приближение Томонаги в точности соответствует переходу от микроскопического описания к гидродинамическому, и поэтому на масштабах, много больших среднего расстояния между электронами, оно всегда является точным[4]).

Оказывается удобным выразить операторы плотности правых и левых частиц $\widehat{\rho}_{1,2}(k)$ через бозевские операторы. Наиболее естественно выбрать b_k и b^+_k с $k>0$ для правых частиц, и с $k<0$ для левых частиц:

$$\begin{aligned}\widehat{\rho}_1(x) &= \sum_{k>0}\frac{1}{\lambda_k L}\left(b_k e^{ikx} + b^+_k e^{-ikx}\right), \\ \widehat{\rho}_2(x) &= \sum_{k<0}\frac{1}{\lambda_k L}\left(b_k e^{ikx} + b^+_k e^{-ikx}\right),\end{aligned} \tag{12.16}$$

где $\lambda_k = (2\pi/|k|L)^{1/2}$. Определение (12.16) согласовано с коммутационными соотношениями (12.13), (12.14). Используя (12.13) и (12.14) нетрудно получить канонические коммутационные соотношениям между операторами b_k и $b^+_{k'}$, причем нормировка в (12.16) такова, что $[b_k, b^+_{k'}] = 2\pi L\delta_{kk'}$.

12.3. Модель Томонаги

Мы введем преобразование бозонизации на примере задачи, для решения которой, собственно говоря, это преобразование и было впервые предложено. Рассмотрим одномерную систему взаимодействующих бесспиновых фермионов:

$$\widehat{\mathscr{H}} = \frac{1}{L}\sum_p \xi(p)a^+_p a_p + \frac{1}{2L^2}\sum_{p_1+p_3=p_2+p_4} V_{p_1-p_2}a^+_{p_1}a_{p_2}a^+_{p_3}a_{p_4}, \tag{12.17}$$

где $\xi(p) = (p^2-p_0^2)/2m$. Здесь $V_k = \int V(r)e^{-ikr}\,dr$ — формфактор потенциала взаимодействия. Рассмотрим случай, когда радиус взаимодействия r_0 много больше p_0^{-1}. При этом формфактор V_k как функция k быстро спадает при $k \approx r_0^{-1} \ll p_0$. Как всегда, нас интересуют только состояния вблизи уровня Ферми, т. е. при $p_i \approx \pm p_0$.

Легко видеть, что при этих условиях все взаимодействия сводятся к двум существенно различным процессам рассеяния, при которых две частицы, рассеивающиеся друг на друге, движутся в одну сторону или навстречу друг другу. Поэтому достаточно рассмотреть такие комбинации импульсов:

1) $p_1 \approx p_0$, $p_2 \approx p_0$, $p_3 \approx p_0$, $p_4 \approx p_0$;

[4]) Подробное обсуждение этих вопросов можно найти в работе: *F. D. M. Haldane*// J. Phys. C. 1981. V. 14. P. 2585.

2) $p_1 \approx p_0$, $p_2 \approx p_0$, $p_3 \approx -p_0$, $p_4 \approx -p_0$
(и, конечно, отличающиеся знаком всех импульсов и/или перестановкой частиц). Введем обозначения:

$$g_1(k) \equiv V_k, \quad g_2(k) \equiv V_{2p_0+k}, \tag{12.18}$$

причем будем считать, что $k \ll p_0$. Амплитуда $g_1(k)$ описывает процесс рассеяния частиц, находящихся с одной и той же стороны поверхности Ферми (рассеяние вперед), а $g_2(k)$ — переброс двух частиц с одной стороны поверхности Ферми на другую навстречу друг другу (рассеяние назад).

Запишем гамильтониан, явно выделяя малые импульсы k_1, k_2, q:

$$\widehat{\mathscr{H}} = \widehat{\mathscr{H}}_0 + \widehat{\mathscr{H}}_1 + \widehat{\mathscr{H}}_2, \tag{12.19}$$

где

$$\widehat{\mathscr{H}}_0 = \frac{1}{L} \sum_{k \ll p_0} \xi(p_0 + k) \left(a^+_{p_0+k}\, a_{p_0+k} + a^+_{-p_0-k}\, a_{-p_0-k} \right),$$

$$\widehat{\mathscr{H}}_1 = \frac{1}{2L^2} \sum_{k_1,\, k_2,\, q} g_1(q) \Big[a^+_{p_0+k_1+q/2}\, a_{p_0+k_1-q/2}\, a^+_{p_0+k_2-q/2}\, a_{p_0+k_2+q/2} + (p_0 \to -p_0) \Big],$$

$$\widehat{\mathscr{H}}_2 = \frac{1}{L^2} \sum_{k_1,\, k_2,\, q} g_2(q)\, a^+_{p_0+k_1+q/2}\, a_{p_0+k_1-q/2}\, a^+_{-p_0+k_2-q/2}\, a_{-p_0+k_2+q/2}.$$

Постараемся теперь выразить гамильтониан через операторы $\widehat{\rho}_{1,2}(k)$. Для этого заметим, что суммирование по k_1 и k_2 в $\widehat{\mathscr{H}}_1$ и $\widehat{\mathscr{H}}_2$ сводится к суммированию по p в (12.9). С учетом этого обстоятельства $\widehat{\mathscr{H}}_1$ и $\widehat{\mathscr{H}}_2$ можно переписать так:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathscr{H}}_1 &= \frac{1}{2} \sum_q g_1(q) \left(\widehat{\rho}_1(q)\, \widehat{\rho}_1(-q) + \widehat{\rho}_2(q)\, \widehat{\rho}_2(-q) \right), \\ \widehat{\mathscr{H}}_2 &= \sum_q g_2(q)\, \widehat{\rho}_1(q)\, \widehat{\rho}_2(-q). \end{aligned} \tag{12.20}$$

В отличие от взаимодействия $\widehat{\mathscr{H}}_1 + \widehat{\mathscr{H}}_2$, гамильтониан $\widehat{\mathscr{H}}_0$ невзаимодействующих частиц не удается столь же просто выразить через $\widehat{\rho}_{1,2}(k)$, поскольку в нем присутствует множитель $\xi(p_0 + k)$. Тем не менее, оказывается, что если заменить квадратичный спектр фермионов $\xi(p) = (p^2 - p_0^2)/2m$ на линейный $\xi(p) = v(|p| - p_0)$, то и гамильтониан $\widehat{\mathscr{H}}_0$ можно представить в виде оператора квадратичного по $\widehat{\rho}_{1,2}(k)$. Модель одномерного ферми-газа, получающаяся таким образом, называется моделью Томонаги–Латтинжера.

Чтобы угадать, как $\widehat{\mathscr{H}}_0$ выражается через $\widehat{\rho}_1(k)$ и $\widehat{\rho}_2(k)$, применим небольшую хитрость. Предположим, что ответ записывается в виде

$$\widehat{\mathscr{H}}_0 = \sum_k \alpha_k \left[\widehat{\rho}_1(k)\, \widehat{\rho}_1(-k) + \widehat{\rho}_2(k)\, \widehat{\rho}_2(-k) \right] \tag{12.21}$$

и найдем коммутатор $\left[\widehat{\rho}_1(k),\, \widehat{\mathscr{H}}_0 \right]$. С одной стороны, согласно (12.13),

$$\left[\widehat{\rho}_1(k),\, \widehat{\mathscr{H}}_0 \right] = \sum_{k'} \alpha_{k'} \left[\widehat{\rho}_1(k),\, \widehat{\rho}_1(k')\, \widehat{\rho}_1(-k') \right] = \frac{k}{\pi} \alpha_k \widehat{\rho}_1(k). \tag{12.22}$$

С другой стороны, найдем этот же коммутатор прямым вычислением («по-честному»):

$$\begin{aligned} \left[\widehat{\rho}_1(k),\, \widehat{\mathscr{H}}_0 \right] &= \frac{1}{L^2} \sum_{p>0} \sum_{p'} v\,(p' - p_0) \left[a^+_{p-k/2}\, a_{p+k/2},\, a^+_{p'}\, a_{p'} \right] = \\ &= \frac{1}{L^2} \sum_{p>0} \sum_{p'} v(p' - p_0) \left\{ a^+_{p-k/2} \left[a_{p+k/2},\, a^+_{p'}\, a_{p'} \right] + \left[a^+_{p-k/2},\, a^+_{p'}\, a_{p'} \right] \times \right. \\ &\qquad \left. \times\, a_{p+k/2} \right\} = \frac{2\pi}{L} \sum_{p>0} \sum_{p'} v\,(p' - p_0) \left(a^+_{p-k/2}\, a_{p'}\, \delta_{p+k/2-p'} - \right. \\ &\left. - a^+_{p'}\, a_{p+k/2}\, \delta_{p-k/2-p'} \right) = \frac{vk}{L} \textstyle\sum_{p>0} a^+_{p-k/2}\, a_{p+k/2} = vk\widehat{\rho}_1(k). \end{aligned} \tag{12.23}$$

Сравнивая (12.22) и (12.23), находим, что $\alpha_k = \pi v$. Таким образом получаем

$$\widehat{\mathscr{H}}_0 = \pi v \sum_k \left[\widehat{\rho}_1(k)\, \widehat{\rho}_1(-k) + \widehat{\rho}_2(k)\, \widehat{\rho}_2(-k) \right]. \tag{12.24}$$

Итак, длинноволновая динамика ферми-газа допускает описание в терминах волн плотности в газе фермионов. Отметим, что вместо величин $\widehat{\rho}_1(k)$ и $\widehat{\rho}_2(k)$ иногда бывает удобнее пользоваться их комбинациями $\widehat{\rho}(k) = \widehat{\rho}_1(k) + \widehat{\rho}_2(k)$ и $\widehat{j}(k) = \widehat{\rho}_1(k) - \widehat{\rho}_2(k)$, которые есть просто плотность и ток частиц.

Теперь можно заняться задачей о спектре возбуждений одномерного ферми-газа с взаимодействием. Все члены в преобразованном гамильтониане оказываются квадратичными по $\widehat{\rho}_{1,2}(k)$. Выражая $\widehat{\rho}_1(k)$ и $\widehat{\rho}_2(k)$ через операторы b_k^+, b_k по формулам (12.16), находим

$$\widehat{\mathscr{H}} = \frac{1}{2\pi L} \sum_{k>0} \left[\Big(2\pi kv + kg_1(k) \Big) \Big(b_k^+ b_k + b_{-k}^+ b_{-k} \Big) + kg_2(k) \Big(b_k^+ b_{-k}^+ + b_k b_{-k} \Big) \right]. \tag{12.25}$$

Переходим к квазичастицам, выполняя преобразование Боголюбова,

$$\begin{aligned} \widetilde{b}_k &= \operatorname{ch} \theta_k\; b_k + \operatorname{sh} \theta_k\; b_{-k}^+, \\ \widetilde{b}_{-k}^+ &= \operatorname{ch} \theta_k\; b_{-k}^+ + \operatorname{sh} \theta_k\; b_k, \end{aligned} \tag{12.26}$$

и подбирая параметр преобразования θ_k так, чтобы гамильтониан стал диагональным:

$$\operatorname{th} 2\theta_k = \frac{g_2(k)}{g_1(k) + 2\pi v}. \tag{12.27}$$

Получаем гамильтониан и спектр возбуждений квазичастиц:

$$\widehat{\mathscr{H}} = \frac{1}{L}\sum_k \omega(k)\,\widetilde{b}_k^+\widetilde{b}_k, \quad \omega(k) = \frac{|k|}{2\pi}\left(\left(2\pi v + g_1(k)\right)^2 - g_2^2(k)\right)^{1/2}. \tag{12.28}$$

Полученное решение показывает, что квазичастицами в модели Томонаги–Латтинжера являются не фермионы, а бозоны со спектром (12.28). Перестройка спектра элементарных возбуждений происходит из-за того, что взаимодействие вблизи ферми-поверхности сильное, и поэтому время жизни фермионов оказывается слишком малым. Это означает, что в одном измерении теория ферми-жидкости неприменима.

Модель Томонаги–Латтинжера нетрудно обобщить на частицы со спином, что приводит к бозонизованной задаче, в которой имеются операторы как плотности заряда, так и плотности спина, причем гамильтониан остается квадратичным. К сожалению, детальное изложение всех связанных с этим вопросов увело бы нас слишком далеко. Поэтому ограничимся ссылкой на книгу [7], гл. 4, а также на оригинальные работы [5)].

12.4. От бозонов к фермионам

Важную роль в теории латтинжеровской жидкости играет обратное преобразование бозонизации, позволяющее выразить фермионные операторы через бозонные (!) и получить выражение для функции Грина взаимодействующей ферми-системы.

Представление фермионных операторов можно найти, рассматривая коммутационные соотношения. Поскольку гамильтониан записывается только через операторы плотности (12.16), достаточно построить из них такие операторы $\widehat{\psi}_j(x), \widehat{\psi}_j^+(x)$, чтобы выполнялись стандартные соотношения

$$\begin{gathered}[\widehat{\psi}_j(x), \widehat{\psi}_l(x')]_+ = [\widehat{\psi}_j^+(x), \widehat{\psi}_l^+(x')]_+ = 0,\\ [\widehat{\psi}_j^+(x), \widehat{\psi}_l(x')]_+ = \delta_{jl}\,\delta(x-x')\end{gathered} \tag{12.29}$$

$(j, l = 1, 2)$. Оказывается, соотношения (12.29) можно получить, выбрав представление фермионных операторов следующим образом:

$$\widehat{\psi}_j(x) = A_j e^{i\widehat{\varphi}_j(x)}, \quad \widehat{\psi}_j^+(x) = A_j^* e^{-i\widehat{\varphi}_j(x)}, \tag{12.30}$$

$$\widehat{\varphi}_j(x) = 2\pi\int_{-\infty}^{x}\widehat{\rho}_j(x')\,dx', \tag{12.31}$$

где константы A_j, зависящие от ультрафиолетовой обрезки интеграла (12.31), будут определены позже. Выражения (12.30) по форме напоминают струну, возникающую в преобразовании Йордана–Вигнера (см. разд. 1.4). Хотя на первый взгляд выражения (12.30), (12.31) выглядят несколько таинственно, можно убедиться прямым вычислением, что они приводят к антикоммутирующим фермиевским операторам.

[5)] *A. Luther, V. J. Emery*// Phys. Rev. Lett. 1974. V. 33. P. 589; *A. Luther, I. Peschel*// Phys. Rev. B. 1974. V. 9. P. 2911.

Проверим коммутационные соотношения (12.29) между $\widehat{\psi}_{1,2}^+(x)$ и $\widehat{\psi}_{1,2}(x')$. Воспользуемся для этого известным тождеством Бейкера–Хаусдорфа,

$$e^U e^V = e^{U+V+[U,V]/2}, \tag{12.32}$$

верным, если $[U, V]$ коммутирует как с U, так и с V. План вычисления заключается в том, чтобы с помощью (12.32) преобразовать произведения $\widehat{\psi}_j^+(x)\widehat{\psi}_l(x')$ и $\widehat{\psi}_j(x)\widehat{\psi}_l^+(x')$ к такому виду, в котором сингулярность при $x' = x$ выделена явным образом.

Запишем операторы фазы, стоящие в показателе экспонент (12.30), через бозонные операторы:

$$\widehat{\varphi}_1(x) = 2\pi\int_{-\infty}^{x}\widehat{\rho}_1(x')\,dx' = i\sum_{k>0}\lambda_k\left[b_k^+ e^{-ikx} - b_k e^{ikx}\right]e^{-a|k|/2}, \tag{12.33}$$

$$\widehat{\varphi}_2(x) = 2\pi\int_{-\infty}^{x}\widehat{\rho}_2(x')\,dx' = -i\sum_{k<0}\lambda_k\left[b_k^+ e^{-ikx} - b_k e^{ikx}\right]e^{-a|k|/2}, \tag{12.34}$$

где, как и выше, $\lambda_k = (2\pi/kL)^{1/2}$. Величина a введена в (12.33), (12.34) для регуляризации, причем подразумевается предельный переход $a \to +0$.

Рассмотрим произведение операторов $\widehat{\psi}_1^+(x)\widehat{\psi}_1(x')$ и, воспользовавшись (12.32), запишем его как

$$\widehat{\psi}_1^+(x)\widehat{\psi}_1(x') = |A_1|^2 e^{-i\widehat{\varphi}(x)+i\widehat{\varphi}(x')+[\widehat{\varphi}(x),\widehat{\varphi}(x')]/2}, \tag{12.35}$$

где

$$[\widehat{\varphi}(x), \widehat{\varphi}(x')] = \sum_{k>0}\lambda_k^2 L\left(e^{ik(x-x')} - e^{-ik(x-x')}\right)e^{-a|k|}. \tag{12.36}$$

Далее, приведем (12.35) к нормально-упорядоченному виду:

$$\widehat{\psi}_1^+(x)\widehat{\psi}_1(x') = |A_1|^2 e^{\widehat{B}^+} e^{-\widehat{B}} e^{([\widehat{B}^+,\widehat{B}]+[\widehat{\varphi}(x),\widehat{\varphi}(x')])/2}, \tag{12.37}$$

$$\widehat{B} = \sum_{k>0}\lambda_k b_k\left(e^{ikx} - e^{ikx'}\right)e^{-a|k|/2}. \tag{12.38}$$

Вычисляем коммутатор:

$$[\widehat{B}^+, \widehat{B}] = \sum_{k>0}\lambda_k^2 L\left(e^{ik(x-x')} + e^{-ik(x-x')} - 2\right)e^{-a|k|}. \tag{12.39}$$

Прибавляя к (12.39) выражение (12.36), получаем[6]

$$\frac{1}{2}\big([\widehat{B}^+,\widehat{B}]+[\widehat{\varphi}(x),\widehat{\varphi}(x')]\big)=\sum_{k>0}\lambda_k^2 L\big(e^{ik(x-x')}-1\big)e^{-a|k|}= \tag{12.40}$$

$$=\int\limits_0^\infty\Big(e^{ik(x-x')}-1\Big)\,e^{-a|k|}\frac{dk}{k}=\ln\frac{a}{a+i(x'-x)}. \tag{12.41}$$

Нормальное упорядочение произведения $\widehat{\psi}_1(x')\widehat{\psi}_1^+(x)$ выполняется совершенно аналогично (12.35) — (12.41). Единственное отличие заключается в том, что коммутатор $[\widehat{\varphi}(x),\widehat{\varphi}(x')]$ входит в аналог (12.35) со знаком «$-$». Вследствие этого, вместо (12.41) имеем

$$\frac{1}{2}\Big([\widehat{B}^+,\widehat{B}]-[\widehat{\varphi}(x),\widehat{\varphi}(x')]\Big)=\int\limits_0^\infty\Big(e^{ik(x'-x)}-1\Big)\,e^{-ak}\frac{dk}{k}=$$

$$=\ln\frac{a}{a-i(x'-x)}. \tag{12.42}$$

Поэтому антикоммутатор

$$[\widehat{\psi}_1^+(x),\widehat{\psi}_1(x')]_+=\widehat{\psi}_1^+(x)\widehat{\psi}_1(x')+\widehat{\psi}_1(x')\widehat{\psi}_1^+(x) \tag{12.43}$$

оказывается равен

$$a|A_1|^2e^{-\widehat{B}^+}e^{\widehat{B}}\left[\frac{1}{a-i(x-x')}+\frac{1}{a+i(x-x')}\right]. \tag{12.44}$$

Выражение (12.44) при $a\to+0$ дает

$$[\widehat{\psi}_1^+(x),\widehat{\psi}_1(x')]_+=2\pi a|A_1|^2\delta(x-x'), \tag{12.45}$$

откуда находим, что при выполнении условия $|A_1|=(2\pi a)^{-1/2}$ антикоммутатор $[\widehat{\psi}_1^+(x),\widehat{\psi}_1(x')]_+$ имеет требуемый вид (12.29). Аналогично можно проверить антикоммутативность $\widehat{\psi}_1(x)$ и $\widehat{\psi}_1(x')$, а также $\widehat{\psi}_1^+(x)$ и $\widehat{\psi}_1^+(x')$.

Наконец, рассмотрим коммутационные соотношения между операторами правых и левых частиц. В построенном выше представлении они коммутируют, а должны были бы антикоммутировать. Вообще говоря, поскольку эти частицы соответствуют разным ветвям спектра, коммутационные соотношения между ними могут быть выбраны произвольно, поскольку ни в каких наблюдаемых величинах они не

[6] В (12.41) использовано тождество $\int\limits_0^\infty(e^{-ax}-e^{-bx})dx/x=\ln b/a$.

проявляются[7]. Однако чтобы не возникало необходимости делать оговорки, принято вводить в определение величин A_j дополнительные множители:

$$A_1=\frac{e^{(i/2)\widehat{\varphi}_2(\infty)}}{(2\pi a)^{1/2}},\ A_2=\frac{e^{-(i/2)\widehat{\varphi}_1(\infty)}}{(2\pi a)^{1/2}},\ \widehat{\varphi}_{1,2}(\infty)=2\pi\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widehat{\rho}_{1,2}(x)\,dx. \tag{12.46}$$

Нетрудно проверить, что после этого все коммутационные соотношения принимают канонический вид (12.29).

С помощью обратного преобразования бозонизации можно найти функцию Грина латтинжеровской жидкости. Рассмотрим средние:

$$G_j(x,t)=\langle\widehat{\psi}_j(x,t)\widehat{\psi}_j^+(0,0)\rangle=(2\pi a)^{-1}\langle e^{i\widehat{\varphi}_j(x,t)}e^{-i\widehat{\varphi}_j(0,0)}\rangle. \tag{12.47}$$

С функциями Грина, определенными таким (несколько нестандартным) образом[8], оказывается весьма удобным проводить вычисления в координатно-временном представлении (см. задачи 79, 81).

Функции Грина (12.47) будут найдены в задаче 80. В случае, когда константы связи g_1 и g_2 в (12.27) не зависят от k, результат принимает довольно простой вид:

$$G_1(x,t)=\frac{i}{2\pi(x-v't+ia)}\left(\frac{a^2}{(x-v't+ia)(x+v't-ia)}\right)^{\mathrm{sh}^2\,\theta}, \tag{12.48}$$

$$G_2(x,t)=-\frac{i}{2\pi(x+v't-ia)}\left(\frac{a^2}{(x-v't+ia)(x+v't-ia)}\right)^{\mathrm{sh}^2\,\theta},$$

где

$$\mathrm{th}(2\theta)=\frac{g_2}{g_1+2\pi v},\quad v'=\frac{\omega_k}{k}=\frac{\big((2\pi v+g_1)^2-g_2^2\big)^{1/2}}{2\pi}$$

— перенормированная скорость квазичастиц, определенная в (12.28). Нетрудно видеть, что в отсутствие рассеяния назад ($g_2=0$) выражения (12.48) воспроизводят известные результаты для свободных фермионов.

[7] Подобно тому, как в обычном вторичном квантовании имеется произвол, когда гамильтониан системы не содержит явной зависимости от спина частиц. В этом случае, при определении операторов рождения и уничтожения частицы с определенной проекцией спина принципиально важна только антикоммутативность операторов с одинаковыми спинами, а операторы с различными спинами, вообще говоря, могут быть выбраны коммутирующими — это дело вкуса.

[8] Напомним определение канонической причинной функции Грина через хронологически упорядоченное среднее:

$$G_c(x,t,\,x',t')=-i\langle\mathrm{T}\,\widehat{\psi}_j(x,t)\widehat{\psi}_j^+(x',t')\rangle$$

.

С помощью гриновских функций (12.48) можно рассмотреть разнообразные вопросы. Так, интересно выяснить, как взаимодействие меняет распределение частиц по импульсам в основном состоянии, $n(p) \propto \operatorname{Im} G(\varepsilon, p)_{\varepsilon \to 0}$. Оказывается, фермиевская ступенька в $n(p)$, резкая в отсутствие взаимодействия, размывается и становится нерезкой при сколь угодно слабом взаимодействии. Размытие фермиевской сингулярности в $n(p)$ есть проявление того, что истинными квазичастицами в одномерном ферми-газе с взаимодействием являются не фермионы, а бозоны со спектром (12.28). Причина в том, что из-за взаимодействия время жизни ферми-жидкостных квазичастиц оказывается слишком малым (см. задачу 82). Нетривиальное основное состояние взаимодействующей системы обладает и другими интересными свойствами. Например, в задаче 81 мы увидим, что взаимодействие в латтинжеровской жидкости приводит к появлению аномалии в туннельной плотности состояний. Эта аномалия проявляется в неомической (степенной) вольт-амперной характеристике туннельного тока.

Литература: Хорошее изложение основных фактов и теории бозонизации можно найти в книгах: [7], гл. 4; *M. Stone*. Bosonization.—World Scientific, 1994.

12.5. Задачи 75–82

Задача 75. Найдите теплоемкость одномерного идеального ферми-газа, пользуясь бозонным представлением. Сравните с результатом, полученным в каноническом представлении.

Задача 76. Рассмотрим идеальный ферми-газ в конечной области $0 < x < L$ с периодическими граничными условиями. Как одночастичный, так и многочастичный спектры этой конечной системы являются дискретными. Попытаемся установить соответствие между индивидуальными состояниями в каноническом и в бозонизованном представлениях.

Линеаризуем закон дисперсии фермионов вблизи E_F. Покажите, что дискретный спектр многочастичных возбужденных состояний в обоих представлениях имеет вид $E_m = m\Delta$, где $m = 1, 2, 3, \ldots$, а $\Delta = 2\pi v_F / L$ — расстояние между одночастичными уровнями вблизи E_F. Обозначим через N_m кратность вырождения уровня ε_m. В силу многочастичности задачи, кратность вырождения N_m является весьма быстро возрастающей функцией m. Найдите N_m для нескольких первых уровней энергии в каноническом и в бозонном представлениях и покажите, что результаты совпадают.

Задача 77. (*Алгебра операторов.*) Докажите, что операторы $e^{i\mu\widehat{\varphi}_{1,2}(x)}$ и гармоники плотности (12.16) удовлетворяют следующим соотношениям

$$e^{i\mu\widehat{\varphi}_j(x)}\widehat{\rho}_l(k)e^{-i\mu\widehat{\varphi}_j(x)} = \widehat{\rho}_l(k) \pm \mu e^{-ikx}\delta_{jl} \quad (j, l = 1, 2), \tag{12.49}$$

где знак «+» соответствует правым частицам ($j = l = 1$), а знак «−» — левым ($j = l = 2$). Соотношение (12.49) в координатном представлении имеет вид

$$e^{i\mu\widehat{\varphi}_j(x)}\widehat{\rho}_l(x')e^{-i\mu\widehat{\varphi}_j(x)} = \widehat{\rho}_l(x') \pm \mu\delta_{jl}\delta(x - x'). \tag{12.50}$$

При такой записи видно, что оператор $e^{-i\mu\widehat{\varphi}_j(x)}$ «вставляет» в систему μ частиц, где значение μ может быть как целым, так и дробным.

Докажите также, что бозонизованные фермиевские операторы $\widehat{\psi}_j(x) = A_j e^{i\widehat{\varphi}_j(x)}$, $\widehat{\psi}_j^+(x) = A_j^* e^{-i\widehat{\varphi}_j(x)}$, $j = 1, 2$, и гармоники плотности (12.16) подчиняются следующим коммутационным соотношениям:

$$[\widehat{\psi}_j(x), \widehat{\rho}_l(p)] = \pm e^{-ipx}\widehat{\psi}_j(x)\delta_{jl} \quad (j, l = 1, 2). \tag{12.51}$$

Обратим внимание, что коммутаторы (12.51) совпадают с коммутаторами, найденными в каноническом представлении. Наряду с (12.49), соотношения (12.51) оказываются полезными при решении задач.

Задача 78. (*Катастрофа ортогональности.*) Применим метод бозонизации к изучению катастрофы ортогональности, рассмотренной в задаче 27. Напомним, что речь идет о вычислении интеграла перекрытия $K = \langle 0'|0\rangle$ основных состояний ферми-газа в отсутствие и в присутствии локализованного рассеивающего потенциала. Верно равенство

$$|K_\gamma| = \exp\Big[-\alpha \ln\frac{E_F}{\gamma}\Big], \quad \alpha = 2\sum_l (2l+1)\frac{\delta_l^2}{\pi^2}, \tag{12.52}$$

где δ_l — фазы рассеяния в канале с угловым моментом l при $E = E_F$, а $\gamma \ll E_F$ — скорость включения возмущения, определенная в задаче 27.

В случае сильного рассеяния суммирование ряда теории возмущений (5.19) оказывается довольно трудоемким делом[9]. Вместо этого можно применить следующий весьма полезный прием. Рассмотрим каждый канал рассеяния как систему одномерных киральных[10] фермионов, движущихся слева направо со скоростью $v = v_F$. При этом область $x < 0$ соответствует падающим волнам, область $x > 0$ — рассеянным, а само рассеяние происходит вблизи точки $x = 0$. В такой постановке задачи встряхивание ферми-газа при включении рассеяния на потенциале эквивалентно возбуждению одномерных фермионов при пролете через окрестность $x = 0$, в которой действует внешнее переменное поле.

[9] Отметим, что в данном случае оказывается возможным провести полное суммирование ряда теории возмущений (5.19). Это связано с тем, что высшие члены ряда (5.19) не становятся более сингулярными — в каждом порядке расходимость логарифмическая по γ. Однако соответствующие вычисления требуют использования специальной техники (*P. Nozières, C. T. deDominicis*// Phys. Rev. 1969. V. 178. P. 1097).

[10] Теорию поля и, в частности, латтинжеровскую жидкость, называют киральной, если в ней имеются только правые или же только левые частицы.

Запишите бозонизованный гамильтониан для фермионов в плавно меняющемся электромагнитном поле $a(x,t)$, локализованном вблизи $x=0$. Скачку фазы рассеяния соответствует импульс поля. Определите соответствие между фазой рассеяния δ и амплитудой поля $a(x,t)$.

Бозонизованный гамильтониан квадратичен, а член, описывающий взаимодействие с полем a, линеен по операторам $\widehat{\rho}(k)$. Рассмотрите эволюцию основного состояния при включении поля и определите перекрытие начального и конечного состояний. Получите формулу (12.52).

Задача 79. (*Край спектра рентгеновского поглощения в металле.*) При поглощении мягких рентгеновских лучей в металле[11], электрон, поглотив фотон, может перейти с одной из внутренних оболочек атома решетки в свободные состояния в зоне проводимости. При этом на отдавшем электрон атоме остается дырка, обладающая положительным зарядом. Электроны в зоне проводимости, а также вылетевший электрон, могут рассеиваться на возникшем при поглощении фотона статическом потенциале дырки. Поскольку это рассеяние включается мгновенно, электроны проводимости испытывают встряску, приводящую к рождению электрон-дырочных пар. Оказывается, что именно эта динамика ферми-системы определяет характер спектра поглощения, когда энергия выбитого электрона близка к E_F.

Будем считать, что потенциал рассеяния на неподвижной дырке сферически симметричен и характеризуется фазами рассеяния δ_l, где $l=1,2,3,\ldots$ нумерует каналы с различным угловым моментом. Предположим также, что электрон, поглощающий фотон, переходит в состояние с угловым моментом $l=j$. (Если электрон вырывается из s-состояния, то $j=1$ по правилу отбора для дипольных переходов.) Покажите, что спектр поглощения фотонов вблизи нижней границы имеет степенное поведение:

$$W(\omega) \propto (\omega-\omega_0)^{\beta}, \quad \beta = \alpha - 2\,\frac{\delta_j}{\pi}, \tag{12.53}$$

где величина α определена выражением (12.52), а порог поглощения $\omega_0 = E_F + E_0$ есть сумма энергии образования дырки и энергии Ферми, отсчитанной от энергии связи выбитого электрона.

Два слагаемых в выражении для β известны как андерсоновский и махановский вклады. При этом α, согласно задаче 78, описывает встряхивание ферми-системы при включении рассеяния, приводящее к сложным неупругим процессам, связанным с множественным рождением электрон-дырочных пар. Вклад же $-2\delta_j/\pi$ описывает эффект притяжения выбитого электрона неподвижной дыркой[12]. Интересно, что, благодаря второму слагаемому, знак β может оказаться произвольным. При $\beta>0$ низкоэнергетическое поглощение подавляется по сравнению с идеальным ферми-газом, а при $\beta<0$ — наоборот, усиливается.

Задача 80. (*Функция Грина.*) Рассмотрите латтинжеровскую жидкость с взаимодействием (12.20), в котором величины $g_{1,2}(q)$ не зависят от q.

а. Получите выражения (12.48) для функции Грина (12.47) при $T=0$.

б. Найдите функцию Грина при конечной температуре T.

Задача 81. (*Туннельная плотность состояний.*) Рассмотрим две параллельные одномерные системы A и B с точечным туннельным контактом между ними. Обе системы являются латтинжеровскими жидкостями и описываются гамильтонианом (12.20) с константами взаимодействия $g_{1,2}^{A,B}$. Гамильтониан системы имеет вид $\widehat{\mathscr{H}}_{\rm tot} = \widehat{\mathscr{H}}_A + \widehat{\mathscr{H}}_B + \widehat{\mathscr{H}}_{\rm tun}$, причем

$$\widehat{\mathscr{H}}_{\rm tun} = w\,\psi_B^{+}(x)\psi_A(x)\big|_{x=x_0} + \text{h.c.}, \tag{12.54}$$

где w — амплитуда туннелирования. При записи (12.54) предполагается, что туннелирование происходит в малой окрестности точки x_0.

Покажите, что при $T=0$ туннельный ток является степенной функцией напряжения на контакте:

$$I \propto V^{\alpha_{AB}-1}, \quad \alpha_{AB} = 2(1+\operatorname{sh}^2\theta_A + \operatorname{sh}^2\theta_B), \tag{12.55}$$

где $\theta_{A,B}$ связаны с константами взаимодействия $g_{1,2}^{A,B}$ соотношением (12.27). Как меняется вольт-амперная характеристика (12.55) при конечной температуре T?

Задача 82. Рассмотрим одномерные фермионы с взаимодействием (12.20). Найдите функцию Грина, пользуясь теорией возмущений и уравнением Дайсона. Рассмотрите вклады в собственно-энергетическую часть $\Sigma(\varepsilon,p)$ первого и второго порядка[13] по взаимодействию $g_{1,2}(q)$. Покажите, что полученное выражение для $\Sigma(\varepsilon,p)$ содержит расходимость при малых ε, указывающую на неферми-жидкостное поведение.

[11] Именно при решении этой и родственной ей задачи о катастрофе ортогональности (см. задачи 27 и 78), были впервые введены соотношения (12.30) между бозонными и фермионными операторами (*K. D. Schotte, U. Schotte*// Phys. Rev. 1969. V. 182. P. 479).

[12] *G. D. Mahan*// Phys. Rev. 1967. V. 163. P. 612.

12.6. Решения задач 75–82

75. Термодинамический потенциал одномерной бозе-системы имеет вид

$$\Omega_B = T\int \ln\left(1-e^{-\varepsilon(k)/T}\right)\frac{dk}{2\pi\hbar}, \tag{12.56}$$

[13] Вычисление функции Грина одномерной системы, в котором учтены вклады всех порядков теории возмущений, содержится в работе: *И. Е. Дзялошинский, А. И. Ларкин*// ЖЭТФ. 1973. Т. 65. С. 411. В этой работе продемонстрировано совпадение результатов вычислений, проведенных по теории возмущений и с помощью метода бозонизации.

где $\varepsilon(k) = v_F|k|$. Переходим к интегрированию по $x = \varepsilon(k)/T$:

$$\Omega_B = \frac{2T^2}{v_F}\int\limits_0^\infty \ln\left(1 - e^{-x}\right)\frac{dx}{2\pi\hbar}. \tag{12.57}$$

Разлагая логарифм в ряд и меняя порядок суммирования и интегрирования, получаем

$$\Omega_B = -\frac{T^2}{\pi v_F}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = -\zeta(2)\frac{T^2}{\pi v_F\hbar}. \tag{12.58}$$

Отсюда находим теплоемкость $C = (\pi^2/6)\,T/(\pi v_F\hbar)$.

Найдем теперь термодинамический потенциал, пользуясь каноническим фермионным представлением:

$$\Omega_F = -T\int \ln\left(1 + e^{-(k^2/2m-\mu)/T}\right)\frac{dk}{2\pi\hbar}. \tag{12.59}$$

Нас интересует зависящая от температуры часть Ω_F, которая определяется состояниями с энергией $|\varepsilon| \approx T$ вблизи ферми-поверхности. В этой области энергий закон дисперсии можно линеаризовать: $\xi(k) = \pm v_F(|k| - p_0)$. Теперь вычтем из выражения (12.59) его значение при $T \to 0$. Результат можно записать в виде

$$\Omega_F = -\frac{4T}{v_F}\int\limits_0^\infty \ln\left(1 + e^{-\xi/T}\right)\frac{d\xi}{2\pi\hbar}. \tag{12.60}$$

Как и выше, разлагаем логарифм в ряд и меняем порядок суммирования и интегрирования:

$$\Omega_F = -\frac{2T^2}{\pi v_F}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = -\frac{1}{2}\zeta(2)\frac{2T^2}{\pi v_F\hbar}. \tag{12.61}$$

Видим, что $\Omega_F = \Omega_B$. Значит, теплоемкости, найденные обоими способами, совпадают.

76. Состояния ферми-газа с малыми энергиями, для которых справедливо представление бозонизации, можно разделить на правые и левые, построенные, соответственно, из плоских волн с $p \approx p_0$ и $p \approx -p_0$. Не теряя общности, ограничимся рассмотрением правых состояний. После того как соответствие между каноническим и бозонным представлениями будет установлено для правых состояний, обобщение на другие состояния будет очевидно. Для простоты будем рассматривать бесспиновые частицы.

Одночастичные состояния фермионов на кольце длины L характеризуются дискретными импульсами $p_j = 2\pi j/L$, $j \in Z$. Основное состояние $2j_{\max} + 1$ частиц есть слэтеровский детерминант $|\mathrm{vac_f}\rangle$, построенный из плоских волн с p_j, такими что $|j| \leqslant j_{\max}$.

Линеаризуя спектр вблизи $p = p_{j_{\max}}$, находим закон дисперсии правых частиц: $\varepsilon(j) = \Delta(j - j_{\max})$, где $\Delta = 2\pi p_{j_{\max}}/mL = 2\pi v_F/L$ — расстояние между уровнями вблизи E_F. Ниже будет удобно нумеровать

одночастичные уровни с помощью $m = j - j_{\max}$. При этом $\varepsilon_m = m\Delta$, причем в основном состоянии заполнены уровни с $m \leqslant 0$, а уровни с $m > 0$ пусты.

Перейдем теперь к рассмотрению многочастичных возбужденных состояний. Каждое возбужденное состояние характеризуется заполнением некоторого количества одночастичных состояний с $m > 0$ одновременно с образованием точно такого же количества дырок с $m \leqslant 0$. В простейшем случае, когда имеется всего одна пара частица–дырка, состояния выглядят так: $\psi_{m|n} = a_m^+ a_n|\mathrm{vac_f}\rangle$, где $m > 0$, $n \leqslant 0$, а энергия $E_{m|n} = (m - n)\Delta$. При каждом значении энергии $E_k = k\Delta$, $k = 1, 2, 3, 4, \ldots$, имеется ровно k таких состояний.

Можно построить также состояния с двумя, тремя и большим числом пар частица–дырка. Нетрудно убедиться в том, что при энергиях $E = \Delta,\ 2\Delta,\ 3\Delta$ состояния с более чем одной парой отсутствуют. При энергии же $E = 4\Delta$ имеется ровно одно такое состояние:

$$\psi_{2,1|0,-1} = a_2^+ a_1^+ a_0 a_{-1}|\mathrm{vac_f}\rangle. \tag{12.62}$$

При $E = 5\Delta$ имеется два состояния с двумя парами: $\psi_{3,1|0,-1}$ и $\psi_{2,1|0,-2}$, где обозначения соответствуют (12.62). А при $E = 6\Delta$ имеется уже четыре состояния такого вида: $\psi_{4,1|0,-1}$, $\psi_{3,1|0,-2}$, $\psi_{2,1|0,-3}$, $\psi_{2,1|-1,-2}$.

Добавляя состояния с одной парой, получаем кратности вырождения N_m первых шести уровней $E_m = m\Delta$:

$$N_1 = 1,\quad N_2 = 2,\quad N_3 = 3,\quad N_4 = 5,\quad N_5 = 7,\quad N_6 = 11. \tag{12.63}$$

Начиная с $E = 7\Delta$ требуется учитывать состояния с тремя и большим числом пар. Поэтому здесь мы ограничимся первыми шестью уровнями.

Теперь найдем многочастичные уровни и кратности их вырождения в бозонном представлении. В этом представлении спектр квазичастиц есть $\omega(p) = v_F|p|$, причем в силу периодических граничных условий импульс p принимает дискретные значения $p_j = (2\pi/L)j$, $j \in Z$. Правой ветви фермионов соответствуют правые бозоны с $j > 0$. Основное состояние $|\mathrm{vac_b}\rangle$ есть симметризованное произведение основных состояний всех правых бозонов. На языке канонических бозе-операторов b_j, b_j^+ состояние $|\mathrm{vac_b}\rangle$ подчиняется соотношениям $b_j|\mathrm{vac_b}\rangle = 0$ при всех $j > 0$.

Возбужденные состояния получаются применением к $|\mathrm{vac_b}\rangle$ некоторого количества операторов b_j^+. При этом собственные энергии, как нетрудно видеть, все оказываются кратными Δ, т. е. совпадают с энергиями, найденными в фермионном представлении.

Найдем теперь кратности вырождения. При $E = \Delta$ имеется всего одно состояние $\psi_1 = b_1^+|\mathrm{vac_b}\rangle$. При $E = 2\Delta$ существует два состояния: $\psi_2 = b_2^+|\mathrm{vac_b}\rangle$ и $\psi_{1^2} = (b_1^+)^2|\mathrm{vac_b}\rangle$. При $E = 3\Delta$ имеется три состояния:

$$\psi_3 = b_3^+|\mathrm{vac_b}\rangle,\quad \psi_{1^3} = (b_1^+)^3|\mathrm{vac_b}\rangle,\quad \psi_{2,1} = b_2^+ b_1^+|\mathrm{vac_b}\rangle. \tag{12.64}$$

При $E = 4\Delta$ имеется всего пять состояний:

$$\psi_4, \quad \psi_{3,1}, \quad \psi_{2^2}, \quad \psi_{2,1^2}, \quad \psi_{1^4}. \tag{12.65}$$

При $E = 5\Delta$ состояния имеют вид

$$\psi_5, \ \psi_{4,1}, \ \psi_{3,2}, \ \psi_{3,1^2}, \ \psi_{2^2,1}, \ \psi_{2,1^3}, \ \psi_{1^5}, \tag{12.66}$$

итого семь состояний. При $E = 6\Delta$ находим

$$\psi_6, \psi_{5,1}, \psi_{4,2}, \psi_{4,1^2}, \psi_{3^2}, \psi_{3,2,1}, \psi_{3,1^3}, \psi_{2^3}, \psi_{2^2,1^2}, \psi_{2,1^4}, \psi_{1^6}, \tag{12.67}$$

итого одиннадцать состояний.

Получается, что для нижних шести уровней кратности вырождения (12.63), найденные в бозонном и фермионном представлениях, совпадают. Для более высоких уровней кратности вырождения быстро растут, и получить их прямым перечислением состояний становится непросто. Чтобы убедиться в совпадении кратностей вырождения для произвольно высоких уровней, удобно воспользоваться производящими функциями. В бозонном представлении производящая функция для кратностей заполнений есть

$$F_{\mathrm{B}}(z) = \sum_{m>0} N_m^{\mathrm{B}} z^m = \prod_{m>0} \frac{1}{1-z^m}. \tag{12.68}$$

Аналогично, производящая функция в фермионном представлении строится так:

$$F_{\mathrm{F}}(z) = \sum_{m>0} N_m^{\mathrm{F}} z^m = \oint\limits_{|\eta|=1} \left(\prod_{m>0} (1+\eta z^m) \prod_{m>0} (1+\eta^{-1} z^{m-1}) \right) \frac{d\eta}{2\pi i \eta}. \tag{12.69}$$

Здесь первое и второе произведения соответствуют вкладам частиц и дырок. Контурный интеграл по η выделяет вклады с одинаковым числом частиц и дырок. Это ограничение необходимо, поскольку в фермионном представлении число частиц фиксировано.

Доказательство совпадения кратностей вырождения $N_m^{\mathrm{F}} = N_m^{\mathrm{B}}$ при всех m эквивалентно проверке того, что $F_{\mathrm{B}}(z) = F_{\mathrm{F}}(z)$. Это равенство можно переписать так:

$$\oint\limits_{|\eta|=1} \prod_{m>0} (1-z^m)(1+\eta z^m)(1+\eta^{-1} z^{m-1}) \frac{d\eta}{2\pi i \eta} = 1. \tag{12.70}$$

Соотношение (12.70) следует из так называемого тройного тождества Якоби:

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1-w^{2n+2})(1+\eta w^{2n+1})(1+\eta^{-1} w^{2n+1}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \eta^n w^{n^2}. \tag{12.71}$$

Доказательство этого тождества неэлементарно[14]).

[14]) См. *Г. Эндрюс.* Теория разбиений.—М.: Наука, 1982.—С. 35.

77. Рассмотрим оператор $\widehat{\eta}_k(\mu) = e^{i\mu\widehat{\varphi}_1(x)} \widehat{\rho}_1(k) e^{-i\mu\widehat{\varphi}_1(x)}$ как функцию параметра μ. Вычислим производную

$$\frac{\partial \widehat{\eta}_k(\mu)}{\partial \mu} = i e^{i\mu\widehat{\varphi}_1(x)} [\widehat{\varphi}_1(x), \widehat{\rho}_1(k)] e^{-i\mu\widehat{\varphi}_1(x)}. \tag{12.72}$$

Коммутатор $[\widehat{\varphi}_1(x), \widehat{\rho}_1(k)]$ находим, пользуясь (12.16) и (12.33):

$$[\widehat{\varphi}_1(x), \widehat{\rho}_1(k)] = -i \sum_{k'>0} 2\pi \left(\delta(k-k') e^{-ik'x} \delta(k+k') e^{-ik'x} \right) = -i e^{-ikx}. \tag{12.73}$$

Интегрируя (12.72) по μ, находим $\widehat{\eta}_k(\mu) = \widehat{\rho}_1(k) + e^{-ikx}$, что и требовалось. Рассмотрение других комбинаций j и l производится аналогично.

Для доказательства соотношения (12.51) умножим левую и правую части (12.49) на $|A_j|^2 e^{i\mu\widehat{\varphi}_j(x)}$. Полагая $\mu = 1$, приходим к (12.51).

78. Рассмотрим рассеяние на зависящем от времени точечном потенциале, воспользовавшись представлением киральных фермионов, отдельно для каждого канала рассеяния. Гамильтониан, записанный через операторы $\widehat{\rho}_1(k)$ гармоник плотности правых частиц, имеет вид

$$\widehat{\mathscr{H}} = 2\pi v_F \sum_{k>0} \widehat{\rho}_1(k) \widehat{\rho}_1(-k) + w e^{\gamma t} \widehat{\rho}_1(x=0). \tag{12.74}$$

Первый член (12.74) представляет собой кинетическую энергию (12.24), а второй — потенциал рассеяния, включаемый со скоростью γ.

Свяжем амплитуду возмущения w в (12.74) с фазой рассеяния δ_l. Рассмотрим для этого одномерный идеальный ферми-газ в плавно меняющемся электромагнитном поле:

$$\widehat{\mathscr{H}}_{\mathrm{int}} = -\frac{1}{c} \int \widehat{j}_1(x) a(x,t)\, dx. \tag{12.75}$$

Поле приложено в небольшой окрестности $x = 0$, причем его поток $\Phi(t) = \int a(x,t)dx$ плавно меняется как функция времени по закону $e^{\gamma t}$. Квазиклассический набег фазы, возникающий благодаря $a(x,t)$, дается множителем $\exp(2\pi i \Phi(t)/\Phi_0)$, где $\Phi_0 = hc/e$.

Квантовомеханическая фаза рассеяния δ_l в канале с угловым моментом l определяется с помощью асимптотики волновой функции: $\psi(r) \propto \sin(kr + \delta_l + \pi l)$. Из этого выражения видно, что изменение относительной фазы рассеянной и падающей волн при включении рассеяния есть $2\delta_l$. Сравнивая с фазой, возникающей в поле $a(x,t)$, находим

$$2\pi\, \Phi(t) = \Phi_0 \cdot 2\delta_l e^{\gamma t}. \tag{12.76}$$

Подставляя это соотношение в (12.75) и выражая ток через плотность по формуле $\widehat{j}_1 = e v_F \widehat{\rho}_1$, получаем второй член гамильтониана (12.74). При этом $w = -2\delta_l \hbar v_F$.

Найдем интеграл перекрытия состояния в момент $t = 0$ с исходным состоянием $|0\rangle$, имевшимся при $t = -\infty$. Перекрытие состояний, запи-

санное в представлении взаимодействия, есть

$$K_\gamma = \left\langle 0 \left| \mathrm{T}\, \exp\left(-i \int\limits_{-\infty}^{0} \widetilde{\mathcal{H}}_{\mathrm{int}}(t)\, dt \right) \right| 0 \right\rangle, \qquad (12.77)$$

где

$$\widetilde{\mathcal{H}}_{\mathrm{int}}(t) = we^{\gamma t}\, \widetilde{\rho}_1(x,t)_{x=0}, \quad \widetilde{\rho}_1(x,t) = e^{i\widehat{\mathcal{H}}_0 t}\, \widetilde{\rho}_1(x) e^{-i\widehat{\mathcal{H}}_0 t}. \qquad (12.78)$$

Пользуясь соотношениями (12.16), выразим плотность $\widehat{\rho}_1(x)$ через бозе-операторы b_k и b_k^+, и перейдем в представление взаимодействия:

$$\widetilde{\rho}_1(x,t) = \sum_{k>0} (\lambda_k L)^{-1} \left(e^{ikx - iv|k|t} b_k + e^{-ikx + iv|k|t} b_k^+ \right). \qquad (12.79)$$

При этом гамильтониан взаимодействия (12.78) оказывается линейным по бозе-операторам, что делает задачу усреднения экспоненты (12.77) весьма простой. Отметим, что именно на этом шаге становится очевидным преимущество бозонизации по сравнению с прямым вычислением.

Найдем среднее от экспоненты (12.77), пользуясь правилом гауссова усреднения и теоремой Вика:

$$K_\gamma = \exp\left[-w^2 \int\limits_{-\infty}^{0} dt \int\limits_{-\infty}^{t} \langle \widetilde{\rho}_1(x,t) \widetilde{\rho}_1(x,t') \rangle_{x=0} e^{\gamma(t+t')}\, dt' \right]. \qquad (12.80)$$

Согласно (12.16) интересующий нас коррелятор величин $\widetilde{\rho}_1(x,t)_{x=0}$ есть

$$\langle \widetilde{\rho}_1(0,t) \widetilde{\rho}_1(0,t') \rangle = \sum_{k>0} e^{-i|k|v(t-t') - a|k|} / \lambda_k^2 L. \qquad (12.81)$$

Подставляя (12.81) в (12.80) и вычисляя интегралы по t' и t, находим

$$K_\gamma = \exp\left(-w^2 \sum_{k>0} \frac{k}{2\pi} \frac{e^{-ak}}{(\gamma + ikv_F) 2\gamma} \right). \qquad (12.82)$$

При вычислении интеграла (12.82) оставляем только вещественную часть, поскольку относительная фаза начального и конечного состояний нас не интересует. Результат есть

$$K_\gamma = \exp\left(-\frac{w^2}{4\pi} \sum_{k>0} \frac{k e^{-ak}}{k^2 v_F^2 + \gamma^2} \right) = \exp\left(-\frac{\delta^2}{2\pi^2} \ln \frac{v_F}{\gamma a} \right). \qquad (12.83)$$

Остается только заметить, что $a \approx v_F / E_F$, и что вклады в K_γ от каналов рассеяния с различными значениями спина и углового момента факторизуются. Произведение независимых вкладов различных каналов дает формулу (12.52).

79. Вероятность поглощения фотона, согласно «золотому правилу», записывается в виде

$$W(\omega) = 2\pi \sum_f \left| \sum_p u_p(\omega) \langle f | a_p^+ b | i \rangle \right|^2 \delta(\omega - \omega_0 - E_f), \qquad (12.84)$$

где a_p^+ — оператор рождения электрона с импульсом p в зоне проводимости, b — оператор рождения дырки (уничтожения электрона) на внутренней оболочке атома, $u_p(\omega)$ — дипольный матричный элемент, ω_0 — порог поглощения, равный сумме минимальной энергии выбитого электрона E_F и энергии образования дырки E_0. Суммирование в (12.84) происходит по импульсам p электрона, попадающего в зону проводимости, а также по всем конечным состояниям $|f\rangle$ системы с добавленными электроном и дыркой. Начальное состояние $|i\rangle$ представляет собой основное состояние идеального ферми-газа.

Преобразуем выражение (12.84), воспользовавшись соотношением

$$2\pi \sum_f \delta(\omega - \omega_0 - E_f)\, |f\rangle \langle f| = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\widehat{\mathcal{H}}_{\mathrm{sc}} t + i(\omega - \omega_0)t}\, dt, \qquad (12.85)$$

где $\widehat{\mathcal{H}}_{\mathrm{sc}}$ — гамильтониан ферми-газа в присутствии рассеивающего центра, характеризующегося фазами рассеяния δ_l. Пренебрегая зависимостью матричного элемента $u_p(\omega)$ от ω, запишем (12.84) в виде

$$W(\omega) = A \int\limits_{-\infty}^{\infty} \langle i | b^+ \widehat{\psi}_{\mathrm{exc}} e^{-i\widehat{\mathcal{H}}_{\mathrm{sc}}} \widehat{\psi}_{\mathrm{exc}}^+ b | i \rangle e^{i(\omega - \omega_0)t}\, dt, \qquad (12.86)$$

где $\widehat{\psi}_{\mathrm{exc}}^+(r) = A^{-1/2} \sum_p u_p a_p^+ e^{-ipr}$ — оператор рождения электрона в состоянии с угловым моментом j, локализованном в окрестности точки $r = 0$, где происходит поглощение фотона. (Здесь $A = \sum_p |u_p|^2$ — нормировочный множитель.)

Теперь удобно избавиться от состояний дырки, заменив $b^+ b$ на 1. Получаем

$$W(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Tr} \left(e^{i\widehat{\mathcal{H}}_0 t} \widehat{\psi}_{\mathrm{exc}} e^{-i\widehat{\mathcal{H}}_{\mathrm{sc}} t} \widehat{\psi}_{\mathrm{exc}}^+ \right) e^{i(\omega - \omega_0)t}\, dt. \qquad (12.87)$$

При записи (12.87) мы воспользовались тем, что для гамильтониана $\widehat{\mathcal{H}}_0$ системы в отсутствие рассеяния ($\delta_l = 0$) исходное состояние $|i\rangle$ является собственным.

Теперь бозонизуем задачу так же, как это было сделано в задаче 78. При этом гамильтониан есть сумма независимых вкладов каналов с различными l:

$$\widehat{\mathcal{H}}_{\mathrm{sc}} = \sum_l \widehat{\mathcal{H}}_l. \qquad (12.88)$$

Гамильтониан $\widehat{\mathscr{H}}_l$, описывающий рассеяние в канале с угловым моментом l, может быть записан через гармоники плотности киральных фермионов $\widehat{\rho}^{(l)}(k)$ следующим образом:

$$\widehat{\mathscr{H}}_l = 2\pi v_F \sum_{k>0} \left\{ \widehat{\rho}_1^{(l)}(k)\widehat{\rho}_1^{(l)}(-k) - \frac{\delta_l}{\pi}\left[\widehat{\rho}_1^{(l)}(k) + \widehat{\rho}_1^{(l)}(-k)\right]\right\}. \quad (12.89)$$

В выражении (12.89) учтена связь между фазой рассеяния и константой связи в бозонизованном представлении точечного рассеяния, найденная в задаче 78.

Оператор рождения электрона в бозонизованном представлении записывается следующим образом:

$$\widehat{\psi}^+_{\text{exc}} = (2\pi a)^{-1/2} e^{i\widehat{\varphi}_1(x)}\big|_{l=j,x=0}. \quad (12.90)$$

Обратим внимание на то, что оператор $\widehat{\psi}^+_{\text{exc}}$ действует нетривиально только в канале с $l = j$, а в остальных каналах он действует как единичный оператор.

Подынтегральное выражение (12.87) есть произведение вкладов каналов с различными l. Рассмотрим сначала $l \neq j$. В этом случае, применяя доказанное в задаче 77 тождество $e^{i\mu\widehat{\varphi}_1(x)}\widehat{\rho}_1(k)e^{-i\mu\widehat{\varphi}_1(x)} = \widehat{\rho}_1^{(l)}(k) + \mu e^{-ikx}$ с $\mu = -\delta_l/\pi$ и $x = 0$, находим

$$e^{i\mu\widehat{\varphi}_1(x)}\widehat{\mathscr{H}}_0 e^{-i\mu\widehat{\varphi}_1(x)} = \widehat{\mathscr{H}}_0 + 2\pi v_F \sum_{k>0}\left(-\frac{\delta_l}{\pi}\left(\widehat{\rho}_1^{(l)}(k) + \widehat{\rho}_1^{(l)}(-k)\right) + \frac{\delta_l^2}{\pi^2}\right). \quad (12.91)$$

Правая часть этого выражения, с точностью до несущественной константы [15], есть $\widehat{\mathscr{H}}_l$. Сделанное наблюдение позволяет переписать вклад l-го канала в выражение (12.87) следующим образом:

$$\operatorname{Tr}\left(e^{i\widehat{\mathscr{H}}_0 t}e^{-i\widehat{\mathscr{H}}_l t}\right) = e^{-i\Delta_l t}\langle e^{i\widehat{\mathscr{H}}_0 t}e^{i\mu\widehat{\varphi}_1}e^{-i\widehat{\mathscr{H}}_0 t}e^{-i\mu\widehat{\varphi}_1}\rangle = e^{-i\Delta_l t}\langle e^{i\mu\widehat{\varphi}_1(t)}e^{-i\mu\widehat{\varphi}_1(0)}\rangle, \quad (12.92)$$

где $\mu = -\delta_l/\pi$, $\widehat{\varphi}_1(t) = \widehat{\varphi}_1(x,t)_{x=0}$. Чтобы вычислить среднее в (12.92), приведем произведение операторов к нормально-упорядоченной форме. Это нетрудно сделать, воспользовавшись тождеством Бейкера–Хаусдорфа:

$$e^{i\mu\widehat{\varphi}_1(t)}e^{-i\mu\widehat{\varphi}_1(0)} = e^{i\mu(\widehat{\varphi}_1(t)-\widehat{\varphi}_1(0))+\frac{\mu^2}{2}[\widehat{\varphi}_1(t),\widehat{\varphi}_1(0)]} = e^{\mu\widehat{B}^+}e^{-\mu\widehat{B}}e^{\frac{\mu^2}{2}([\widehat{B}^+,\widehat{B}]+[\widehat{\varphi}(t),\widehat{\varphi}(0)])},$$

$$\widehat{B} = \sum_{k>0}\lambda_k b_k\left(e^{-ikv_F t}-1\right)e^{-a|k|/2}.$$

[15] Роль этой константы, величина которой есть $\Delta_l = 2\pi v_F \sum_{k>0}\delta_l^2/\pi^2$, сводится к небольшому сдвигу порога поглощения ω_0.

Вычисляя среднее, получаем

$$\langle e^{i\mu\widehat{\varphi}_1(t)}e^{-i\mu\widehat{\varphi}_1(0)}\rangle = \exp\left(\frac{\delta_l^2}{\pi^2}\ln\frac{a}{a+iv_F t}\right). \quad (12.93)$$

При больших t это выражение ведет себя как $t^{-\delta_l^2/\pi^2}$.

Теперь рассмотрим динамику в канале с $l = j$. Пользуясь тем же методом, что и выше, находим вклад этого канала:

$$\operatorname{Tr}\left(e^{i\widehat{\mathscr{H}}_0 t}e^{i\widehat{\varphi}_1}e^{-i\widehat{\mathscr{H}}_l t}e^{-i\widehat{\varphi}_1}\right) = \langle e^{i\widehat{\mathscr{H}}_0 t}e^{i(1+\mu)\widehat{\varphi}_1}e^{-i\widehat{\mathscr{H}}_0 t}e^{-i(1+\mu)\widehat{\varphi}_1}\rangle, \quad (12.94)$$

где $\mu = -\delta_j/\pi$. В результате выполненного преобразования операторы $e^{\pm i\widehat{\varphi}_1}$ удобно комбинируются с $e^{\pm i\mu\widehat{\varphi}_1}$. Дальнейшие вычисления ничем не отличаются от случая $l \neq j$, с точностью до замены $\mu \to 1+\mu = 1-\delta_j/\pi$. В результате получаем

$$\exp\left[\left(1-\frac{\delta_j}{\pi}\right)^2\ln\frac{a}{a+iv_F t}\right]. \quad (12.95)$$

Вычисляя произведение вкладов всех l с учетом кратности $2l+1$ орбитального вырождения и двукратного спинового вырождения, получаем следующее выражение:

$$W(\omega) = A^2\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{a}{a+iv_F t}\right)^{1-2\delta_j/\pi+2\sum_l(2l+1)\delta_l^2/\pi^2}e^{i(\omega-\omega_0)t}dt. \quad (12.96)$$

Показатель степени есть не что иное как $1+\beta$. При вычислении интеграла по t замыкаем контур в верхней или нижней полуплоскости комплексного t, в зависимости от знака $\omega-\omega_0$. В результате получаем искомое соотношение $W(\omega) \propto (\omega-\omega_0)^\beta$ при $\omega > \omega_0$ и $W(\omega) = 0$ при $\omega < \omega_0$.

80 а. Сначала найдем гриновскую функцию $G_j^0(x,t)$ в отсутствие взаимодействия для правых частиц: $j = 1$. Ход вычисления напоминает преобразования, проделанные выше при проверке коммутационных соотношений. Сначала преобразуем произведение операторов в (12.47) с помощью тождества Бейкера–Хаусдорфа (12.32):

$$e^{i\widehat{\varphi}_j(x,t)}e^{-i\widehat{\varphi}_j(0,0)} = e^{i\widehat{\varphi}_j(x,t)-i\widehat{\varphi}_j(0,0)}e^{\frac{1}{2}[\widehat{\varphi}_j(x,t),\widehat{\varphi}_j(0,0)]}. \quad (12.97)$$

Теперь нормально упорядочиваем это выражение, еще раз применяя тождество (12.32), и вычисляем коммутаторы, пользуясь (12.33):

$$e^{i\widehat{\varphi}_j(x,t)}e^{-i\widehat{\varphi}_j(0,0)} = e^{-\widehat{B}^+}e^{\widehat{B}}e^{\frac{1}{2}([\widehat{B}^+,\widehat{B}]+[\widehat{\varphi}_j(x,t),\widehat{\varphi}_j(0,0)])} = e^{-\widehat{B}^+}e^{\widehat{B}}\exp\left(2\pi\sum_{k>0}\frac{e^{-ak}}{k}\left(e^{ik(x-vt)}-1\right)\right), \quad (12.98)$$

$$\widehat{B} = \sum_{k>0} \lambda_k b_k \bigl(e^{ikx - kv_F t} - 1\bigr). \tag{12.99}$$

Сумма в экспоненте, как было найдено в (12.41), есть $\ln \dfrac{a}{a - i(x - vt)}$. Подставляем результат в (12.47), усредняем по основному состоянию и получаем

$$G_1^0(x,t) = (2\pi)^{-1} \frac{1}{a - i(x - vt)}, \quad a \to 0. \tag{12.100}$$

Действуя аналогично, находим

$$G_2^0(x,t) = (2\pi)^{-1} \frac{1}{a + i(x + vt)}, \quad a \to 0. \tag{12.101}$$

Разумеется, точно такие же выражения можно получить прямым вычислением с помощью вторично-квантованных фермиевских операторов.

Перейдем к вычислению функции Грина взаимодействующих фермионов. Временная зависимость оператора $\widehat{\varphi}_j(x,t)$ может быть получена из (12.26), (12.27), (12.28). Упростим задачу, считая константы связи g_1 и g_2 независящими от k величинами. При этом угол θ в преобразовании Боголюбова (12.26) есть константа.

Преобразуем операторы b_k, b_k^+ в (12.33) с помощью соотношений (12.26). При этом оператор фазы правых частиц $\widehat{\varphi}_1(x,t)$ приобретает вид:

$$i \sum_{k>0} \lambda_k e^{-ak} \times \\ \times \bigl\{ e^{-ikx} [\operatorname{ch}\theta\, \widetilde{b}_k^+(t) - \operatorname{sh}\theta\, \widetilde{b}_{-k}(t)] - e^{ikx} [\operatorname{ch}\theta\, \widetilde{b}_k(t) - \operatorname{sh}\theta\, \widetilde{b}_{-k}^+(t)] \bigr\},$$

где $\widetilde{b}_k(t) = e^{-i\omega_k t} \widetilde{b}_k$, $\widetilde{b}_{-k}^+(t) = e^{i\omega_k t} \widetilde{b}_{-k}^+$, а ω_k дается (12.28). После перегруппировки слагаемых это выражение можно компактно записать так:

$$\varphi_1(x,t) = \operatorname{ch}\theta\, \widetilde{\varphi}_1(x,t) - \operatorname{sh}\theta\, \widetilde{\varphi}_2(x,t). \tag{12.102}$$

Аналогично, для левых частиц находим

$$\varphi_2(x,t) = \operatorname{ch}\theta\, \widetilde{\varphi}_2(x,t) - \operatorname{sh}\theta\, \widetilde{\varphi}_1(x,t), \tag{12.103}$$

Как и выше в (12.26), (12.28), тильда в (12.102), (12.103) обозначает представление, в котором гамильтониан диагонален.

Чтобы найти функции Грина с помощью (12.102) и (12.103), заметим следующее. В диагонализованном представлении операторы $\widetilde{\varphi}_1(x,t)$ и $\widetilde{\varphi}_2(x',t')$ коммутируют, и поэтому среднее в (12.47) распадается на произведение средних от экспонент левых и правых величин. Каждое из этих средних практически совпадает с функцией Грина свободных частиц, найденной выше, отличаясь лишь множителями $\operatorname{ch}\theta$ и $\operatorname{sh}\theta$ в показателях экспонент. Поэтому усреднение можно заново не проводить

и сразу записать ответ:

$$G_1(x,t) = (2\pi a)^{\operatorname{ch}^2\theta + \operatorname{sh}^2\theta - 1} \bigl(G_1^0(x,t)\bigr)^{\operatorname{ch}^2\theta} \bigl(G_2^0(x,t)\bigr)^{\operatorname{sh}^2\theta}, \tag{12.104}$$

$$G_2(x,t) = (2\pi a)^{\operatorname{ch}^2\theta + \operatorname{sh}^2\theta - 1} \bigl(G_2^0(x,t)\bigr)^{\operatorname{ch}^2\theta} \bigl(G_1^0(x,t)\bigr)^{\operatorname{sh}^2\theta}. \tag{12.105}$$

Подставляя в (12.104) выражения (12.100) и (12.101) для $G_1^0(x,t)$ и $G_2^0(x,t)$, получаем (12.48).

80 б. Функция Грина при конечной температуре может быть найдена тем же методом, что и функция Грина при $T = 0$. Сначала мы рассмотрим ситуацию, когда взаимодействие отсутствует. После этого соотношения (12.102) и (12.103) позволят связать взаимодействующий и невзаимодействующий случаи.

В отсутствие взаимодействия вычисление производится так. Преобразуем произведение операторов в определении функции Грина (12.47) по формуле (12.97) и усредним получившееся выражение по матрице плотности при конечной температуре. Это усреднение гауссово, поэтому имеем

$$\bigl\langle e^{i\widehat{\varphi}_j(x,t)} e^{-i\widehat{\varphi}_j(0,0)} \bigr\rangle = e^{-\frac{1}{2}\langle (\widehat{\varphi}_j(x,t) - i\widehat{\varphi}_j(0,0))^2 \rangle} e^{\frac{1}{2}[\widehat{\varphi}_j(x,t), \widehat{\varphi}_j(0,0)]}. \tag{12.106}$$

Рассмотрим правые частицы ($j = 1$). Вычисляем среднее в (12.106), пользуясь (12.33):

$$\langle (\widehat{\varphi}_j(x,t) - i\widehat{\varphi}_j(0,0))^2 \rangle = \sum_{k>0} \lambda_k^2 L e^{-ak} (2n_B(k) + 1)\, |e^{ikx(t)} - 1|^2, \tag{12.107}$$

где $x(t) = x - vt$, а $n_B(k)$ — бозевская функция распределения. Коммутатор в правой части (12.106) есть

$$[\widehat{\varphi}_j(x,t), \widehat{\varphi}_j(0,0)] = \sum_{k>0} \lambda_k^2 L e^{-ak} (e^{ikx(t)} - e^{-ikx(t)}). \tag{12.108}$$

Поэтому выражение (12.106) можно переписать в виде e^A, где

$$A = 2\pi \sum_{k>0} \frac{e^{-ak}}{k} \bigl((n_B(k) + 1)\bigl(e^{ikx(t)} - 1\bigr) + n_B(k)\bigl(e^{-ikx(t)} - 1\bigr) \bigr). \tag{12.109}$$

Чтобы найти величину A, разложим функцию распределения в ряд:

$$n_B(k) = \frac{1}{e^{vk/T} - 1} = e^{-bk} + e^{-2bk} + e^{-3bk} + \dots, \quad b = \frac{v}{T}. \tag{12.110}$$

Подставляя (12.110) в (12.109), и интегрируя каждый член ряда (12.110) по отдельности, получаем

$$A = \sum_{m \geqslant 0} \ln \frac{mb + a}{mb + a - ix(t)} + \sum_{m>0} \ln \frac{mb + a}{mb + a + ix(t)}. \tag{12.111}$$

Отсюда, переходя к пределу $a \to 0$, находим

$$e^A = \frac{a}{a - ix(t)} \frac{\pi x(t)/b}{\operatorname{sh}(\pi x(t)/b)} = \frac{\pi i a/b}{\operatorname{sh}(\pi(x(t) + ia)/b)}. \tag{12.112}$$

В результате приходим к следующему выражению для функции Грина:

$$G_1^0(x,t) = \frac{i}{2b \operatorname{sh}(\pi(x - vt + ia)/b)},\ G_2^0(x,t) = -\frac{i}{2b \operatorname{sh}(\pi(x + vt - ia)/b)}. \tag{12.113}$$

(Функция Грина левых частиц получается аналогично.)

Для нахождения функций Грина взаимодействующей системы применим прием, использованный выше при рассмотрении случая $T = 0$. Заметим, что соотношения (12.102), (12.103), дающие правило преобразования операторов фазы $\widehat{\varphi}_{1,2}(x,t)$ при диагонализации гамильтониана (12.19), верны и при $T > 0$. Выражая с помощью (12.102), (12.103) операторы $\widehat{\varphi}_{1,2}(x,t)$ через операторы фазы квазичастиц $\widetilde{\varphi}_{1,2}(x,t)$, подставляем их в определение функции Грина (12.47). При этом вклады $\widetilde{\varphi}_1(x,t)$ и $\widetilde{\varphi}_2(x',t')$ в (12.47) факторизуются. По этой причине, как и выше, каждый из вкладов есть не что иное, как функция Грина свободных частиц, правых или левых, возведенная в степень $\operatorname{ch}^2\theta$ или $\operatorname{sh}^2\theta$, соответственно. В результате находим

$$G_1(x,t) = \frac{1}{2\pi a} \left(\frac{\pi T\, i\widetilde{a}}{\operatorname{sh}(\pi T(x/v' - t + i\widetilde{a}))} \right)^{\operatorname{ch}^2\theta} \left(\frac{\pi T\, i\widetilde{a}}{\operatorname{sh}(\pi T(-x/v' - t + i\widetilde{a}))} \right)^{\operatorname{sh}^2\theta}, \tag{12.114}$$

$$G_2(x,t) = \frac{1}{2\pi a} \left(\frac{\pi T\, i\widetilde{a}}{\operatorname{sh}(\pi T(-x/v' - t + i\widetilde{a}))} \right)^{\operatorname{ch}^2\theta} \left(\frac{\pi T\, i\widetilde{a}}{\operatorname{sh}(\pi T(x/v' - t + i\widetilde{a}))} \right)^{\operatorname{sh}^2\theta}, \tag{12.115}$$

$$v' = \left((2\pi v + g_1)^2 - g_2^2 \right)^{1/2}/2\pi, \quad \widetilde{a} = a/v', \tag{12.116}$$

где, как и в (12.48), v' — скорость квазичастиц, перенормированная взаимодействием, и $\operatorname{th} 2\theta = g_2/(g_1 + 2\pi v)$.

81. Начнем с вывода общего выражения для туннельного тока. Вычисление, которое требуется проделать, отчасти дублирует приведенный в задаче 68 вывод формулы (11.14) для туннельного тока. Однако, поскольку при рассмотрении латтинжеровской жидкости более удобно пользоваться функциями Грина в координатном представлении, а не в импульсном, как в гл. 11, более полезно не переходить в (11.14) от импульсного представления к координатному, а выполнить вычисление заново.

Итак, поданное на туннельный контакт между системами A и B напряжение eV представляет собой разность химических потенциалов: $eV = \mu_B - \mu_A$. Удобно сделать калибровочное преобразование, приводящее гамильтониан к виду $\widehat{\mathscr{H}}_{\text{tot}} = \widehat{\mathscr{H}}_A + \widehat{\mathscr{H}}_B + \widehat{\mathscr{H}}_{\text{tun}}(t)$, где гамильтониан туннелирования явно зависит от времени следующим образом:

$$\widehat{\mathscr{H}}_{\text{tun}}(t) = w\, e^{-ieVt} \psi_B^+ \psi_A \Big|_{x=x_0} + \text{h.c.} \tag{12.117}$$

Оператор туннельного тока определяется как производная по времени от оператора заряда:

$$\widehat{I} = ie\,[\widehat{\mathscr{H}}_{\text{tot}}, \widehat{Q}_A], \quad \widehat{Q}_A = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_A^+(x)\psi_A(x)dx. \tag{12.118}$$

Вычисляя коммутатор в (12.118), получаем

$$\widehat{I} = ie \left(w\, e^{-ieVt} \psi_B^+ \psi_A - w^*\, e^{ieVt} \psi_A^+ \psi_B \right)_{x=x_0}. \tag{12.119}$$

Мы будем искать туннельный ток с помощью теории возмущений по (малой) амплитуде туннелирования w. Поэтому разумно перейти в представление взаимодействия по отношению к «возмущению» $\widehat{\mathscr{H}}_{\text{tun}}(t)$:

$$\langle \widehat{I}(t) \rangle = \langle \widehat{U}^{-1}(t) \widehat{I}(t) \widehat{U}(t) \rangle_0, \quad \widehat{U}(t) = \text{T} \exp\left(-i \int\limits_{-\infty}^{t} \widehat{\mathscr{H}}_{\text{tun}}(t')dt' \right). \tag{12.120}$$

Разлагая $\widehat{U}(t)$ в ряд по степеням w, убеждаемся, что главный вклад дается членом разложения первого порядка. Соответствующий оператор под знаком усреднения $\langle \ldots \rangle_0$ в (12.120) есть

$$e|w|^2 \int\limits_{-\infty}^{t} \Big([\psi_B^+(t')\psi_A(t'), \psi_A^+(t)\psi_B(t)] e^{-ieV(t'-t)} - [\psi_A^+(t')\psi_B(t'), \psi_B^+(t)\psi_A(t)] e^{ieV(t'-t)} \Big) dt' \tag{12.121}$$

Два из четырех слагаемых, получающихся при расписывании коммутаторов в (12.121), можно преобразовать, сделав замену $t - t' \to t' - t$. При этом (12.121) приобретает форму, в которой области $t' < t$ и $t' > t$ оказываются равноправными. В результате выражение для туннельного тока (12.120) приобретает весьма удобный вид:

$$\langle \widehat{I}(t) \rangle = e|w|^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big(K_{BA}(t - t') e^{-ieV(t'-t)} - K_{AB}(t - t') e^{ieV(t'-t)} \Big) dt', \tag{12.122}$$

где

$$K_{BA}(t - t') = \langle \psi_B^+(t')\psi_B(t) \rangle \langle \psi_A(t')\psi_A^+(t) \rangle, \tag{12.123}$$

$$K_{AB}(t - t') = \langle \psi_A^+(t')\psi_A(t) \rangle \langle \psi_B(t')\psi_B^+(t) \rangle. \tag{12.124}$$

Средние в (12.123) берутся соответственно по основным состояниям систем A или B. Отметим, что полученное выражение (12.122) не

зависит от конкретных деталей физики туннелирования и имеет весьма общий характер.

Нас интересует ситуация, когда системы A и B представляют собой латтинжеровские жидкости. Выразим операторы рождения и уничтожения электрона в (12.122) через операторы в бозонном представлении. Для определенности рассмотрим операторы $\psi_A^+(x)$ и $\psi_A(x)$ рождения и уничтожения электрона в системе A. Наиболее общее выражение для этих операторов, справедливое при сколь угодно сильном взаимодействии, имеет следующий вид:

$$\psi_A(x) = \sum_{m-m'=1} A_{m,m'} e^{i(m-m')p_0 x} e^{im\widehat{\varphi}_1(x) + im'\widehat{\varphi}_2(x)}, \tag{12.125}$$

$$\psi_A^+(x) = \sum_{m-m'=1} A_{m,m'}^* e^{-i(m-m')p_0 x} e^{-im\widehat{\varphi}_1(x) - im'\widehat{\varphi}_2(x)}. \tag{12.126}$$

Физический смысл этого выражения в том, что туннелирующий в систему A электрон описывается суперпозицией нескольких возможных состояний. Электрон может превратиться в правую или в левую частицу, а может — в две правых частицы и левую дырку, и т. п. Ниже мы рассмотрим задачу, не учитывая вклады составных операторов. Будем считать, что $\psi_A(x) = (2\pi a)^{-1/2} e^{i\widehat{\varphi}_1(x)}$, $\psi_A^+(x) = (2\pi a)^{-1/2} e^{-i\widehat{\varphi}_1(x)}$. Как будет видно из дальнейшего, решение без труда обобщается на более сложные случаи.

Корреляционные функции операторов $e^{\pm i\widehat{\varphi}_1(x)}$ при произвольной температуре были найдены в задаче 80. Рассмотрим сначала более простой случай $T = 0$. Подставляя выражение (12.48) для функций Грина в (12.123), находим

$$K_{BA}(t-t') = (2\pi a)^{-2} \left(\frac{\widetilde{a}}{\widetilde{a} - i(t'-t)} \right)^{\alpha}, \quad K_{AB}(t-t') = K_{BA}(t'-t), \tag{12.127}$$

где

$$\widetilde{a} = \frac{a}{v_F} \quad \text{и} \quad \alpha = 2(1 + \operatorname{sh}^2\theta_A + \operatorname{sh}^2\theta_B). \tag{12.128}$$

Выражение (12.123) удобно вычислить с помощью известного представления гамма-функции:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{(a+it)b} (a+it)^{-z}\, dt = 2\pi \frac{b^{z-1}}{\Gamma(z)}, \tag{12.129}$$

верного при $b > 0$ и $z > 0$. Находим, что при $V > 0$ вклад в интеграл по времени в (12.123) дает только первый член, а при $V < 0$ — только второй член. Соответственно, туннельный ток есть

$$I = e|w|^2 \frac{\widetilde{a}^{\alpha}}{2\pi a^2 \Gamma(\alpha)} \begin{cases} (eV)^{\alpha-1} & \text{при } V > 0, \\ -(-eV)^{\alpha-1} & \text{при } V < 0. \end{cases} \tag{12.130}$$

Получаем, что туннельный ток при $T = 0$ есть степенная функция $I \propto V^{\alpha-1}$, причем показатель степени зависит от силы взаимодействия

в системах A и B. Отметим также, что в случае невзаимодействующих фермионов, когда $\theta_A = \theta_B = 0$ и $\alpha = 2$, для туннельного тока выполняется закон Ома $I \propto V$, как и следовало.

При конечной температуре $T > 0$ корреляционные функции операторов $e^{\pm i\widehat{\varphi}_1(x)}$ даются выражениями (12.114). При этом

$$K_{BA}(t-t') = (2\pi a)^{-2} \left(\frac{\pi T i\widetilde{a}}{\operatorname{sh}(\pi T(t'-t) + iT\widetilde{a})} \right)^{\alpha}, \qquad K_{AB}(t-t') = K_{BA}(t'-t). \tag{12.131}$$

Интеграл по времени в первом слагаемом (12.123) удобно преобразовать, сдвинув контур интегрирования по t' в комплексную плоскость. Выберем новый контур так: $\pi T(t'-t) = u + i\pi/2$, где u вещественно и $-\infty < u < \infty$. Сдвигая контур таким образом, мы не задеваем особенностей интегрируемого выражения и, значит, значение интеграла при этом не меняется. Переходя к интегрированию по u, получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\pi T i\widetilde{a}}{\operatorname{sh}(\pi T(t'-t) + i\widetilde{a})} \right)^{\alpha} e^{-ieV(t'-t)}\, dt' = \frac{e^{eV/2T}}{\pi T} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\pi T\widetilde{a}}{\operatorname{ch} u} \right)^{\alpha} e^{-i(eV/\pi T)u}\, du. \tag{12.132}$$

Второе слагаемое в (12.123) имеет особенность по другую сторону от вещественной оси. Поэтому в данном случае, чтобы не задеть особенностей интегрируемого выражения, надо сдвинуть контур в другую сторону: $\pi T(t'-t) = u - i\pi/2$, где $-\infty < u < \infty$. Как нетрудно видеть, это приводит к выражению, получающемуся из (12.132) заменой $V \to -V$.

Интеграл по u в правой части (12.132) сводится к известному интегралу

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ibu}}{\operatorname{ch}^{\alpha} u}\, du = 2^{\alpha-1} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(\alpha + ib)\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}(\alpha - ib)\right)}{\Gamma(\alpha)}. \tag{12.133}$$

Вычитая друг из друга найденные таким способом вклады первого и второго членов (12.123), получаем окончательное выражение для туннельного тока:

$$I = \frac{e|w|^2}{(2\pi a)^2} \frac{(2\pi T\widetilde{a})^{\alpha}}{\pi T} \operatorname{sh}\left(\frac{eV}{2T}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\left(\alpha + i\frac{eV}{\pi T}\right)\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\left(\alpha - i\frac{eV}{\pi T}\right)\right)}{\Gamma(\alpha)}. \tag{12.134}$$

Это выражение обобщает найденную выше зависимость $I \propto V^{\alpha-1}$, имеющую место при $T = 0$, на случай произвольной температуры.

С помощью (12.134) нетрудно рассмотреть предельные случаи высокой и низкой (по сравнению с eV) температуры:

$$I \propto \begin{cases} T^{\alpha-2}V & \text{при } eV \ll T, \\ V^{\alpha-1} & \text{при } eV \gg T. \end{cases} \tag{12.135}$$

Таким образом, при конечной температуре и достаточно малом eV имеет место закон Ома. Для наблюдения неомического поведения туннельного тока, характерного для латтинжеровской жидкости, требуется, чтобы выполнялось соотношение $eV \geqslant \alpha\pi T$.

82. Функции Грина в отсутствие взаимодействия имеют вид

$$G_{1,2}(\varepsilon, p) = \frac{1}{i\varepsilon \mp v_F p}, \tag{12.136}$$

где знаки «$-$» и «$+$» соответствуют правым и левым частицам.

Будем считать взаимодействие слабым и применим теорию возмущений для отыскания собственно-энергетической части $\Sigma_{1,2}(i\varepsilon, p)$. Вклады первого порядка по взаимодействию сводятся к сдвигу химического потенциала и перенормировке скорости v_F, и поэтому интереса не представляют.

Рассмотрим вклады в собственно-энергетическую часть, возникающие во втором порядке по взаимодействию. Для правых частиц имеются три различные вклада, дающиеся диаграммами, изображенными на рис. 12.1.

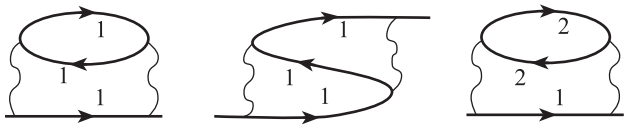

Рис. 12.1

Нетрудно видеть, что первый и второй графики, описывающие рассеяния правых частиц друг на друге, отличаются лишь знаками и поэтому сокращаются. Остается третий график, описывающий рассеяние правых частиц на левых. Соответствующее выражение имеет вид

$$\Sigma_1(\varepsilon, p) = g_2^2 \iint \Pi_2(\omega, k) G_1^0(\omega + \varepsilon, k + p) \frac{dk\,d\omega}{(2\pi)^2}, \tag{12.137}$$

где

$$\Pi_2(\omega, k) = \iint G_2(\varepsilon'_+, p'_+) G_2(\varepsilon'_-, p'_-) \frac{dp'\,d\varepsilon'}{(2\pi)^2} = \tag{12.138}$$

$$= \int \frac{n(p'_-) - n(p'_+)}{i\omega + v_F k} \frac{dp'}{2\pi} = -\frac{k}{2\pi(i\omega + v_F k)} \tag{12.139}$$

— поляризационный оператор левых частиц ($\varepsilon'_\pm = \varepsilon' \pm \omega/2$, $p'_\pm = p \pm \pm k/2$).

Подставляя выражение для $\Pi_2(\omega, k)$ в (12.137), вычисляем интеграл по ω и получаем

$$\Sigma_1(i\varepsilon, p) = \frac{g_2^2}{(2\pi)^2} \int\limits_{-k_{\max}}^{k_{\max}} \Big(n(-k) - n(k+p)\Big) \frac{k\,dk}{i\varepsilon - v_F(2k+p)}. \tag{12.140}$$

Мы ввели конечные пределы интегрирования $-k_{\max} < k < k_{\max}$ в выражение (12.140), чтобы иметь возможность регуляризовать расходящийся интеграл по k.

Рассмотрим по отдельности вклады в интеграл (12.140) от двух слагаемых в интегрируемом выражении. Слагаемое с $n(-k)$ приводит к интегралу по области $0 < k < k_{\max}$, а слагаемое с $n(k+p)$ — по области $-k_{\max} < k < -p$. После сдвига переменной $k \to k - p$ во втором интеграле получаем

$$\int\limits_0^{k_{\max}} \frac{k\,dk}{i\varepsilon - v_F(2k+p)} - \int\limits_{-k_{\max}-p}^{0} \frac{(k-p)\,dk}{i\varepsilon - v_F(2k-p)}. \tag{12.141}$$

Теперь вычисляем оба интеграла и оставляем только сингулярные при $\varepsilon,\ p \to 0$ члены. (Несингулярные члены дают обычные ферми-жидкостные перенормировки и поэтому интереса не представляют.) Результат имеет вид

$$\Sigma_1(i\varepsilon, p) = -\frac{g_2^2}{(4\pi v_F)^2}(i\varepsilon - v_F p)\left(\ln\frac{2v_F k_{\max}}{-(i\varepsilon - v_F p)} + \ln\frac{2v_F k_{\max}}{i\varepsilon + v_F p}\right) =$$

$$= -\frac{g_2^2}{(4\pi v_F)^2}(i\varepsilon - v_F p)\ \ln\frac{4v_F^2 k_{\max}^2}{\varepsilon^2 + v_F^2 p^2}. \tag{12.142}$$

Логарифмическая особенность (12.142) показывает, что уже во втором порядке теории возмущений ферми-жидкостное поведение функции Грина разрушается.

Из приведенного вычисления видно, что логарифмическая расходимость во втором порядке теории возмущений есть чисто одномерный эффект. В размерности $D > 1$ процессы рассеяния ферми-частиц друг на друге, подобные изображенным на рис. 12.1, дают вклад в $\Sigma(\varepsilon, p)$ аналогичный (12.137). Однако, сингулярность поляризационного оператора $\Pi(\omega, k)$ при $\omega,\ k \to 0$ оказывается не такой сильной, как у выражения (12.138). (Это видно, например, из трехмерного выражения (8.47), найденного в задаче 44а.) По этой причине при $D > 1$ диаграммы, описывающие рассеяние частиц, не приводят к расходимостям, и теория ферми-жидкости оказывается устойчивой конструкцией.