Глава 11
ИЗМЕРЕНИЕ ФУНКЦИЙ ГРИНА

Одночастичные и двухчастичные функции Грина представляют собой корреляционные функции операторов $\widehat{\psi}$ и $\widehat{\psi}^+$ (см. гл. 4). Физические характеристики, такие, как теплоемкость, проводимость, и др., в принципе всегда можно выразить через гриновские функции. Однако эта связь довольно часто оказывается весьма сложной и «односторонней», поскольку она вообще говоря не позволяет восстановить функции Грина по экспериментальным данным. (Например, термодинамические величины даются интегралами от выражений, содержащих функции Грина, — см. задачи 35, 36, 49, 60.) Поэтому представляет интерес обсудить методы, позволяющие напрямую «измерять» функции Грина и получать информацию о свойствах систем взаимодействующих частиц, которую можно легко интерпретировать теоретически.

11.1. Туннелирование

Рассмотрим сначала вопрос об измерении одночастичной функции Грина

$$G(x, x') = -i \left\langle \mathrm{T}\, \psi(x)\psi^+(x') \right\rangle . \tag{11.1}$$

Для определенности будем говорить о гриновской функции электрона в металле. На первый взгляд, эксперимент, в котором корреляционная функция $G(x, x')$ определялась бы напрямую, кажется невозможным. Ведь пропорциональное $\widehat{\psi}^+$ или $\widehat{\psi}$ поле к системе приложить невозможно (для этого нужно было бы создать электрон «из ничего»), и поэтому корреляционная функция $G(x, x')$ не может быть связана ни с какой функцией отклика. Можно, однако, рассмотреть ситуацию, когда происходит перенос электронов из одного металла (который мы будем называть «пробником») в другой (исследуемый образец). Если перенос заряда происходит мгновенно, то его можно описывать как уничтожение электрона в пробнике и рождение его в образце. Вероятность этого процесса оказывается связанной с функциями Грина исследуемого образца и пробника. Если свойства пробника известны и достаточно просты, то можно считать, что в таком эксперименте «измеряется» функция Грина электрона в образце.

Для того чтобы реализовать эту идею, нужно создать такую связь между пробником и образцом, чтобы переносимый электрон в каждый момент времени был или на пробнике, или на образце. (Иначе говоря, заряды пробника и образца должны быть хорошими квантовыми числами.) Это означает, что связь пробника с образцом должна быть слабой, и поэтому обычный омический контакт между двумя металлами не годится. Слабую связь можно получить, используя туннельный эффект. Рассмотрим так называемый *туннельный контакт* — два металла, разделенных потенциальным барьером, так что область между металлами оказывается классически запрещенной (рис. 11.1). На практике в качестве потенциального барьера обычно используется тонкий слой диэлектрика, например, окисла, образующегося на поверхности металла. На рис. 11.2 показано заполнение энергетических уровней по обе стороны контакта и распределение потенциала в случае, когда к контакту приложено постоянное напряжение V.

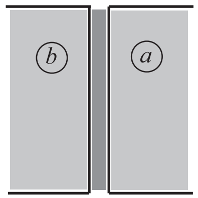

Рис. 11.1

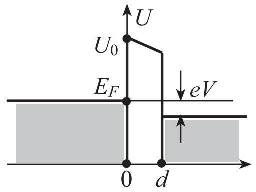

Рис. 11.2

Электроны могут туннелировать из одного металла в другой, причем прозрачность туннельного барьера, согласно формуле ВКБ, является экспоненциальной функцией

$$W \approx e^{-\mathscr{A}}, \quad \mathscr{A} = \sqrt{2mU_0}\,\frac{d}{\hbar}, \tag{11.2}$$

где U_0 — высота потенциального барьера, а d — его толщина. Если прозрачность W мала, то такой туннельный контакт обеспечивает слабую связь между двумя металлами.

В равновесии вероятности перехода электронов справа налево и слева направо равны, и ток через контакт отсутствует. Однако если к туннельному контакту приложить разность потенциалов, выводящую систему из равновесия, через контакт потечет ток. измеряя который можно определить вероятность туннелирования и, как следствие, функцию Грина.

Перейдем к количественному описанию туннелирования. Поскольку вероятность прохождения через высокий барьер экспоненциально мала, то можно вначале рассмотреть задачу, пренебрегая туннельными эффектами, а затем учесть их по теории возмущений. Пусть $\psi_{a(b)}(\mathbf{r})$ — оператор рождения электрона соответственно на пробнике или на образце в отсутствие туннелирования. Рассматривая туннелирование как мгновенный перенос заряда, можно записать гамильтониан для туннелирования следующим образом:

$$\widehat{H}_T = \int\limits_{x<0}\int\limits_{x'>d} \big(T(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,\psi_a^+(\mathbf{r}')\psi_b(\mathbf{r}) + \text{h.c.}\big)\; d^3\mathbf{r}'\, d^3\mathbf{r} \tag{11.3}$$

Интегрирование по $\mathbf{r}$ в этой формуле производится по левому берегу, а интегрирование по $\mathbf{r}'$ — по правому. Туннельный гамильтониан вида (11.3) можно вывести [1)] в пределе бесконечно тонкого и очень высокого барьера. При этом выражение (11.3) обычно используется и в более общем случае как наиболее простая формула, правильно отражающая физику в пределе малой амплитуды туннелирования $T(\mathbf{r},\mathbf{r}')$.

Перейдем в представление собственных состояний $\psi_{a,\mathbf{p}}$, $\psi_{b,\mathbf{p}'}$:

$$\psi_a(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{p}} \psi_{a,\mathbf{p}}(\mathbf{r})\,\widehat{a}_{\mathbf{p}}, \quad \psi_b(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{p}'} \psi_{b,\mathbf{p}'}(\mathbf{r})\,\widehat{b}_{\mathbf{p}'}. \tag{11.5}$$

Собственные состояния в (11.5) вдали от барьера представляют собой линейные комбинации двух плоских волн, падающей и отраженной, удовлетворяющие граничным условиям на поверхности барьера. В представлении (11.5) туннельный гамильтониан принимает вид

$$H_T = \sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} T_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}\,\widehat{a}_{\mathbf{p}}^+\widehat{b}_{\mathbf{p}'} + \text{h.c.} \tag{11.6}$$

Следует иметь в виду, что нередко отражением от барьера пренебрегают и заменяют истинные собственные состояния в (11.5) на плоские волны. Хотя такое приближение на первый взгляд кажется весьма грубым, оно оказывается вполне достаточным для описания эффектов, в которых существенны только состояния с энергиями вблизи E_F. Более аккуратное рассмотрение приводит к более сложным выражениям, с которыми труднее работать. Согласие же с экспериментом, и без того обычно неплохое, при этом практически не улучшается.

Зависимость амплитуды туннелирования $T_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$ от импульсов $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}'$ в общем случае может оказаться довольно сложной. Обычно рассматривают две основные модели, соответствующие «шероховатому» и «гладкому» барьерам. В первом случае, поскольку вероятность туннелирования (11.2) экспоненциально зависит от толщины барьера, основной вклад в туннельный ток вносится тем местом, где барьер наиболее тонок и где поэтому вероятность туннелирования наибольшая. Обычно можно считать, что туннелирование происходит в какой-то определенной точке барьера. Амплитуда туннелирования $T_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$ в этом случае есть константа, не зависящая от $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$. Другая ситуация возникает в случае достаточно гладкого барьера, имеющего постоянную толщину. При туннелировании через такой барьер должна сохраняться

[1)] В случае бесконечно высокого и тонкого барьера с резкими краями, находящегося в плоскости $x=0$, граничные условия в отсутствие туннелирования имеют вид: $\psi_a(x=+0)=0$, $\psi_b(x=-0)=0$. При этом туннельный гамильтониан есть

$$\widehat{H}_T = -\int\limits_{x=0} dydz\; T(y,z)\,\frac{\partial}{\partial x}\psi_a^+(\mathbf{r})\Big|_{x=+0}\,\frac{\partial}{\partial x}\psi_b(\mathbf{r})\Big|_{x=-0} + \text{h.c.} \tag{11.4}$$

где $T(y,z)$ — прозрачность барьера, являющаяся в общем случае функцией координат.

компонента импульса электрона вдоль барьера $\mathbf{p}_{\|}$. Поэтому в данном случае амплитуда туннелирования имеет вид $T_{\mathbf{pp}'} = \widetilde{T}_{\mathbf{p}_\perp \mathbf{p}'_\perp}\delta(\mathbf{p}_{\|} - \mathbf{p}'_{\|})$. В этой главе мы будем рассматривать более часто встречающийся случай шероховатого барьера и соответственно считать амплитуду туннелирования константой: $T_{\mathbf{pp}'} = T_0$.

Теперь найдем оператор туннельного тока. Полный гамильтониан системы есть

$$\widehat{H} = \widehat{H}_1(\widehat{a}_\mathbf{p}, \widehat{a}^+_\mathbf{p}) + \widehat{H}_2(\widehat{b}_\mathbf{p}, \widehat{b}^+_\mathbf{p}) + \widehat{H}_T, \tag{11.7}$$

где $\widehat{H}_{1(2)}$ — гамильтонианы соответственно пробника и образца. При этом $\widehat{H}_1$ и $\widehat{H}_2$ сохраняют заряд каждого из берегов контакта, а $\widehat{H}_T$ приводит к переносу заряда. Запишем скорость изменения заряда пробника, используя уравнения эволюции в представлении Гейзенберга:

$$\dot{\widehat{Q}}_a = i[\widehat{H}, \widehat{Q}_a], \quad \widehat{Q}_a = e\sum_\mathbf{p} \widehat{a}^+_\mathbf{p}\widehat{a}_\mathbf{p}. \tag{11.8}$$

Нетрудно видеть, что вклад в коммутатор (11.8) дает только $\widehat{H}_T$. Определяя оператор тока $\widehat{I}$ как скорость изменения заряда и вычисляя коммутатор $[\widehat{H}, \widehat{Q}_a]$, получаем

$$\widehat{I} = \dot{\widehat{Q}}_a = ie\sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} T_{\mathbf{pp}'}\widehat{a}^+_\mathbf{p}\widehat{b}_{\mathbf{p}'} + \text{h.c.} \tag{11.9}$$

Чтобы найти средний по времени туннельный ток, нужно вычислить среднее от оператора (11.9) по состоянию, в котором химические потенциалы берегов различаются на eV, где V — приложенное к контакту напряжение. Это состояние — неравновесное, поэтому усреднение по нему нельзя выполнять с помощью обычной равновесной диаграммной техники. Можно однако воспользоваться полезным стандартным приемом, позволяющим перейти к эквивалентной задаче, в которой усреднение выполняется по равновесному состоянию. Для этого рассмотрим калибровочное преобразование

$$\widehat{a}_\mathbf{p} \to \widehat{a}_\mathbf{p} e^{ieVt}, \quad \widehat{b}_{\mathbf{p}'} \to \widehat{b}_{\mathbf{p}'}, \tag{11.10}$$

сдвигающее энергии всех состояний справа на $-eV$ и выравнивающее таким образом химические потенциалы. После этого преобразования туннельный гамильтониан принимает вид

$$H_T = \widehat{X}e^{ieVt} + \widehat{X}^+ e^{-ieVt}, \tag{11.11}$$

где

$$X = \sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} T_{\mathbf{pp}'}\widehat{a}^+_\mathbf{p}\widehat{b}_{\mathbf{p}'}. \tag{11.12}$$

Туннельный ток в этом представлении равен

$$\widehat{I} = i\widehat{X}e^{ieVt} - i\widehat{X}^+ e^{-ieVt}. \tag{11.13}$$

Таким образом, после калибровочного преобразования (11.10) мы получили зависящее от времени возмущение, действующее на равновесное состояние. Это означает, что с формальной точки зрения задача о вычислении туннельного тока сводится к вычислению отклика зависящего от времени оператора туннельного тока (11.13) на «внешнее поле», пропорциональное туннельному оператору (11.12), причем разность потенциалов eV играет роль частоты «внешнего поля». Соответствующая диаграмма приведена на рис. 11.3. Кружком обозначен оператор туннелирования $\widehat{X}$. Вычисление функции отклика (см. задачу 68) приводит к такому выражению для туннельного тока:

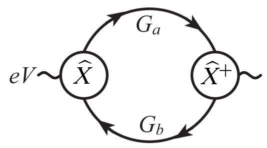

Рис. 11.3

$$I(V) = 4e\sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} |T_{\mathbf{pp}'}|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} G^R_a(\mathbf{p}, \varepsilon + eV)\, \operatorname{Im} G^R_b(\mathbf{p}', \varepsilon)\, \times \\ \times [n_F(\varepsilon) - n_F(\varepsilon + eV)]\,\frac{d\varepsilon}{\pi}, \tag{11.14}$$

где $n_F(\varepsilon)$ — фермиевская функция распределения, а $G^R_{a(b)}(\mathbf{p}, \varepsilon)$ — фурье-образ запаздывающей функции Грина

$$G^R_a(\mathbf{p}, \varepsilon) = -i\int_0^\infty \langle [a^+_\mathbf{p}(t), a_\mathbf{p}(0)]\rangle\, e^{i\varepsilon t}\, dt. \tag{11.15}$$

Для модели шероховатого барьера $T_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} = T_0$, и результат (11.14) принимает вид

$$I(V) = 4\pi e|T_0|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \nu_a(\varepsilon + eV)\nu_b(\varepsilon)\,(n_F(\varepsilon) - n_F(\varepsilon + eV))\, d\varepsilon, \tag{11.16}$$

где

$$\nu_{a(b)}(\varepsilon) = -\frac{1}{\pi}\sum_\mathbf{p} \operatorname{Im} G^R_{a(b)}(\mathbf{p}, \varepsilon) \tag{11.17}$$

— так называемая *туннельная (или одночастичная) плотность состояний*. Происхождение этого названия становится яснее, если рассмотреть туннелирование между двумя металлами, пренебрегая эффектами взаимодействия. Тогда скорость перехода из пробника в образец можно найти по золотому правилу Ферми:

$$w_{a\to b} = \frac{2\pi}{\hbar}|T_0|^2\nu_b(\varepsilon), \tag{11.18}$$

где $\nu_b(\varepsilon)$ — плотность состояний в образце. Суммируя по всем заполненным состояниям в пробнике, получаем ток, текущий из пробника в образец:

$$I_{a\to b} = \frac{2\cdot 2\pi e}{\hbar}|T_0|^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \nu_a(\varepsilon+eV)\nu_b(\varepsilon)\, n_F(\varepsilon)(1-n_F(\varepsilon+eV))\; d\varepsilon \tag{11.19}$$

(коэффициент 2 учитывает спиновое вырождение, а множитель $1 - n_F(\varepsilon+eV)$ возникает вследствие принципа Паули). Аналогично, ток из образца в пробник равен

$$I_{b\to a} = \frac{2\cdot 2\pi e}{\hbar}|T_0|^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \nu_a(\varepsilon+eV)\nu_b(\varepsilon)\, n_F(\varepsilon+eV)(1-n_F(\varepsilon))\, d\varepsilon. \tag{11.20}$$

Вычисляя суммарный ток $I = I_{a\to b} - I_{b\to a}$, получаем соотношение (11.16). Выражение туннельного тока через плотность состояний в отсутствие взаимодействия оказывается точно таким же, как и во взаимодействующей системе, если плотность состояний $\nu(\varepsilon)$ определена с помощью соотношения (11.17).

Заметим, что туннельная плотность состояний (11.17), вообще говоря, отличается от *термодинамической плотности состояний*

$$\widetilde{\nu}(\varepsilon) = \left.\frac{\partial n}{\partial \mu}\right|_{\mu=\varepsilon}, \tag{11.21}$$

которая определяет сжимаемость системы в равновесии. В отличие от туннельной плотности состояний, термодинамическая плотность состояний учитывает равным образом все состояния в системе, независимо от степени их одно– или многочастичности. Только в невзаимодействующей системе туннельная и термодинамическая плотности состояний совпадают, поскольку в этом случае многочастичные состояния есть простые комбинации одночастичных (слэтеровские детерминанты). Во взаимодействующей же системе это не так, и поэтому $\nu(\varepsilon) \neq \widetilde{\nu}(\varepsilon)$.

По одночастичной плотности состояний (11.17), найденной из туннельных измерений, можно в принципе восстановить функцию Грина, используя соотношения типа Крамерса–Кронига. Туннельные измерения, таким образом, предоставляют важную информацию о системе взаимодействующих частиц, которую трудно получить другими методами. Особенность процесса туннелирования, как уже отмечалось, заключается в том, что при туннелировании из системы вырывается электрон, в то время как при измерении таких величин, как проводимость, теплоемкость или сжимаемость, происходит лишь перераспределение квазичастиц внутри системы. Поскольку квазичастицы в основном ведут себя подобно невзаимодействующим частицам, такие методы оказываются относительно менее чувствительны к эффектам взаимодействия. При туннелировании же отличие квазичастиц от реальных частиц оказывается весьма существенным. Поэтому иногда говорят, что туннельное измерение показывает в какой мере квазичастицы во взаимодействующей системе отличаются от «голых» электронов.

Одночастичную функцию Грина можно определить не только из туннельных экспериментов, но и из некоторых других, например оптических. При поглощении оптического фотона в кристалле происходит практически мгновенный переход электрона с одной ветви электронного спектра на другую. Этот процесс можно описать как рождение электрона в одной энергетической зоне и одновременное уничтожение в другой.

Так, скажем, при оптическом переходе в собственном полупроводнике электрон поглощает энергию, бóльшую энергии запрещенной зоны, и при этом переходит из (заполненной) валентной зоны в (пустую) зону проводимости. При этом валентная зона играет роль пробника, а зона проводимости — роль исследуемого образца. Вероятность поглощения выражается через одночастичные функции Грина в каждой из двух зон точно таким же образом, как это было проделано выше для вероятности туннелирования. При этом амплитуда туннелирования $T_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}$ заменяется на амплитуду перехода в присутствии внешнего электромагнитного поля, а энергия eV — на энергию квантов поля $\hbar\omega$. Единственное отличие — δ-функционная зависимость амплитуды $T_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}$ от переданного импульса $\mathbf{p}'-\mathbf{p}$, отражающая сохранение импульса при поглощении фотона. В общем случае $T_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} = \widetilde{T}_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}\delta(\mathbf{p}'-\mathbf{p}-\mathbf{k})$, где $\mathbf{k}$ — импульс фотона, а $\widetilde{T}_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}$ — матричный элемент дипольного момента между начальным и конечным состояниями. Исследование спектра поглощения, т. е. зависимости интенсивности поглощения от частоты фотонов, позволяет определить функцию Грина электрона в зоне проводимости и дает полезную информацию о динамике электрона.

Отметим также, что факторизация вероятности туннелирования в произведение туннельных плотностей состояний образца и пробника имеет место далеко не всегда. Изложенная теория туннелирования, как нетрудно видеть, существенным образом опирается на предположение о независимости динамики в исследуемом образце и в пробнике. В случае же когда в системе имеется взаимодействие с радиусом, превышающим толщину барьера, это предположение, вообще говоря, несправедливо. Наиболее опасным в этом смысле как правило является кулоновское взаимодействие, приводящее к притяжению протуннелировавшего заряда и оставшейся на другом берегу дырки. В результате этого динамика электрона и дырки становится скоррелированной, что меняет вероятность туннелирования и усложняет интерпретацию результатов. Точно такие же оговорки, причем еще даже в большей степени, относятся к оптическому поглощению. В этом случае взаимодействие может привести к образованию экситона — связанного водородоподобного состояния, поглотившего фотон электрона и дырки в исходной зоне. При этом спектр поглощения оказывается определенной комбинацией вкладов свободных электронов и дырок, а также их связанных состояний. Эффекты подобного рода имеют место не только в полупроводниках, но и в металлах. Например, экситонные корреляции в конечном состоянии оказываются существенными при анализе спектра рентгеновского поглощения в металле (см. задачу 79).

11.2. Неупругое рассеяние

Двухчастичная функция Грина в общем случае зависит от четырех аргументов:

$$K(x_1, x_2, x_3, x_4) = \langle \mathrm{T}\, \psi(x_1)\psi^+(x_3)\psi(x_2)\psi^+(x_4)\rangle. \qquad (11.22)$$

Измерить такую функцию было бы непросто, однако это обычно и не требуется. Достаточно интересную информацию можно извлечь из функции (11.22) в случае, когда ее аргументы попарно совпадают, $x_1 = x_3$, $x_2 = x_4$. Эта функция представляет собой коррелятор плотности

$$\mathcal{K}(x_1, x_2) = \langle \mathrm{T}\, \widehat{\rho}(x_1)\widehat{\rho}(x_2)\rangle, \quad \widehat{\rho}(x) = \psi^+(x)\psi(x). \qquad (11.23)$$

Непосредственно измеряемой величиной является связанная с (11.23) запаздывающая корреляционная функция

$$\mathcal{K}^R(x_1,\, x_2) = \begin{cases} i\left\langle \left[\widehat{\rho}(\mathbf{r}_1, t_1),\ \widehat{\rho}(\mathbf{r}_2, t_2)\right]\right\rangle & \text{при} \ \ t_1 > t_2, \\ 0 & \text{при} \ \ t_1 < t_2. \end{cases} \qquad (11.24)$$

Функцию (11.24) можно измерить, исследуя рассеяние на изучаемой системе пучка каких-либо пробных частиц (обычно нейтронов или фотонов). В этом разделе мы изложим основные факты, относящиеся к теории рассеяния частиц в коденсированных средах, а в задачах 72, 73 и 74 приведем соответствующие примеры.

Имеется два основных вида процессов рассеяния, представляющих интерес: *упругое* и *неупругое* рассеяние. Упругое рассеяние широко используется для изучения кристаллической структуры твердых тел, и поэтому этот вид рассеяния весьма важен с прикладной точки зрения. Неупругое рассеяние обычно используется для исследования элементарных возбуждений в кристаллах, жидкостях и других системах, и нас будет интересовать именно этот вид рассеяния. Вероятность неупругого рассеяния пробной частицы на атомах какой-либо среды с передачей среде энергии $\omega = E - E'$ и импульса $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ оказывается пропорциональной мнимой части фурье-образа функции (11.24),

$$\mathcal{K}^R(\omega, \mathbf{q}) = \int \mathcal{K}^R(x_1, x_2) e^{i\omega t_{12} - i\mathbf{q}\mathbf{r}_{12}}\, dt_{12} d^3\mathbf{r}_{12}, \qquad (11.25)$$

где $t_{12} = t_1 - t_2$, $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$.

Вид частиц, используемых в эксперименте, а также выбор их энергии E определяется тем, в какой области ω и $\mathbf{q}$ функция (11.25) представляет наибольший интерес. При этом следует иметь в виду, что энергии E и E' частиц до и после рассеяния связаны с их импульсами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$ дисперсионным соотношением. (Например для нейтронов $E = \mathbf{k}^2/2m_\mathrm{n}$, $E' = \mathbf{k}'^2/2m_\mathrm{n}$, где m_n — масса нейтрона, а для фотонов $E = \hbar c|\mathbf{k}|$, $E' = \hbar c|\mathbf{k}'|$, где c — скорость света.) Поэтому, вообще говоря, при фиксированной энергии частиц E можно исследовать только определенную область ω и $\mathbf{q}$.

Теоретическое описание рассеяния частиц разного вида оказывается практически одинаковым. Ниже мы будем для определенности говорить о рассеянии нейтронов. Нейтроны удобно использовать в качестве пробных частиц при исследовании динамики атомов или ядер, поскольку они взаимодействуют с ядрами контактно. Рассеяние нейтронов с не слишком большой энергией на ядрах происходит преимущественно в s-канале, вследствие чего реальный довольно сложный потенциал взаимодействия нейтрона с ядром можно заменить[2] на так называемый «псевдопотенциал» Ферми

$$V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{2\pi\hbar^2 a}{\mu}\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad \mu = \frac{m_\mathrm{n} m}{m + m_\mathrm{n}}, \qquad (11.26)$$

где a — длина рассеяния нейтрона на ядре, μ — приведенная масса, m и m_n — массы ядра и нейтрона соответственно. Коэффициент в псевдопотенциале (11.26) подобран так, что сечение рассеяния нейтрона на одном ядре равно $4\pi a^2$, как и должно быть при полностью изотропном s-рассеянии.

Взаимодействие нейтрона с атомами какой-либо среды, скажем жидкости, можно выразить через оператор плотности частиц среды $\widehat{\rho}(\mathbf{r}, t)$. Контактное взаимодействие (11.26) означает, что оператор взаимодействия нейтрона с системой есть

$$\widehat{\mathcal{H}}_\mathrm{int} = \frac{2\pi a\hbar^2}{\mu} \widehat{\rho}(\widehat{\mathbf{R}}, t), \qquad (11.27)$$

где $\widehat{\mathbf{R}}$ — координата нейтрона[3]. Можно показать (см. задачу 72), что сечение неупругого рассеяния нейтронов с передачей среде энергии ω и импульса $\mathbf{q}$ выражается через мнимую часть коррелятора плотности (11.25) следующим образом:

$$\frac{d\sigma(\omega, \mathbf{q})}{d\omega\, do'} = \mathrm{const} \cdot \frac{\mathrm{Im}\, \mathcal{K}^R(\omega, \mathbf{q})}{1 - e^{-\beta\omega}}, \qquad (11.28)$$

где do' — элемент телесного угла рассеяния. Величина

$$S(\omega, \mathbf{q}) = 2\, \mathrm{Im}\, \mathcal{K}^R(\omega, \mathbf{q}) \qquad (11.29)$$

называется *структурным фактором* неупругого рассеяния.

Наибольший интерес обычно представляют полюсы двухчастичной функции Грина, поскольку они определяют спектр коллективных возбуждений системы $\omega = \omega_0(\mathbf{q}) - i\gamma(\mathbf{q})$. При малой величине затухания $\gamma(\mathbf{q}) \ll \omega_0(\mathbf{q})$, полюсу двухчастичной функции Грина соответствует узкий пик в структурном факторе $S(\omega, \mathbf{q})$ при $\omega \approx \omega_0(\mathbf{q})$, имеющий

[2] Метод псевдопотенциала в теории рассеяния рассмотрен в [2], § 151.

[3] Мы рассматриваем среду, на которой происходит рассеяние, в гейзенберговском представлении, а нейтрон — в шредингеровском. Такое смешанное представление удобно тем, что в нем нейтрон рассеивается на зависящем от времени потенциале, создаваемом флуктуациями плотности системы.

ширину порядка $\gamma(\mathbf{q})$. Положения пиков в $S(\omega, \mathbf{q})$ «прорисовывают» ветви спектра коллективных возбуждений жидкости. Иллюстрирующие это обстоятельство примеры будут рассмотрены в задачах 73б и 74.

Неупругое рассеяние является практически единственным методом, дающим информацию о коллективных возбуждениях с волновыми векторами $\mathbf{q}$ порядка обратного расстояния между частицами. Например, гипотеза о существовании ротонов в сверхтекучем гелии была проверена именно с помощью измерений структурного фактора. При этом спектр возбуждений при достаточно малых ω и $\mathbf{q}$ обычно можно определить и другими методами, изучая макроскопические свойства или функции отклика.

Рассмотрим пример реальных данных по неупругому рассеянию нейтронов. На рис. 11.4 показаны линии уровня структурного фактора жидкого ^{3}He. Интересно сравнить эти данные со структурным фактором идеального ферми-газа (см. задачу 73) с импульсом Ферми $p_0 = 0,786 \cdot 10^{-8}$см$^{-1}$, что соответствует плотности ^{3}He при $P = 1$ атм, и массой, равной ато́мной массе ^{3}He. Линии уровня структурного фактора идеального ферми-газа показаны на рис. 11.5. Для удобства сравнения мы перенесли на рис. 11.4 границу области $S(\omega, \mathbf{q}) > 0$, «квазичастичный гребень» $\omega = v_F k - k^2/2m$, а также параболу $\omega = k^2/2m$ — линию максимумов $S(\omega, \mathbf{q})$ при фиксированном $|\mathbf{q}|$.

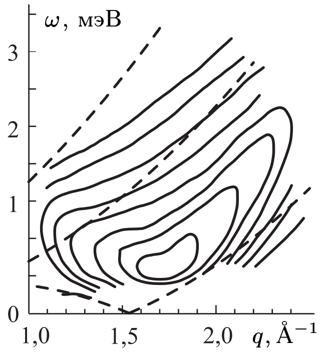

Рис. 11.4

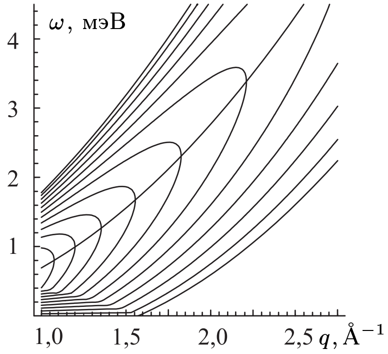

Рис. 11.5

Видно, что качественно элементарные возбуждения в ^{3}He такие же, как в ферми-газе: граница области $S(\omega, \mathbf{q}) > 0$ выглядит похоже и имеет правильный масштаб. Однако центральный максимум лежит на большом расстоянии от параболы $\omega = k^2/2m$. Причина этого расхождения состоит в отличии эффективной массы в жидком ^{3}He от массы атома в пустоте: $m_* \approx 3m$ (это значение получено из данных по теплоемкости при $T \ll E_F$, т. е. из низкоэнергетических измерений). Если учесть трехкратное различие масс, то положение центрального максимума оказывается примерно на месте. В то же время было бы неправильно просто заменить m на m_* в формуле для $S(\omega, \mathbf{q})$ идеального ферми-газа, поскольку при этом верхняя граница области $S(\omega, \mathbf{q}) > 0$, дающаяся выражением $\omega = k^2/2m + kp_0/m$, оказалась бы значительно ниже, чем на рис. 11.4.

Таким образом, в окрестности верхней границы спектра имеет смысл пользоваться массой атома в пустоте, а вблизи максимума — эффективной массой. Причина состоит в том, что на коротких временах, соответствующих большим энергиям, взаимодействие между атомами жидкости не успевает проявиться, и они эффективно ведут себя как свободные.

Обратим также внимание на максимум структурного фактора ^{3}He при $q \approx 1,75\,\text{Å}^{-1}$, $\omega \approx 0,5$ МэВ, отсутствующий в структурном факторе идеального ферми-газа. Этот максимум есть следствие взаимодействия. Более сильное, чем в идеальном газе, рассеяние при q порядка обратного расстояния между атомами ^{3}He можно объяснить существованием в жидкости ближнего порядка, возникающего вследствие взаимодействия атомов и приводящего к кристаллизации при достаточно высоком давлении или низкой температуре.

Литература: Туннелирование из сверхпроводника в нормальный металл рассматривается в [3], § 10.8, а эффект Джозефсона — в [3], § 10.12. Обсуждение структурного фактора для неупругого рассеяния можно найти в [1], § 17 и в [6], § 86, 87, 91.

11.3. Задачи 68–74

Задача 68. а. Выведите формулу (11.14) для туннельного тока, используя мацубаровскую технику. Для этого рассмотрите отклик туннельного тока (11.13) на поле, пропорциональное туннельному оператору X, — см. (11.12). Используя аналитические свойства мацубаровских функций Грина, перейдите от мнимых частот к вещественным и тем самым свяжите функцию отклика с величинами в реальном времени.

б. Рассмотрите туннелирование между двумя идеальными ферми-газами с постоянной плотностью состояний. Покажите, что при $eV \ll E_F$ вольт-амперная характеристика линейна, т. е. выполняется закон Ома $V = RI$, причем сопротивление контакта R не зависит от температуры и определяется соотношением

$$R^{-1} = 4\pi e^2 \nu_a\, \nu_b |T_0|^2, \tag{11.30}$$

где ν_a и ν_b — плотности состояний берегов контакта.

в. Пусть в одном из ферми-газов имеется взаимодействие между частицами, так что собственно-энергетическая часть оказывается равной

$$\Sigma(\xi, \varepsilon) = a\xi - b\varepsilon, \tag{11.31}$$

где ε — энергия частицы, а $\xi = v_F(p - p_0)$, причем $\xi, \varepsilon \ll E_F$. Найдите туннельное сопротивление.

Для электрон-фононного взаимодействия собственно-энергетическая часть есть функция ε, а от ξ не зависит (см. гл. 6). Поэтому в этом случае $a =$

$= 0$. Для электрон-электронного взаимодействия собственно-энергетическая часть зависит как от ξ, так и от ε, и поэтому $a \neq 0$ и $b \neq 0$.

Задача 69. (*Туннельный ток в NS контакте.*) Рассмотрим туннельный контакт между нормальным металлом и сверхпроводником, к которому приложено напряжение V. Выразите туннельный ток при $T < T_c$ через сопротивление контакта R в нормальном состоянии, т. е. при $T > T_c$. Покажите, что при нулевой температуре зависимость туннельного тока от V имеет порог:

$$I = \frac{1}{R}\sqrt{V^2 - \left(\frac{\Delta}{e}\right)^2}\,\mathrm{sgn}\,V, \tag{11.32}$$

где Δ — сверхпроводящая щель при $T = 0$. Найдите зависимость туннельного тока от температуры при $0 < T < T_c$?

Задача 70. (*Эффект Джозефсона.*) Туннельный ток через контакт, связывающий два сверхпроводника, обладает весьма интересными свойствами. В этом случае помимо одночастичного вклада в ток, рассмотренного в задачах 68 и 69, появляется дополнительный вклад, связанный с туннелированием куперовских пар. Формально этот вклад можно описать, заменив нормальные функции Грина в диаграмме на рис. 11.3 на аномальные — рис. 11.6. Таким образом, туннельный эксперимент позволяет «измерить» аномальную функцию Грина в сверхпроводнике. Покажите, что в равновесии, при $V = 0$, двухчастичный ток отличен от нуля и равен

$$I = I_0 \sin(\varphi_a - \varphi_b), \tag{11.33}$$

где $\varphi_{a(b)}$ — значения фазы сверхпроводящего параметра порядка $\Delta_{a(b)} = |\Delta_{a(b)}|e^{i\varphi_{a(b)}}$ на разных берегах контакта. Туннельный контакт между двумя сверхпроводниками, в котором имеет место эффект Джозефсона (11.33), называется соответственно *джозефсоновским контактом.*

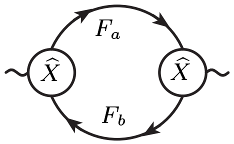

Рис. 11.6

Рассмотрите случай, когда сверхпроводники по обе стороны контакта одинаковые, т. е. $\Delta_{a(b)} = \Delta e^{i\varphi_{a(b)}}$. Получите формулу для максимального тока в джозефсоновском контакте:

$$I_0 = \frac{\pi\Delta}{2eR}\,\mathrm{th}\,\frac{\Delta}{2T}, \tag{11.34}$$

где R — сопротивление контакта при $T > T_c$. Связь между максимальным джозефсоновским током I_0 и сопротивлением контакта в нормальном состоянии называется *соотношением Амбегаокара–Баратова.*

Задача 71. (*Плотность состояний в грязном металле*[4].) В неупорядоченном металле туннельная плотность состояний $\nu(\varepsilon)$ имеет

[4] См. работы: *Б. Л. Альтшулер, А. Г. Аронов*// ЖЭТФ. 1979. Т. 77. С. 2028; *B. L. Altshuler, A. G. Aronov, P. A. Lee*// Phys. Rev. Lett. 1980. V. 44. P. 1288.

особенность на уровне Ферми. Сингулярность $\nu(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to E_F$ свидетельствует о том, что ферми-жидкостное состояние в металле в присутствие рассеяния на случайном потенциале весьма сильно модифицируется. Чтобы найти поправку к туннельной плотности состояний, возникающую из-за кулоновского взаимодействия, проделайте следующее.

а. Вычислите вершину взаимодействия электрона с электрическим полем с учетом беспорядка, используя мацубаровскую технику; просуммируйте для этого диаграммы на рис. 11.7.

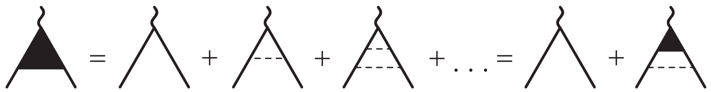
Рис. 11.7

Считайте, что переданный импульс $\mathbf{q}$ и переданная энергия ω_n удовлетворяют условиям $|\mathbf{q}|l \ll 1$, $\omega_n\tau \ll 1$, где τ и l — время и длина свободного пробега. Покажите, что вершинная часть равна

$$\Gamma(\varepsilon_m,\,\omega_n,\,\mathbf{q}) = \begin{cases} 1/[\tau\left(|\omega_n| + D\mathbf{q}^2\right)] & \text{при } \varepsilon_m\,(\varepsilon_m - \omega_n) < 0, \\ 1 & \text{при } \varepsilon_m\,(\varepsilon_m - \omega_n) > 0 \end{cases} \tag{11.35}$$

где D — коэффициент диффузии. Диффузионный полюс выражения (11.35) описывает эффект усиления взаимодействия с внешним полем вследствие диффузии.

Изменение величины взаимодействия можно качественно объяснить тем, что из-за диффузионного замедления динамики электроны проводят больше времени в области действия внешнего поля и поэтому взаимодействуют с ним более сильно. То, насколько сильно диффузия замедляет динамику, зависит от размерности системы. Как мы знаем из задачи 9, критической размерностью является $D = 2$, поскольку при $D \leqslant 2$ число возвратов диффузионной траектории в исходную точку расходится, а при $D > 2$ — сходится. Поэтому эффекты усиления взаимодействия в грязном металле оказываются наиболее интересными в двумерном случае.

б. Найдите эффективное электрон–электронное взаимодействие $V(\omega_n, \mathbf{q})$ с учетом динамической экранировки. Для этого вычислите сумму диаграмм на рис. 8.3 и покажите, что заэкранированное взаимодействие есть

$$V(\omega_n,\,\mathbf{q}) = V_0(\mathbf{q})\,\frac{|\omega_n| + D\mathbf{q}^2}{|\omega_n| + D\mathbf{q}^2 + \nu D\mathbf{q}^2 V_0(\mathbf{q})}, \tag{11.36}$$

где $V_0(\mathbf{q})$ — затравочное взаимодействие. В качестве поляризационного оператора используйте мацубаровский коррелятор плотность–плотность, найденный в задаче 52.

в. Найдите собственно-энергетическую поправку к функции Грина первого порядка по заэкранированному взаимодействию $V(\omega_n, \mathbf{q})$, соответствующую диаграмме на рис. 11.8.

Используя найденное выражение, найдите поправку $\delta\nu(\varepsilon)$ к плотности состояний двумерного металла в случае кулоновского взаимодействия $V_0(\mathbf{r}) = e^2/|\mathbf{r}|$. Покажите, что в этом случае поправка к плотности состояний есть

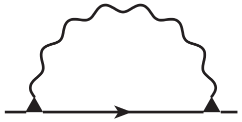

Рис. 11.8

$$\frac{\delta\nu(\varepsilon)}{\nu} = -\frac{e^2}{8\pi^2\hbar\sigma}\ln\frac{1}{|\varepsilon|\tau}\ln\frac{\tau D^2(\nu e^2)^4}{|\varepsilon|}, \quad (11.37)$$

где σ — двумерная проводимость. Расходимость $\delta\nu(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ означает, что квазичастицы в двумерной неупорядоченной ферми-системе сильно отличаются от свободных фермионов. Усиление эффектов взаимодействия в плотности состояний (11.37) при малых ε свидетельствует о неприменимости теории возмущений в двумерном неупорядоченном металле при энергиях вблизи уровня Ферми.

Задача 72. (*Рассеяние нейтронов.*) Покажите, что сечение неупругого рассеяния нейтронов выражается через мнимую часть двухчастичной гриновской функции $\mathscr{K}(q,\omega)$. Получите соотношение (11.28).

Задача 73. а. Найдите структурный фактор идеального ферми-газа $S(\omega,\mathbf{q}) = 2\,\mathrm{Im}\,\mathscr{K}^R(\omega,\mathbf{q})$ при $T=0$.

б. Рассмотрите структурный фактор $S(\omega,\ \mathbf{q})$ ферми-жидкости. Это можно сделать либо с помощью кинетического уравнения ферми-жидкости ([1], (2.21)), либо вычислив мнимую часть нуль-звуковой лестницы (см. рис. 8.3). Покажите, что вклад нуль-звуковой моды в структурный фактор при $|q| \ll p_0$ и $T=0$ имеет вид $S_0(q,\omega) = A\,\delta(\omega - vq)$, где v — скорость нуль-звуковой моды. Считая взаимодействие короткодействующим, определите константу A (см. [6], § 4, 91).

Задача 74. (*Спектр фононов.*) Неупругое рассеяние нейтронов используют для определения закона дисперсии фононов в твердых телах. Нейтроны рассеиваются на ядрах, взаимодействуя с ними контактно, согласно (11.26) и (11.27). Рассмотрим фононы в рамках модели Дебая (см. с. 108), считая, что ядерная плотность представляет собой однородное желе. Тогда флуктуации плотности, на которых происходит рассеяние, записываются через поле смещений решетки (6.1) как $\delta\rho(\mathbf{r}) = -\rho_0\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}(\mathbf{r})$, где ρ_0 — средняя плотность ядер.

а. Найдите вклад дебаевских фононов в структурный фактор $S(\omega,\ \mathbf{q})$ неупругого рассеяния нейтронов.

б. (*Коновская аномалия.*) Спектр фононов в металле перенормируется из-за взаимодействия с электронами. Этот эффект был рассмотрен в задаче 31 в рамках теории Мигдала. Покажите, что перенормированный фононный спектр имеет особенность при $q = 2p_0$, и найдите соответствующий структурный фактор $S(\omega,\ \mathbf{q})$.

Особенность при $q = 2p_0$, называемая коновской аномалией, имеет то же самое происхождение, что и рассмотренное в задаче 32 смягчение спектра одномерных фононов вблизи $q = 2p_0$, приводящее к эффекту Пайерлса. В размерности больше единицы коновская аномалия является относительно слабой и, в отличие от одномерного случая, не приводит к неустойчивости.

11.4. Решения задач 68–74

68 а. Согласно формуле Кубо, среднее от оператора туннельного тока (11.13) в низшем порядке теории возмущений по туннельному гамильтониану (11.11) равно

$$I(t) = i\int\limits_{-\infty}^{t}\left\langle[\widehat{H}_T(t'),\widehat{I}(t)]\right\rangle dt'. \quad (11.38)$$

Благодаря фазовым множителям $e^{\pm ieVt}$ операторы $\widehat{H}_T(t)$ и $\widehat{I}(t)$ явно зависят от времени. Чтобы свести задачу вычисления туннельного тока к стандартной задаче о нахождении функции отклика в равновесном состоянии, введем обобщенную восприимчивость $\chi(\omega)$,

$$\chi(\omega) = i\int\limits_{0}^{\infty}\left\langle\left[\widehat{X}(t),\ \widehat{I}(0)\right]\right\rangle e^{i\omega t}\,dt, \quad (11.39)$$

описывающую отклик туннельного тока на поле $\widehat{X}$, определенное соотношением (11.12). Нетрудно видеть, что туннельный ток как функция напряжения V на туннельном контакте связан с $\chi(\omega)$ следующим соотношением:

$$I(V) = 2\,\mathrm{Re}\,\chi(\omega = eV). \quad (11.40)$$

Чтобы вычислить $\chi(\omega)$, найдем мацубаровскую восприимчивость

$$\chi_M(i\Omega_n) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\beta}^{\beta}\left\langle \mathrm{T}_\tau\,\widehat{X}(\tau)\,\widehat{I}(0)\right\rangle e^{i\Omega_n\tau}\,d\tau, \quad (11.41)$$

а затем продолжим ее на вещественные частоты. Подставляя в (11.41) операторы $\widehat{I}$ и $\widehat{X}$ из (11.9) и (11.12), получим

$$\left\langle \mathrm{T}_\tau\,\widehat{X}(\tau)\,\widehat{I}(0)\right\rangle = \sum_{\mathbf{p}_1,\,\mathbf{p}'_1,\,\mathbf{p}_2,\,\mathbf{p}'_2} T_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}'_1}\Big\langle \mathrm{T}_\tau\,\widehat{a}^+_{\mathbf{p}_1}(\tau)\,\widehat{b}_{\mathbf{p}'_1}(\tau)\ \times$$
$$\times\left(T_{\mathbf{p}_2\mathbf{p}'_2}\,\widehat{a}^+_{\mathbf{p}_2}(0)\,\widehat{b}_{\mathbf{p}'_2}(0) - T^*_{\mathbf{p}_2\mathbf{p}'_2}\,\widehat{a}_{\mathbf{p}_2}(0)\,\widehat{b}^+_{\mathbf{p}'_2}(0)\right)\Big\rangle. \quad (11.42)$$

В отсутствие сверхпроводящих корреляций в пробнике и образце средние вида $\langle\widehat{a}^+_{\mathbf{p}}\,\widehat{a}^+_{\mathbf{p}'}\rangle$ и $\langle\widehat{b}_{\mathbf{p}}\,\widehat{b}_{\mathbf{p}'}\rangle$ равны нулю. Поэтому только вклад второго члена в (11.42) оказывается отличным от нуля. Спаривая операторы в (11.42), находим

$$\left\langle \mathrm{T}_\tau\,\widehat{X}(\tau)\,\widehat{I}(0)\right\rangle = -ie\sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}|T_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}|^2\,G_a(\tau,\ \mathbf{p})\,G_b(-\tau,\ \mathbf{p}')\,, \quad (11.43)$$

где $G_a(\tau,\,\mathbf{p}) = -\langle \mathrm{T}_\tau\, \widehat{a}_{\mathbf{p}}(\tau)\, \widehat{a}^+_{\mathbf{p}}(0)\rangle$ и $G_b(\tau,\,\mathbf{p}) = -\langle \mathrm{T}_\tau\, \widehat{b}_{\mathbf{p}}(\tau)\, \widehat{b}^+_{\mathbf{p}}(0)\rangle$ — мацубаровские функции Грина соответственно пробника и образца. Записав функции Грина в частотном представлении и подставив в (11.41), получим

$$\chi_M(i\Omega_n) = -2ieT \sum_{\omega_m} \sum_{\mathbf{pp}'} |T_{\mathbf{pp}'}|^2\; G_a(i\omega_m + i\Omega_n,\,\mathbf{p})\, G_b(i\omega_m,\,\mathbf{p}'), \tag{11.44}$$

где множитель 2 учитывает суммирование по проекциям спина.

Теперь выполним аналитическое продолжение выражения (11.44). Используем для этого интегральное представление (7.24), с помощью которого мацубаровские функции Грина выражаются через мнимые части запаздывающих функций. В результате мацубаровская восприимчивость (11.44) принимает следующий вид:

$$\chi_M(i\Omega_n) = -2ieT \sum_{\omega_m} \sum_{\mathbf{pp}'} |T_{\mathbf{pp}'}|^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty}\!\!\int \frac{\operatorname{Im} G^R_a(\varepsilon,\,\mathbf{p})\,\operatorname{Im} G^R_b(\varepsilon',\,\mathbf{p}')}{(i\omega_m + i\Omega_n - \varepsilon)\;(i\omega_m - \varepsilon')}\,\frac{d\varepsilon\, d\varepsilon'}{\pi^2}. \tag{11.45}$$

Сумма по ω_m в (11.45) вычисляется с помощью тождества (7.85). Таким образом,

$$\chi_M(i\Omega_n) = -\frac{2ie}{\pi^2} \sum_{\mathbf{pp}'} |T_{\mathbf{pp}'}|^2 \times$$
$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} G^R_a(\varepsilon,\,\mathbf{p})\,\operatorname{Im} G^R_b(\varepsilon',\,\mathbf{p}')\,\frac{n_F(\varepsilon) - n_F(\varepsilon')}{\varepsilon' - \varepsilon + i\Omega_n}\,d\varepsilon d\varepsilon'. \tag{11.46}$$

Аналитическое продолжение (11.46) на вещественные частоты достигается заменой $i\Omega_n$ на $\omega + i0$. Вещественная часть полученного выражения дает туннельный ток

$$I(V) = \frac{4e}{\pi} \sum_{\mathbf{pp}'} |T_{\mathbf{pp}'}|^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty}\!\!\int \delta(\varepsilon' - \varepsilon - eV)\, \times$$
$$\times \operatorname{Im} G^R_a(\varepsilon,\,\mathbf{p})\,\operatorname{Im} G^R_b(\varepsilon',\,\mathbf{p}')\;(n_F(\varepsilon) - n_F(\varepsilon'))\; d\varepsilon\, d\varepsilon'. \tag{11.47}$$

Интегрирование по ε уничтожает δ-функцию и мы получаем искомое выражение для туннельного тока:

$$I(V) = \frac{4e}{\pi} \sum_{\mathbf{pp}'} |T_{\mathbf{pp}'}|^2 \times$$
$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} G^R_a(\varepsilon + eV, \mathbf{p})\,\operatorname{Im} G^R_b(\varepsilon, \mathbf{p}')\,(n_F(\varepsilon) - n_F(\varepsilon + eV))\; d\varepsilon. \tag{11.48}$$

Формула (11.48) имеет совершенно общий характер, поскольку при ее выводе не делалось никаких предположений о спектре и характере взаимодействия в пробнике и образце.

68б. Применим результат (11.48) к задаче о туннельном контакте между двумя нормальными металлами. Мнимая часть запаздывающей функции Грина $G^R(\varepsilon, \mathbf{p}) = (\varepsilon - \xi_{\mathbf{p}} + i0)^{-1}$ равна

$$\operatorname{Im} G^R(\varepsilon, \mathbf{p}) = -\pi\,\delta(\varepsilon - \xi_{\mathbf{p}}). \tag{11.49}$$

Рассмотрим более простой случай шероховатого барьера, когда туннельный матричный элемент не зависит от импульсов: $T_{\mathbf{pp}'} = T_0$. Величина T_0 есть значение туннельного матричного элемента при энергии вблизи E_F. При этом каждая из двух функций Грина в (11.48) интегрируется по импульсам отдельно и соответственно вклад каждой из них есть

$$\int \operatorname{Im} G^R_{a(b)}(\varepsilon, \mathbf{p})\,\frac{d^3p}{(2\pi)^3} = -\pi\,\nu_{a(b)}, \tag{11.50}$$

где $\nu_{a(b)}$ — плотность состояний с одной проекцией спина.

Нетрудно проверить, что

$$\int (n_F(\varepsilon) - n_F(\varepsilon + eV))\, d\varepsilon = eV \tag{11.51}$$

при произвольной температуре. Поэтому туннельный ток (11.48) можно записать в виде

$$I(V) = \frac{V}{R}, \quad R = \left(4\pi e^2\, |T_0|^2\; \nu_a\, \nu_b\right)^{-1} \tag{11.52}$$

— сопротивление туннельного контакта. Таким образом, для контакта между нормальными металлами справедлив закон Ома, причем сопротивление при $T \ll E_F$ не зависит от температуры.

Нетрудно убедиться в том, что закон Ома с независящим от температуры сопротивлением получается и при произвольной зависимости туннельного матричного элемента $T_{\mathbf{pp}'}$ от импульсов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$. Интересно, что даже в случае туннелирования через идеально гладкий барьер, при котором сохраняется параллельная барьеру компонента импульса, закон Ома по-прежнему имеет место при $T \ll E_F$. Эффект сохранения импульса при туннелировании существенно влияет на характер зависмости $I(V)$ при eV, $T \ll E_F$ только в тех случаях, когда и образец, и пробник представляют собой достаточно низкоразмерные системы.

68в. Одночастичная функция Грина с собственно-энергетической частью вида (11.31) имеет вид

$$G(\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{1}{G_0^{-1}(\varepsilon, \mathbf{p}) - \Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})} = \frac{1}{\varepsilon(1 + b) - \xi_{\mathbf{p}}(1 + a) + i0}. \tag{11.53}$$

При этом туннельная плотность состояний

$$\nu(\varepsilon) = -\frac{1}{\pi}\int \operatorname{Im} G(\varepsilon, \mathbf{p})\,\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} = \int \delta(\varepsilon(1 + b) - \xi_{\mathbf{p}}(1 + a))\,\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} = \frac{\nu_0}{1 + a}, \tag{11.54}$$

где ν_0 — плотность состояний без учета взаимодействия. Таким образом оказывается, что туннельная плотность состояний не зависит от константы b.

Полезно сравнить этот ответ с перенормировкой спектра квазичастиц. Функция Грина имеет полюс при

$$\varepsilon = \varepsilon_0(\mathbf{p}) = \frac{1+a}{1+b}\, v_F(|\mathbf{p}| - p_0). \tag{11.55}$$

Таким образом, константа b дает вклад в перенормировку спектра, не меняя при этом туннельный ток. Так происходит потому, что константа b определяет величину скачка в распределении частиц по импульсам на ферми-поверхности, равную вычету функции Грина в квазичастичном полюсе

$$Z = \frac{1}{1+b}. \tag{11.56}$$

Но поскольку перенормировка туннельной плотности состояний пропорциональна

$$\nu(\varepsilon) \approx Z\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\xi}\right)^{-1}, \tag{11.57}$$

вклады константы b в эффективную массу и в вычет Z взаимно сокращаются. Таким образом, туннельный ток зависит не только от перенормированного спектра квазичастиц $\varepsilon = \xi(p)$, но и от их структуры, описываемой величиной Z.

В случае электрон-фононного взаимодействия $a = 0$, и поэтому туннельный ток оказывается точно таким же, как и в отсутствие взаимодействия. Качественно это объясняется адиабатичностью фононов. Туннелирование электрона в металл происходит мгновенно, поэтому при туннелировании решетку можно считать неподвижной. Таким образом, вероятность туннелирования определяется свойствами свободных электронов. Фононы же затем за время порядка ω_D^{-1} подстраиваются под конечное состояние электронов после туннелирования, каким бы оно ни было.

Заметим, что наш вывод об отсутствии влияния электрон–фононного взаимодействия на туннельный ток имеет весьма общий характер. Как нетрудно видеть, туннельная плотность состояний (11.54) не меняется, если собственно-энергетическая часть $\Sigma(\varepsilon)$ зависит от энергии ε произвольным образом. Для полного сокращения эффектов взаимодействия требуется лишь отсутствие зависимости Σ от $\mathbf{p}$, которое в случае электрон-фононного взаимодействия обеспечивается адиабатичностью фононов.

69. Для нахождения туннельного тока между нормальным металлом и сверхпроводником можно воспользоваться общим соотношением (11.42). При этом в сверхпроводнике аномальные средние вида $\langle \widehat{a}^+_{\mathbf{p}_1}\, \widehat{a}^+_{\mathbf{p}_2}\rangle$ отличны от нуля, и поэтому требуется заново проанализировать вклад двух членов (11.42) в туннельный ток. Однако оказывается, что поскольку в нормальном металле средние $\langle \widehat{b}_{\mathbf{p}'_1}\, \widehat{b}_{\mathbf{p}'_2}\rangle$ равны нулю, первый

член в (11.42) по-прежнему обращается в нуль при усреднении. Поэтому, как и в задаче 68, можно перейти от (11.42) к выражению (11.48), в которое входят туннельные плотности состояний пробника и образца.

Туннельная плотность состояний дается мнимой частью функции Грина. Аналитическое продолжение функции Грина сверхпроводника (10.35) с положительных мацубаровских частот на вещественную ось дает

$$G^R(\varepsilon,\, \mathbf{p}) = \frac{\varepsilon + \xi_{\mathbf{p}}}{\varepsilon^2 - \xi_{\mathbf{p}}^2 - \Delta^2 + i0\operatorname{sgn}\varepsilon}. \tag{11.58}$$

Следовательно туннельная плотность состояний есть

$$\nu(\varepsilon) = -\frac{1}{\pi}\int \operatorname{Im} G^R(\varepsilon,\, \mathbf{p})\, \frac{d^3p}{(2\pi)^3} = \nu_0 \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\varepsilon + \xi)\, \delta\left(\varepsilon^2 - \xi^2 - \Delta^2\right) \operatorname{sgn}\varepsilon\, d\xi. \tag{11.59}$$

Вычисляя интеграл от δ-функции, находим

$$\nu(\varepsilon) = \begin{cases} \nu_0|\varepsilon|/(\varepsilon^2 - \Delta^2)^{1/2} & \text{при } |\varepsilon| > \Delta, \\ 0 & \text{при } |\varepsilon| < \Delta. \end{cases} \tag{11.60}$$

Обратим внимание на то, что этот результат может быть записан в виде $\pi\nu_0\partial\xi/\partial\varepsilon$, т. е. как плотность состояний квазичастиц с законом дисперсии $\varepsilon^2 = \Delta^2 + \xi^2$. Хотя такой подход игнорирует различие между туннелирующими электронами и квазичастицами, в которые они превращаются в сверхпроводнике, результат в данном случае оказывается верным. Причина состоит в том, что квазичастицы теории БКШ состоят из двух электронов с одинаковой энергией. Их вклады в туннельную плотность состояний равны $|u_p|^2$ и $|v_p|^2$, где u_p и v_p — коэффициенты преобразования Боголюбова. Но поскольку $u_p^2 + v_p^2 = 1$, суммарный вклад двух компонент квазичастицы в туннельный ток определяется только свойствами квазичастичного спектра. Так происходит потому, что эффекты взаимодействия в теории БКШ учитываются только в рамках теории среднего поля, и поэтому многочастичные эффекты оказываются относительно простыми.

Подставляя туннельную плотность состояний (11.60) в (11.48), находим туннельный ток:

$$I_{N-S}(V) = 4\pi e\nu_a\nu_b\, |T_0|^2 \int\limits_{|\omega|>\Delta} (n_F(\omega) - n_F(\omega + eV))\, \frac{|\omega|\, d\omega}{\sqrt{\omega^2 - \Delta^2}}. \tag{11.61}$$

Рассмотрим случай нулевой температуры. Пусть $eV > 0$. Тогда интегрирование по энергиям производится в интервале $-eV < \varepsilon < 0$. При $eV < \Delta$ интеграл (11.61) обращается в нуль, поскольку в этой области не выполнено условие $|\varepsilon| > \Delta$. Для $eV > \Delta$ находим

$$I_{N-S}(V) = \frac{1}{eR}\int\limits_{-eV}^{-\Delta} \frac{|\varepsilon|d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2}} = \frac{\sqrt{(eV)^2 - \Delta^2}}{eR}. \tag{11.62}$$

Таким образом, зависимость туннельного тока от напряжения имеет порог, равный Δ/e. Рассматривая аналогично случай $eV < 0$, получаем искомую зависимость (11.32), обладающую свойством антисимметрии: $I_{N-S}(-V) = -I_{N-S}(V)$.

Порог при $eV = \Delta$ является резким только при нулевой температуре. При конечной температуре в нормальном металле всегда имеются квазичастицы с энергией $\varepsilon > \Delta$, которые могут туннелировать в сверхпроводник. Поэтому естественно ожидать, что при $T > 0$ корневая особенность размывается и туннельный ток оказывается отличным от нуля при всех напряжениях.

Чтобы убедиться в том, что это действительно так, найдем туннельный ток под порогом при малых температурах $T \ll \Delta$. Интеграл в (11.61) при таких T определяется окрестностями точек $\varepsilon = \pm\Delta$. Введем обозначение $\varepsilon = \pm(\Delta + x)$ в каждой из областей. Как будет ясно из дальнейших вычислений, характерное значение x оказывается порядка T, поэтому можно разложить плотность состояний по x/Δ. Выражение для туннельного тока соответственно принимает вид

$$I_{N-S}(V,T) = 4\pi e\nu_a\nu_b|T_0|^2 \int\limits_0^\infty [n_F(\Delta + x) + n_F(-\Delta - x) - \\ - n_F(\Delta + eV + x) - n_F(-\Delta - x + eV)]\, \frac{\Delta\, dx}{\sqrt{2\Delta x}}. \quad (11.63)$$

Упростим полученное выражение, воспользовавшись тождеством $n_F(-\varepsilon) = 1 - n_F(\varepsilon)$, которому удовлетворяет фермиевская функция распределения. Получаем

$$I_{N-S}(V,T) = \frac{1}{eR}\int\limits_0^\infty [n_F(\Delta - eV + x) - n_F(\Delta + x + eV)]\sqrt{\frac{\Delta}{2x}}\, dx. \quad (11.64)$$

(мы выразили туннельный матричный элемент T_0 через сопротивление контакта в нормальном состоянии).

При больших положительных значениях энергии фермиевская функция распределения переходит в больцмановскую,

$$n_F(\varepsilon \gg T) \approx e^{-\varepsilon/T}, \quad (11.65)$$

и поэтому выражение для туннельного тока принимает следующий вид:

$$I_{N-S}(V,T) = \frac{1}{eR}e^{-\Delta/T}\,\mathrm{sh}\,\frac{eV}{T}\int\limits_0^\infty \sqrt{\frac{2\Delta}{x}}\; e^{-x/T}\, dx. \quad (11.66)$$

Вычисляя интеграл по x с помощью известного представление гамма-функции, находим

$$I_{N-S}(V,T) = \frac{\sqrt{2\pi\Delta T}}{eR}\; e^{-\Delta/T}\;\mathrm{sh}\,\frac{eV}{T}. \quad (11.67)$$

Это выражение неприменимо в узкой окрестности порога при $(eV - \Delta) \sim T$, поскольку при таких напряжениях приближение (11.65) нельзя применять к первому члену в (11.64).

Итак, при $0 < T \ll \Delta$ ток (11.61) при $eV < \Delta$ экспоненциально мал. По мере роста температуры ток под порогом $eV < \Delta$ возрастает, и когда температура достигает T_c, вольт-амперная характеристика становится омической, как для контакта между двумя нормальными металлами.

Помимо термоактивационного вклада в ток, описываемого формулой (11.67), под порогом $eV = \Delta$ существует еще один весьма интересный вклад, не исчезающий при $T \to 0$. Он связан с когерентным туннелированием пары электронов с противоположными импульсами и спинами. Оказавшись в сверхпроводнике, такие два электрона могут образовать куперовскую пару. Туннелирование пары, в отличие от одночастичного туннелирования, не требует затраты энергии Δ на каждую частицу, и поэтому такой вклад не «вымерзает» при низких температурах. Когерентное туннелирование пар электронов часто называют *андреевским отражением*, поскольку описанный процесс перехода двух электронов из нормального металла в сверхпроводник можно рассматривать как превращение электрона в дырку при отражении от поверхности сверхпроводника. Вероятность двухчастичного туннелирования пропорциональна $|T_0|^4$, а не $|T_0|^2$, как для одночастичного туннелирования. Поэтому при $|T_0| \ll 1$ и не слишком низкой температуре двухчастичные процессы очень редки по сравнению с одночастичными. Вследствие этого андреевское отражение вносит существенный вклад в туннельный ток лишь при достаточно низких температурах[5].

70. Поскольку теперь у нас с обеих сторон контакта находятся сверхпроводники, первый член в выражении (11.42) оказывается отличным от нуля. Поэтому усреднение (11.42) необходимо выполнить заново. Как нетрудно видеть, усреднение первого члена (11.42) выполняется так же, как и раньше, с единственной разницей, состоящей в замене нормальных средних на аномальные. Соответствующий вклад в восприимчивость χ_M выписывается по аналогии с задачей 68 и оказывается равным

$$\chi_{M,S-S}(i\Omega_n) = \\ = ieT\sum_{\omega_m}\sum_{\mathbf{pp}'}|T_{\mathbf{pp}'}|^2\; F^+_{a,\mu\nu}(i\Omega_n + i\omega_m,\, \mathbf{p})\, F_{b,\nu\mu}(i\omega_m,\, \mathbf{p}'), \quad (11.68)$$

где $F_a(i\varepsilon_n, \mathbf{p})$ и $F_b(i\varepsilon_n, \mathbf{p})$ — аномальные функции Грина берегов контакта, а μ и ν — спиновые индексы. Суммируя по μ и ν с учетом спиновой структуры аномальных функций Грина, получаем выражение по виду сходное с (11.45) с точностью до замены нормальных функций Грина на аномальные:

[5] Андреевское отражение более подробно рассмотрено в литературе, процитированной на с. 287.

$$\chi_{M,S-S}(i\Omega_n) = -2ieT \sum_{\omega_m} \sum_{\mathbf{pk}} |T_{\mathbf{pk}}|^2 \; F_a^+(i\Omega_n + i\omega_m,\, \mathbf{p})\, F_b(i\omega_m,\, \mathbf{k}). \tag{11.69}$$

Обратим внимание на то, что знаки выражений (11.45) и (11.69) совпадают. Это соответствует общему наблюдению о совпадении знаков «нормальных» и «аномальных» петель, сделанному в решении задачи 63.

Поскольку, как мы увидим, джозефсоновский ток отличен от нуля в равновесии, т. е. при $V = 0$, нам будет достаточно[6] вычислить $\chi_{M,S-S}(i\Omega_n)$ при $\Omega_n = 0$. Аналитическое продолжение оказывается ненужным, и можно сразу записать выражение для туннельного тока:

$$I_{S-S} = 4e\,|T_0|^2\, T\, \mathrm{Im} \sum_{\omega_m} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta_a^* \nu_a\, d\xi_b}{\omega_m^2 + \xi_a^2 + |\Delta_a|^2} \, \frac{\Delta_b \nu_b\, d\xi_b}{\omega_m^2 + \xi_b^2 + |\Delta_b|^2} =$$

$$= 4\pi^2 e\,|T_0|^2\, \nu_a \nu_b\, T\, \mathrm{Im} \sum_{\omega_m} \frac{\Delta_a^* \Delta_b}{\sqrt{\omega_m^2 + |\Delta_a|^2}\, \sqrt{\omega_m^2 + |\Delta_b|^2}}. \tag{11.70}$$

Полученное выражение отлично от нуля, когда фазы параметра порядка по разные стороны контакта различны. Пусть $\Delta_{a,b} = |\Delta_{a,b}|\, e^{i\varphi_{a,b}}$. Выражая туннельный матричный элемент T_0 через сопротивление контакта в нормальном состоянии, получаем соотношение Джозефсона:

$$I = I_0 \sin(\varphi_b - \varphi_a), \quad \text{где} \quad I_0 = \frac{\pi}{eR}\, T \sum_{\omega_m} \frac{|\Delta_a||\Delta_b|}{\sqrt{\omega_m^2 + |\Delta_a|^2}\, \sqrt{\omega_m^2 + |\Delta_b|^2}} \tag{11.71}$$

— максимальный ток через контакт. Отметим еще раз, что, в отличие от других разновидностей туннельного тока, джозефсоновский ток не связан с релаксацией к равновесному состоянию. Эффект Джозефсона (11.33) имеет место в термодинамическом равновесии, и соответственно ток (11.71) между двумя сверхпроводниками с различающимися фазами параметра порядка может течь неограниченно долго.

Формула (11.71) для I_0 упрощается в случае, когда параметры порядка по обе стороны контакта отличаются только фазой: $|\Delta_a| = |\Delta_b| \equiv \Delta$. При этом

$$I_0 = \frac{\pi}{eR}\, T \sum_{\omega_m} \frac{\Delta^2}{\omega_m^2 + \Delta^2}, \tag{11.72}$$

после чего суммирование легко производится с помощью тождества (7.83). В этом случае мы получаем соотношение (11.34) для максимального джозефсоновского тока I_0.

[6] По этой же причине мы не рассматриваем вклад в туннельный ток (11.42), содержащий нормальные средние. Как мы видели в задачах 68 и 69, такой вклад описывает некогерентное туннелирование отдельных электронов и приводит к току, исчезающему при $V = 0$.

Что произойдет, если пропустить через контакт ток, больший чем I_0? Детальный ответ на этот вопрос зависит от свойств цепи, в которую включен контакт. Однако джозефсоновский контакт используемый в таком режиме обладает одним весьма общим свойством. При токе превосходящем I_0 на контакте появится конечное напряжение $V(t)$, в общем случае зависящее от времени. Это напряжение приводит к изменению фазы $\varphi = \varphi_b - \varphi_a$ согласно соотношению Джозефсона для фазы

$$\hbar\, \frac{d\varphi}{dt} = 2eV(t), \tag{11.73}$$

которое следует из калибровочной инвариантности. Таким образом, фаза и ток оказываются зависящими от времени. Зная свойства внешней цепи, можно самосогласованно связать напряжение на контакте $V(t)$ и туннельный ток $I(t)$, и таким образом определить динамику системы. Читатель, интересующийся этим режимом работы джозефсоновского контакта, обычно называемым нестационарным эффектом Джозефсона, может найти обсуждение соответствующих вопросов в литературе, процитированной на с. 287.

71 а. Рассмотрим вершинную часть взаимодействия электрона с внешним полем. Затравочная вершинная часть (в отсутствие примесей) равна единице. Вычислим вершинную часть, дающуюся диаграммами на рис. 11.7, используя усредненные по беспорядку мацубаровские функции Грина (см. (9.17)). Рассмотрим вначале поправку к вершине, соответствующую изображенной на рис. 11.9 диаграмме с одной примесной линией.

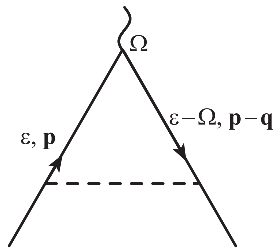

Рис. 11.9

Интересующее нас выражение

$$\Gamma^{(1)}(\varepsilon_m,\, \omega_n,\, \mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi\nu_0\tau} \int \frac{1}{\left(i\varepsilon_m - \xi_{\mathbf{p}} + \dfrac{i}{2\tau}\,\mathrm{sgn}\,\varepsilon_m\right)} \times$$

$$\times \frac{1}{\left(i\varepsilon_m - i\omega_n - \xi_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} + \dfrac{i}{2\tau}\,\mathrm{sgn}(\varepsilon_m - \omega_n)\right)} \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^2}. \tag{11.74}$$

вычисляется таким же образом, как ступенька примесной лестницы в задаче 52. Заменяя интеграл по $d^2\mathbf{p}$ интегралом по ξ и вычисляя его методом вычетов, нетрудно показать, что выражение отлично от нуля только в том случае, когда знаки энергий ε_m и $\varepsilon_m - \omega_n$ различаются. (В противном случае оба вычета интегрируемого выражения попадают в одну и ту же полуплоскость комплексного ξ.)

В случае, когда знаки энергий различны и $\omega_n > 0$, получаем выражение

$$\Gamma^{(1)}(\varepsilon_m,\, \omega_n,\, \mathbf{q}) = \frac{1}{1 + \tau\omega_n + \tau D\mathbf{q}^2}, \tag{11.75}$$

подобное найденному в задаче 52.

Теперь просуммируем всю примесную лестницу, показанную на рис. 11.7. Как и в задаче 52, интересующий нас лестничный ряд образует геометрическую прогрессию. Поэтому

$$\Gamma(\varepsilon_m,\, \omega_n,\, \mathbf{q}) = \frac{1}{1-\Gamma^{(1)}} \approx \frac{1}{\tau(\omega_n + D\mathbf{q}^2)}. \tag{11.76}$$

Рассматривая аналогично случай $\omega_n < 0$, можно убедиться в том, что ω_n в (11.76) следует заменить на $|\omega_n|$.

Если же знаки энергий ε_m и $\varepsilon_m - \omega_n$ в функциях Грина в (11.74) совпадают, то зануляется не только первая поправка $\Gamma^{(1)}$, но, как нетрудно видеть, и все остальные члены диаграммного ряда на рис. 11.7. Это является следствием общего правила, отмеченного в гл. 9 — примесная лестница отлична от нуля только если энергии в функциях Грина имеют разные знаки.

71 б. Эффективное взаимодействие с учетом динамической экранировки вычисляется суммированием последовательности «пузырьковых» диаграмм (см. задачу 45):

$$V(\omega_n,\, \mathbf{q}) = \frac{V_0(\mathbf{q})}{1 - \Pi(\omega_n,\, \mathbf{q})\, V_0(\mathbf{q})}, \tag{11.77}$$

где $\Pi(\omega_n,\, \mathbf{q})$ — поляризационный оператор, а $V_0(\mathbf{q})$ — затравочное взаимодействие. Подставляя поляризационный оператор $\Pi(\omega_n,\, \mathbf{q}) = -\nu D\mathbf{q}^2/(|\omega_n| + D\mathbf{q}^2)$ из (9.23), получаем искомое выражение (11.36).

Для дальнейших вычислений нам понадобится двумерный фурье-образ кулоновского потенциала взаимодействия. Его проще всего найти, проинтегрировав известный фурье-образ трехмерного кулоновского потенциала по q_z:

$$V_0^{(2)}(\mathbf{q}) = V_0^{(3)}(q_x, q_y,\, z=0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^2}{|\mathbf{r}|}\right)_{\mathbf{q}} \frac{dq_z}{2\pi} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{4\pi e^2}{\mathbf{q}^2 + q_z^2}\,\frac{dq_z}{2\pi} = \frac{2\pi e^2}{|\mathbf{q}|}, \tag{11.78}$$

где $\mathbf{q} = (q_x, q_y)$.

71 в. Поправка к туннельной плотности состояний $\nu(\varepsilon)$ получается из поправки к функции Грина интегрированием по импульсам, которое можно заменить интегрированием по ξ:

$$\frac{\delta\nu(\varepsilon)}{\nu_0} = -\frac{1}{\pi}\int \delta G(\varepsilon, \xi)\, d\xi. \tag{11.79}$$

Вычислим $\delta G(i\varepsilon, \mathbf{p})$ при $T=0$, заменяя суммы по мацубаровским частотам интегралами. Будем для определенности считать, что $\varepsilon > 0$. Выражение, соответствующее диаграмме на рис. 11.8, есть

$$\delta G(i\varepsilon, \mathbf{p}) = G_0^2(i\varepsilon, \mathbf{p}) \iint \Gamma^2(\varepsilon,\, \omega,\, \mathbf{q})\, V(\omega,\, \mathbf{q})\, G(i\varepsilon - i\omega,\, \mathbf{p}-\mathbf{q}) \frac{d\omega\, d^2q}{(2\pi)^3}. \tag{11.80}$$

Наибольший вклад в интеграл по энергии возникает от области $\omega > \varepsilon$, так как в этой области вершинная часть $\Gamma(\varepsilon,\, \omega,\, \mathbf{q})$ имеет диффузионный полюс и поэтому велика — см. (11.35). Пренебрегая вкладом области $\omega < \varepsilon$, имеем

$$\delta G(i\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{1}{(i\varepsilon - \xi_{\mathbf{p}} + i/2\tau)^2} \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{1}{(i\varepsilon - i\omega - \xi - \mathbf{q}\mathbf{v}_{\mathbf{p}} - i/2\tau)} \times \\ \times \frac{V_0(\mathbf{q})}{(\omega + D\mathbf{q}^2)\left(\omega + D\mathbf{q}^2 + \nu D\mathbf{q}^2 V_0(\mathbf{q})\right)} \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2}. \tag{11.81}$$

Удобно сразу проинтегрировать это выражение по ξ. При этом мы пренебрегаем членами ω и $\mathbf{qv}$ в знаменателе по сравнению с τ^{-1}, поскольку нас интересует вклад малых энергий и импульсов. Таким образом, получаем

$$\int \delta G(i\varepsilon, \xi)\, d\xi = 2\int\limits_{\varepsilon}^{\infty} d\omega \int \frac{V_0(\mathbf{q})}{(\omega + D\mathbf{q}^2)\left(\omega + D\mathbf{q}^2 + \nu D\mathbf{q}^2 V_0(\mathbf{q})\right)} \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2}. \tag{11.82}$$

Подставляя в это выражение фурье-образ затравочного взаимодействия (11.78), получаем

$$\int \delta G(i\varepsilon, \xi)\, d\xi = -2e^2 \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} d\omega \int\limits_{0}^{\infty} \frac{dq}{(\omega + Dq^2)\left(\omega + Dq^2 + 2\pi\nu e^2 Dq\right)}. \tag{11.83}$$

Проинтегрируем найденное выражение по q. Наибольший вклад в интеграл вносит область

$$\frac{\omega}{2\pi\nu De^2} \lesssim q \lesssim \sqrt{\frac{\omega}{D}}\,, \tag{11.84}$$

в которой можно пренебречь Dq^2 по сравнению с ω, и ω — по сравнению с $\nu e^2 Dq$. Обрезая логарифмически расходящийся интеграл на границах области (11.84), получаем

$$\int \delta G(i\varepsilon, \xi)\, d\xi = \frac{1}{4\pi\nu D} \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \ln\frac{(\nu e^2)^2}{D\omega}\, \frac{d\omega}{\omega}. \tag{11.85}$$

Интеграл по частотам также логарифмически расходится на верхнем пределе. Чтобы получить вклад диффузионной области обрежем интеграл по ω на $\omega\tau \approx 1$, (При бóльших значениях ω электроны движутся баллистически, поэтому эта область описывается теорией ферми-жидкости и не приводит к сингулярности в плотности состояний.) Вычисляя интеграл по ω и удерживая при аналитическом продолжении с мнимых частот на вещественные лишь главный дважды логарифмический член, получаем поправку к туннельной плотности состояний:

$$\frac{\delta\nu(\varepsilon)}{\nu} = -\frac{1}{8\pi^2\nu D} \ln\frac{(\nu e^2)^4 \tau D^2}{|\varepsilon|} \ln\frac{1}{|\varepsilon|\tau}. \tag{11.86}$$

Вклад (11.86) в плотность состояний имеет отрицательный знак и сингулярен на малых энергиях $\varepsilon \to 0$. С помощью соотношения Эйнштейна $\sigma = e^2\nu D$ произведение νD можно выразить через проводимость, что дает искомое выражение (11.37) для плотности состояний двумерного металла.

Остановимся на физическом смысле результата (11.86). Туннельная плотность состояний описывает реакцию электронной жидкости на добавление в нее электрона. Роль кулоновского взаимодействия в этом процессе состоит в следующем. Сразу после того, как электрон протуннелировал в металл, его заряд незаэкранирован и создает кулоновское поле. Под действием этого поля остальные электроны начинают двигаться так, чтобы заэкранировать вновь прибывший электрон. Макроскопически этот процесс приводит к максвелловской релаксации заряда. Таким образом, туннелирование одного электрона сопровождается коллективным растеканием заряда многих других электронов, что приводит к уменьшению вероятности туннелирования. В чистом металле максвелловская релаксация происходит почти мгновенно (за время порядка обратной плазменной частоты). Соответственно в этом случае поправки к $G(t-t')$ из-за взаимодействия достаточно быстро затухают на больших временах, и сингулярности в $G(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ не возникает. В то же время в неупорядоченной системе, характеризующейся омической проводимостью, максвелловская релаксация происходит более медленно. Поэтому в этом случае влияние индуцированного туннелирующим электроном растекания заряда на амплитуду туннелирования оказывается существенным и соответствующая поправка к плотности состояний расходится на малых энергиях. Можно сказать, что плохо проводящая система сильнее «сопротивляется» попыткам добавить в нее электрон. Этот эффект и приводит к уменьшению одночастичной плотности состояний.

Поправка (11.86) приводит к специфической температурной зависимости туннельного тока, а также к его неомичности. Повторив проделанное выше вычисление $\delta\nu(\varepsilon)$ при конечной температуре, нетрудно убедиться в том, что результат (11.86) остается в силе с точностью до замены $\varepsilon \to \varepsilon_m = \pi T(2m+1)$. Соответствующая зависимость туннельного тока от T и V оказывается следующей:

$$G = \frac{dI}{dV} = G_0\left(1 + \frac{\delta\nu(\varepsilon_{T,eV})}{\nu}\right), \quad \varepsilon_{T,eV} = \max\,[T, eV]\,. \tag{11.87}$$

Как видно из этого выражения, при уменьшении температуры и напряжения имеет место подавление туннельного тока, причем насыщения при $eV, T \to 0$ не происходит. Сингулярное поведение туннельного сопротивления при малых температурах или напряжениях, возникающее вследствие сингулярности $\nu(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to E_F$, называется *туннельной аномалией*.

72. (*Первое решение.*) Найдем сечение рассеяния нейтрона, взаимодействующего с флуктуациями плотности среды. Согласно золотому правилу Ферми для квантовомеханических переходов, общее выражение для вероятности перехода в единицу времени имеет вид

$$w_{i\to f} = \frac{2\pi}{\hbar^2}\,|\langle f, \mathbf{p}'|\widehat{\mathscr{H}}_{\rm int}|i, \mathbf{p}\rangle|^2\,\delta\left(E_f + \frac{\mathbf{p}'^2}{2m_{\rm n}} - E_i - \frac{\mathbf{p}^2}{2m_{\rm n}}\right), \tag{11.88}$$

где $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ — начальный и конечный импульсы нейтрона, а $|i\rangle$ и $|f\rangle$ — исходное и конечное состояния среды. Нормируем начальную волновую функцию нейтрона на единичный поток, $\psi_{n,i}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{pr}}/\sqrt{v}$, где $v = p/m$. Функцию же, описывающую конечное состояние, нормируем на $\delta(\mathbf{p}/2\pi\hbar)$, что дает $\psi_{n,f}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{p}'\mathbf{r}}/\sqrt{V}$, где V — объем системы. При этом выражение для вероятности перехода приобретает следующий вид:

$$dw_{i\to f} = \frac{2\pi}{\hbar^2 vV}\left(\frac{2\pi\hbar^2 a}{\mu}\right)^2 \times \\ \times\left|\langle i|\int\widehat{\rho}(\mathbf{r})e^{i\mathbf{qr}}\,d^3\mathbf{r}|f\rangle\right|^2\delta(E_f - E_i - \hbar\omega)\,\frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^3}, \tag{11.89}$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$, $\hbar\omega = \mathbf{p}^2/2m - \mathbf{p}'^2/2m$ — импульс и энергия, переданные нейтроном среде. Записывая элемент объема в импульсном пространстве как

$$d^3\mathbf{p}' = p'^2 dp'\,do' = \frac{\hbar p'^2\,d\omega\,do'}{v'}, \tag{11.90}$$

получим выражение для сечения рассеяния, дающего парциальную вероятность перехода:

$$\frac{d\sigma_{i\to f}}{do'\,d\omega} = \frac{a^2p'^2}{\mu^2 vv'V}\left|\langle i|\int\widehat{\rho}(\mathbf{r})\,e^{i\mathbf{qr}}\,d^3\mathbf{r}|f\rangle\right|^2\delta(E_f - E_i - \hbar\omega). \tag{11.91}$$

Теперь усредним (11.91) по начальным состояниям системы и просуммируем по конечным:

$$\frac{d\sigma}{do'\,d\omega} = \frac{\widetilde{a}^2p'}{Vp}\sum_{i,f}w(E_i)\,\delta(E_f - E_i - \hbar\omega)\,\times \\ \times\iint\langle i|\widehat{\rho}(\mathbf{r})|f\rangle\langle f|\widehat{\rho}(\mathbf{r}')|i\rangle e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}d^3\mathbf{r}\,d^3\mathbf{r}', \tag{11.92}$$

где $w(E_i) = Z^{-1}e^{-\beta E_i}$ — распределение Гиббса, и $\widetilde{a} = am_{\rm n}/\mu = a(1 + m_{\rm n}/m)$. В силу пространственной однородности системы выражение под знаком интеграла зависит лишь от $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$, и поэтому один из интегралов по $d^3\mathbf{r}\,d^3\mathbf{r}'$ сокращается с объемом системы V. Принимая это во внимание, получаем окончательное выражение для сечения рассеяния:

$$\frac{d\sigma}{do'\,d\omega} = \frac{\widetilde{a}^2p'}{p}\sum_{i,f}\int w(E_i)\,\delta(E_f - E_i - \hbar\omega)\,\langle i|\widehat{\rho}(\mathbf{r})|f\rangle\langle f|\widehat{\rho}(0)|i\rangle\,e^{i\mathbf{qr}}\,d^3\mathbf{r}. \tag{11.93}$$

Чтобы связать полученное выражение со структурным фактором, определенным в (11.29) через мнимую часть двухчастичной функции Грина, $S(\omega,\,\mathbf{q}) = 2\,\mathrm{Im}\,\mathcal{K}^R(\omega,\,\mathbf{q})$, рассмотрим выражение (11.24) для запаздывающей корреляционной функции плотности и перепишем его в базисе собственных состояний системы. Повторяя вычисления, подобные проделанным в задаче 37, запишем фурье-образ $\mathscr{K}^R(\omega,\,\mathbf{q})$ в следующем виде:

$$\mathscr{K}^R(\omega,\,\mathbf{q}) = \sum_{if}\int \frac{\langle i|\widehat{\rho}(\mathbf{r})|f\rangle\langle f|\widehat{\rho}(0)|i\rangle}{\omega + E_i - E_f + i0}\,(w(E_f) - w(E_i))\,e^{i\mathbf{qr}}\,d^3\mathbf{r}. \quad (11.94)$$

Рассмотрим мнимую часть функции (11.94):

$$\mathrm{Im}\,\mathscr{K}^R(\omega,\,\mathbf{q}) = \pi\sum_{if}\int\langle i|\widehat{\rho}(\mathbf{r})|f\rangle\langle f|\widehat{\rho}(0)|i\rangle \times \\ \times (w(E_i) - w(E_f))\,\delta(E_f - E_i - \omega)e^{i\mathbf{qr}}\,d^3\mathbf{r}. \quad (11.95)$$

Заметим, что $w(E_i) - w(E_f) = w(E_i)\left[1 - e^{-\beta(E_f - E_i)}\right] = w(E_i)\,\times$ $\times\,(1 - e^{-\beta\omega})$. Сравнивая результаты (11.93) и (11.95), получаем

$$\frac{d\sigma}{do'\,d\omega} = \frac{\widetilde{a}^2 p'}{\pi p}\,\frac{\mathrm{Im}\,\mathscr{K}^R(\omega,\,\mathbf{q})}{1 - e^{-\beta\omega}} = \frac{\widetilde{a}^2 p'}{2\pi p}\,\frac{S(\omega,\,\mathbf{q})}{1 - e^{-\beta\omega}}, \quad (11.96)$$

что и доказывает соотношение (11.28).

72. (*Второе решение.*) Выведем соотношение (11.28) между сечением рассеяния нейтрона и функцией Грина $\mathcal{K}^R(\omega,\,\mathbf{q})$, не используя золотого правила. Изложенный ниже вывод опирается на полученный в задаче 40 общий результат (7.38), связывающий мацубаровские и запаздывающие функции Грина.

Идея заключается в том, чтобы рассмотреть функцию Грина нейтрона, рассеивающегося на флуктуациях плотности среды. Вероятность рассеяния в единицу времени может быть получена из соответствующей собственно-энергетической части по формуле $1/2\tau = -\,\mathrm{Im}\,\Sigma(\varepsilon,\mathbf{p})$. Поскольку взаимодействие нейтрона с атомами системы можно описать с помощью псевдопотенциала (11.26), нам будет достаточно рассмотреть изображенную на рис. 11.10 диаграмму для собственно-энергетической части низшего порядка. На этой диаграмме прямая линия обозначает гриновскую функцию нейтрона

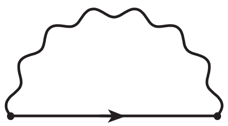

Рис. 11.10

$$G_n(\varepsilon,\mathbf{p}) = \frac{1}{\varepsilon - \mathbf{p}^2/2m_\mathrm{n} + \mu_n + i0\,\mathrm{sgn}\,\varepsilon}, \quad (11.97)$$

а волнистая — пропагатор флуктуаций плотности $\mathscr{K}(x,x')$. Величина μ_n есть химический потенциал нейтронов, который следует устремить

к $-\infty$, поскольку в системе отсутствуют равновесные нейтроны. Рассматривая среду при конечной температуре, удобно воспользоваться мацубаровской техникой. При этом собственно-энергетическая часть нейтрона равна

$$\Sigma(i\varepsilon_m,\mathbf{p}) = \left(\frac{2\pi a}{\mu}\right)^2 T\sum_{\omega_n}\int G_n(i\varepsilon_m - i\omega_n,\mathbf{p}')\,\mathcal{K}(i\omega_n,\mathbf{p}' - \mathbf{p})\,\frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3}. \quad (11.98)$$

Аналитическое продолжение мацубаровской собственно-энергетической части (11.98) может быть выполнено методом, рассмотренным в задаче 40б.

Чтобы установить соответствие с использованными в задаче 40б величинами, заметим, что корреляционная функция плотности $\mathcal{K}(i\omega_n,\mathbf{q})$ по своим аналитическим свойствам аналогична фононному пропагатору, а функция Грина нейтрона — электронной функции Грина. Выражение (11.98) имеет тот же вид, что электрон-фононная собственно-энергетическая часть (7.37). Поэтому в результате аналитического продолжения получается следующее:

$$\Sigma(\varepsilon,\mathbf{p}) = \left(\frac{2\pi a}{\mu}\right)^2\int\cdots\int\frac{\mathrm{Im}\,G_n^R(\varepsilon',\mathbf{p}')\,\mathrm{Im}\,\mathscr{K}^R(\omega,\mathbf{p} - \mathbf{p}')}{\varepsilon - \varepsilon' - \omega + i0}\,\times \\ \times\left(\mathrm{th}\,\frac{\varepsilon'}{2T} + \mathrm{cth}\,\frac{\omega}{2T}\right)\frac{d^3p'\,d\omega d\varepsilon'}{\pi(2\pi)^4}. \quad (11.99)$$

Мнимая часть (11.99) есть обратное время рассеяния, $1/2\tau =$ $= \mathrm{Im}\,\Sigma(\varepsilon,\mathbf{p})$, поэтому

$$\frac{1}{\tau} = 2\pi\left(\frac{2\pi a}{\mu}\right)^2\int\left(\mathrm{th}\,\frac{\varepsilon'}{2T} + \mathrm{cth}\,\frac{\omega}{2T}\right)\times \\ \times\,\mathrm{Im}\,\mathscr{K}^R(\omega,\mathbf{p} - \mathbf{p}')\delta\left(\varepsilon - \omega - \varepsilon'\right)\frac{d^3\mathbf{p}'\,d\omega}{(2\pi)^4}, \quad (11.100)$$

где $\varepsilon' = \mathbf{p}'^2/2m_\mathrm{n} - \mu_n$ — энергия рассеянного нейтрона. Как уже было отмечено, переход к пределу одного нейтрона соответствует большим отрицательным μ_n. В пределе $|\mu_n| \gg T$ гиперболический тангенс $\mathrm{th}\,\varepsilon'/2T$ в (11.100) можно заменить единицей, после чего выражение в скобках в (11.100) оказывается равным $2/(1 - e^{-\beta\omega})$. Последним необходимым шагом является интегрирование по $|\mathbf{p}'|$, устраняющее оставшуюся δ-функцию. Получаем

$$\frac{1}{\tau} = \frac{a^2}{\pi\mu^2}\int m_\mathrm{n}|\mathbf{p}'|\,\frac{\mathrm{Im}\,\mathscr{K}^R(\omega,\mathbf{p} - \mathbf{p}')}{1 - e^{-\omega/T}}\,d\omega do', \quad (11.101)$$

где $|\mathbf{p}'|$ определяется из закона сохранения энергии при рассеянии, $\mathbf{p}'^2/2m_\mathrm{n} = \mathbf{p}^2/2m_\mathrm{n} - \omega$.

Сечение рассеяния связано со временем рассеяния по формуле $\tau^{-1} = \sigma v$, где $v = p/m_{\rm n}$ — скорость нейтрона (мы считаем нормировочный объем равным единице). Получаем

$$\sigma = \frac{a^2 m_{\rm n}^2}{\pi \mu^2} \int \frac{p'}{p} \frac{\operatorname{Im} \mathcal{K}^R(\omega, \mathbf{p}-\mathbf{p}')}{1-e^{-\omega/T}}\, d\omega\, do'. \tag{11.102}$$

Представив полное сечение в виде

$$\sigma = \int \frac{d^2\sigma}{d\omega do'}\, d\omega\, do' \tag{11.103}$$

и сравнивая это выражение с (11.102), приходим к (11.96).

73 а. Вычислим структурный фактор $S(\omega, \mathbf{q})$ идеального ферми-газа. Рассмотрим для этого мацубаровский коррелятор плотность–плотность

$$\mathcal{K}_M(i\omega_n,\, \mathbf{q}) = \frac{1}{2} \int\limits_{-\beta}^{\beta} \langle \mathrm{T}_\tau\, \widehat{\rho}(\mathbf{r},\, \tau)\, \widehat{\rho}(0,0)\rangle e^{i\omega_n\tau - i\mathbf{qr}}\, d^3\mathbf{r}\, d\tau. \tag{11.104}$$

Спаривая ψ-операторы, получаем, что неприводимая часть среднего (11.104) дается обычной петлевой диаграммой и равна

$$\mathcal{K}_M(i\omega_n,\, \mathbf{q}) = T \sum_{\varepsilon_m} \int G\left(i\varepsilon_m,\, \mathbf{p}-\mathbf{q}/2\right)\; G\left(i\varepsilon_m + i\omega_n,\, \mathbf{p}+\mathbf{q}/2\right)\, \frac{2d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}. \tag{11.105}$$

(приводимая часть (11.104) не зависит от τ и потому не дает вклада в структурный фактор при ненулевой частоте). Суммируя по ε_m с помощью тождества (7.85), получаем

$$\mathcal{K}_M(i\omega_n,\, \mathbf{q}) = \int \frac{n_F(\xi_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2}) - n_F(\xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2})}{i\omega_n - \xi_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2} + \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2}}\, \frac{2d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}. \tag{11.106}$$

Аналитическое продолжение этого выражения достигается заменой $i\omega_n$ на $\omega + i0$. Вычисляя мнимую часть и связывая ее со структурным фактором согласно $S(\omega, \mathbf{q}) = 2 \operatorname{Im} \mathcal{K}^R(\omega, \mathbf{q})$, получаем общую формулу

$$S(\omega,\, \mathbf{q}) = 2\pi \int \left[n_F(\xi_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2}) - n_F(\xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2})\right] \times \\ \times\, \delta\left(\omega + \xi_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2} - \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2}\right)\, \frac{2d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}. \tag{11.107}$$

Упростим интеграл по $d^3\mathbf{p}$ в выражении (11.107). Пусть ось z направлена вдоль вектора $\mathbf{q}$. Введем обозначение $x = \cos\theta$, где θ — угол между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$. Тогда интеграл (11.107) перепишется в таком виде:

$$S(\omega,\, \mathbf{q}) = 2\pi \int\limits_0^\infty \int\limits_{-1}^{1} \left[n_F(\xi_-) - n_F(\xi_+)\right]\, \delta\left(\omega - \frac{pqx}{m}\right)\, \frac{2\pi p^2\, dp\, dx}{(2\pi)^3}, \tag{11.108}$$

где

$$\xi_\pm = \frac{p^2 - p_0^2}{2m} + \frac{q^2}{8m} \pm \frac{pqx}{2m}. \tag{11.109}$$

Интегрирование по x сводится к замене x на $x_0 = m\omega/pq$. При этом следует учесть, что интеграл равен нулю при $|x_0| > 1$. Таким образом, структурный фактор есть

$$S(\omega, \mathbf{q}) = \frac{m}{\pi q} \int\limits_{m|\omega|/q}^{\infty} \left[n_F(\xi_-) - n_F(\xi_+)\right]\, p dp. \tag{11.110}$$

До сих пор мы не делали никаких предположений о величине температуры. Хотя интеграл в (11.110) вычисляется элементарно при произвольной температуре, мы найдем структурный фактор $S(\omega, \mathbf{q})$ только в пределе нулевой температуры. При $T = 0$ фермиевская функция распределения принимает значения 0 и 1. Поэтому выражение (11.110) можно записать в виде

$$S(\omega, q) = \frac{m}{\pi q} \int\limits_{m|\omega|/q}^{\infty} \left(\theta(p_-^2 - p^2) - \theta(p_+^2 - p^2)\right) p dp, \tag{11.111}$$

где

$$p_\pm^2 = p_0^2 - q^2/4 \mp m\omega \tag{11.112}$$

— корни уравнений $\xi_\pm = 0$. Рассмотрим для определенности случай $\omega > 0$. Тогда $p_- > p_+$. В зависимости от того, как нижний предел интегрирования $m\omega/q$ соотносится с p_+ и p_-, возможны разные случаи.

а. Во-первых, при $m\omega/q > p_-$ интеграл (11.111) оказывается равным нулю. Это происходит при

$$\left(\frac{m\omega}{q}\right)^2 > p_0 + m\omega - \frac{q^2}{4}. \tag{11.113}$$

Выделяя полный квадрат, получаем уравнение границы области $S(\omega, \mathbf{q}) > 0$:

$$\left|\frac{m\omega}{q} - \frac{q}{2}\right| = p_0. \tag{11.114}$$

Эта граница состоит из двух несвязных частей:

$$\omega_{1,2}(q) = \pm \frac{p_0 q}{m} + \frac{q^2}{2m}. \tag{11.115}$$

б. Во-вторых, при $m\omega/q < p_+$ интегрирование в (11.111) производится от p_- до p_+, что дает

$$S = \frac{m}{2\pi q}\, \left(p_+^2 - p_-^2\right) = \frac{m\omega}{\pi q}. \tag{11.116}$$

Это выражение справедливо в области

$$\left(\frac{m\omega}{q}\right)^2 < p_0 - m\omega - \frac{q^2}{4}, \tag{11.117}$$

т. е. при

$$\omega < \omega_3(q) = \frac{p_0 q}{m} + \frac{q^2}{2m}. \tag{11.118}$$

в. Наконец, если $p_+ < m\omega/q < p_-$, то интегрировать по dp следует от $p = m\omega/q$ до $p = p_-$. В этом случае структурный фактор равен

$$S(\omega, \mathbf{q}) = \frac{m}{2\pi q}\left[p_-^2 - \left(\frac{m\omega}{q}\right)^2\right]. \tag{11.119}$$

Удобно переписать это выражение, выделив полный квадрат:

$$S(\omega, \mathbf{q}) = \frac{m}{2\pi q}\left[p_0^2 - \left(\frac{m\omega}{q} - \frac{q}{2}\right)^2\right]. \tag{11.120}$$

Собирая результаты для различных предельных случаев вместе и вводя безразмерные переданные энергию $\widetilde{\omega} = m\omega/p_0^2$ и импульс $\widetilde{q} = q/p_0$, приходим к следующему ответу:

$$S(q,\omega) = \frac{mp_0}{2\pi\widetilde{q}}\begin{cases} 0 & \text{при } \widetilde{\omega} > \widetilde{q} + \widetilde{q}^2/2; \\ 0 & \text{при } 0 < \widetilde{\omega} < \widetilde{q}^2/2 - \widetilde{q}; \\ 2\widetilde{\omega} & \text{при } 0 < \widetilde{\omega} < \widetilde{q} - \widetilde{q}^2/2; \\ 1 - (\widetilde{\omega}/\widetilde{q} - \widetilde{q}/2)^2 & \text{при } \widetilde{\omega} > \widetilde{q} - \widetilde{q}^2/2. \end{cases} \tag{11.121}$$

На рис. 11.11 изображены линии уровня $S(\omega, q)$ и показаны границы области, где $S(\omega,\, q) \neq 0$. Изображены также кривые $\omega = q^2/2m$ и $m\omega = p_0 q - q^2/2$. Граница области $S(\omega, \mathbf{q}) > 0$ пересекает прямую $\omega = 0$ при $q = 2p_0$. В этой же точке оканчивается граница области $m\omega = p_0 q - q^2/2$. Таким образом, точка $q = 2p_0$ оказывается особой точкой структурного фактора. Эту особенность можно интерпретировать, рассматривая рассеяние нейтрона жидкостью как рождение пары частица–дырка. При этом ω — это энергия пары, а $\mathbf{q}$ — ее импульс. Если $q < 2p_0$, то энергия пары может быть как угодно мала, потому что пару с таким импульсом можно создать, переместив частицу вдоль ферми-поверхности в состояние с другим импульсом, но с почти той же энергией. Если же $q > 2p_0$, то частицу придется перевести в состояние с другой энергией, поскольку на ферми-поверхности нет состояний с требуемым импульсом. Именно этот эффект и создает особенность при $q = 2p_0$.

Интересно отметить, что максимум структурного фактора $S(\omega, \mathbf{q})$ при фиксированном $|\mathbf{q}| > p_0$ достигается при $\omega = \mathbf{q}^2/2m$, что соответствует закону дисперсии частиц (см. (11.120)). Парабола $\omega = q^2/2m$ изображена на рис. 11.11.

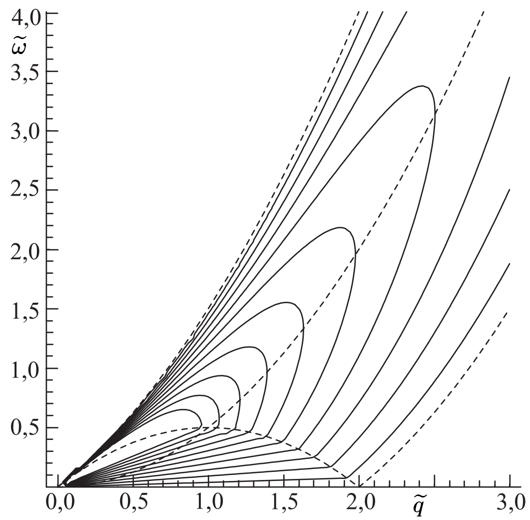

Рис. 11.11

73б. Рассмотрим структурный фактор ферми-жидкости. Естественно ожидать, что он будет похож на структурный фактор ферми-газа, с тем лишь отличием, что в нем должно быть слагаемое, отвечающее процессам рассеяния с испусканием кванта нуль-звука.

Гамильтониан взаимодействующих фермионов имеет вид (8.1). Для простоты будем считать, что взаимодействие между частицами слабое и короткодействующее: $V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = g\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Мацубаровский коррелятор плотность–плотность $K(\omega,\, \mathbf{q})$, через который выражается структурный фактор, получается суммированием «пузырьковых» диаграмм, изображенных на рис. 11.12.

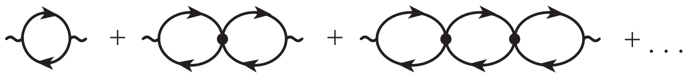

Рис. 11.12

Вершина взаимодействия на рис. 11.12 с учетом спиновой структуры есть

$$g\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\left(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\alpha'\beta'} - \delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\beta\beta'}\right), \tag{11.122}$$

где первое слагаемое (11.122) представляет собой хартриевский вклад, а второе — фоковский, или обменный вклад. В случае короткодействия оба эти вклада имеют одну и ту же координатную зависимость и должны быть рассмотрены одновременно.

Отметим, что в задаче 44 при рассмотрении последовательности диаграмм для динамически экранированного кулоновского взаимодействия $V(\omega, |\mathbf{q}|)$ мы ограничились учетом одного лишь хартриевского вклада в вершину взаимодействия. Такое упрощение было возможно из-за того, что для кулоновского взаимодействия при малом переданном импульсе $|\mathbf{q}| \ll p_0$ хартриевский вклад много больше фоковского. Более того, именно хартриевское взаимодействие $4\pi e^2/\mathbf{q}^2$ расходится при $\mathbf{q} \to 0$, из-за чего и возникает необходимость рассматривать задачу об экранировании. В случае же короткодействия ситуация совершенно другая. Это видно уже из того, что хартриевский и фоковский вклады полностью сокращают друг друга для частиц с одной и той же проекцией спина. Короткодействующий потенциал приводит к взаимодействию только для фермионов с противоположными спинами. Чтобы принять во внимание это обстоятельство необходимо просуммировать лестничные диаграммы на рис. 11.12 с учетом спиновой структуры взаимодействия (11.122).

Диаграммам на рис. 11.12 соответствует запаздывающая двухчастичная функция Грина

$$K^R(\omega,\,\mathbf{q}) = -\Pi(\omega,\,\mathbf{q}) - g\Pi^2(\omega,\,\mathbf{q}) - g^2\Pi^3(\omega,\,\mathbf{q}) - \ldots = -\frac{\Pi(\omega,\,\mathbf{q})}{1 - g\Pi(\omega,\,\mathbf{q})}, \tag{11.123}$$

где $\Pi(\omega,\,\mathbf{q})$ — запаздывающий поляризационный оператор. Воспользуемся найденным в задаче (44) точным выражением для $\Pi(\omega,\,\mathbf{q})$ идеального ферми-газа:

$$\Pi(\omega, \mathbf{q}) = \frac{\nu_0}{8a}\left(F(s-a) - F(s+a)\right), \quad a = \frac{q}{2p_0}, \quad s = \frac{\omega + i0}{v_F k}, \tag{11.124}$$

где

$$F(u) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{1-x^2}{u-x}dx = 2u + (1-u^2)\ln\frac{u+1}{u-1}. \tag{11.125}$$

Чтобы получить запаздывающую функцию мы добавили $i0$ к ω. Отметим, что поляризационный оператор (11.124) в два раза меньше соответствующего поляризационного оператора из задачи 44. Дело в том, что частичное сокращение между хартриевским и фоковским вкладами (11.122) приводит к тому, что в (11.124) входит плотность состояний ν_0 с одной проекцией спина.

Структурный фактор $S(\omega,\,\mathbf{q}) = 2\,\mathrm{Im}\,K^R(\omega,\,\mathbf{q})$, соответствующий (11.123) и (11.124), изображен на рис. 11.13 для $g\nu_0 = 3$.

Обратим внимание на резкий пик при частотах несколько выше границы непрерывного спектра, сответствующего рассмотренному в части а вкладу квазичастиц. Этот пик представляет собой вклад нуль-звуковой моды. Нуль-звуковой пик на рис. 11.13 характеризуется приблизительно линейной зависимостью ω от q. Он существует только при не слишком больших q и вливается в непрерывный спектр при $q \approx 0,8p_0$. Такое поведение иллюстрирует рассмотренное в задаче (44) свойство закона дисперсии коллективных мод в ферми-жидкости — иметь точку окончания на границе непрерывного спектра квазичастичных возбуждений.

Интересно рассмотреть область малых $q \ll p_0$, $\omega \ll E_F$, в которой выражение для поляризационного оператора (11.124) упрощается:

$$\Pi(\omega,\,\mathbf{q}) \equiv \Pi(s) = -\nu_0\left(1 - \frac{s}{2}\ln\frac{s+1}{s-1}\right), \quad s = \frac{\omega + i0}{v_F q}. \tag{11.126}$$

Уравнение $g\Pi(s) = 1$ для полюса $K^R(\omega,\,\mathbf{q})$ в точности совпадает с полученным в гл. 8 уравнением (8.11), дающим закон дисперсии нулевого звука. Скорость нуль-звуковой моды $\omega = s_0 v_F|\mathbf{q}|$ зависит от константы взаимодействия g, причем $s_0 > 1$ при любом отталкивательном взаимодействии $g > 0$.

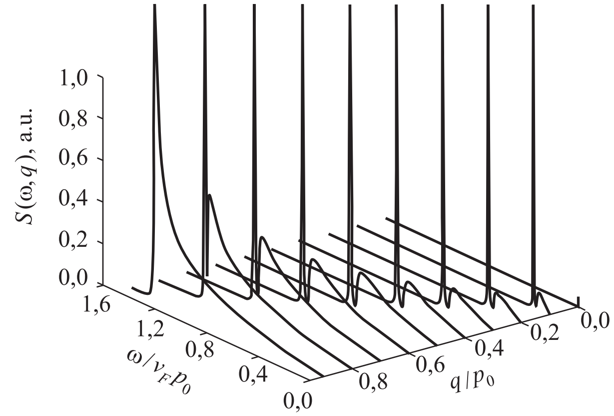

Рис. 11.13

С другой стороны, мнимая часть выражения (11.126) отлична от нуля только при $s < 1$, причем в этой области $\mathrm{Im}\,\Pi(s) = \frac{\pi}{2}\nu_0 s$. Поэтому структурный фактор (11.123) можно записать в виде

$$K(s) = \frac{A}{s - s_0} + K(s), \tag{11.127}$$

где A — вычет $K(s)$ в полюсе $s = s_0$, а $K(s)$ — регулярная функция, равная нулю при $s > 1$.

Величину A нетрудно найти, вычисляя вычет выражения $K(s) = -\Pi(s)/(1 - g\Pi(s))$. Получаем

$$A = \frac{\Pi(s_0)}{g\left.\dfrac{d\Pi(s)}{ds}\right|_{s=s_0}} = \frac{2}{g^2\nu_0\left[\ln\dfrac{s_0+1}{s_0-1} - \dfrac{2s_0}{s_0^2-1}\right]}. \tag{11.128}$$

Учитывая, что скорость нуль-звука s_0 удовлетворяет соотношению $g\Pi(s) = 1$, выражение для A можно упростить:

$$A = \frac{s_0(s_0^2 - 1)}{g\left[1 - g\nu_0\ (s_0^2 - 1)\right]}. \qquad (11.129)$$

Итак, нуль-звуковой полюс в (11.127) приводит к δ-функционной особенности в структурном факторе. Пик оказывается резким, поскольку в линеаризованной теории ферми-жидкости нуль-звук не затухает. В действительности же ширина пика будет конечной, порядка обратного времени затухания $\approx \max\left[\omega^2, T^2\right]$.

Подчеркнем еще раз, что выражение (11.127) справедливо только при достаточно малых q, а при больших q нуль-звуковой пик сливается с непрерывным вкладом, и $K(s)$ исчезает. Отметим, что с формальной точки зрения наши результаты ограничены предположением о малости взаимодействия g, позволяющим отбросить все диаграммы кроме пузырьковых. На самом же деле все сказанное о поведении структурного фактора в области $q \ll p_0$, $\omega \ll E_F$ качественно справедливо и для произвольно сильного взаимодействия. Дело в том, что в этой области работает теория ферми-жидкости и для нахождения корреляционной функции плотность–плотность можно воспользоваться кинетическим уравнением (8.7), решение которого эквивалентно суммированию пузырьковых диаграмм.

74а. Из гамильтониана (11.27) взаимодействия нейтронов с плотностью ядер, рассмотренного в задачах (72) и (73), нетрудно получить вид взаимодействия в модели дебаевского желе:

$$\widehat{\mathscr{H}}_{\text{int}} = -\frac{2\pi a\hbar^2}{\mu}\delta\widehat{\rho}(\widehat{\mathbf{R}}, t), \quad \delta\widehat{\rho} = -\rho_0 \operatorname{div}\mathbf{u}, \qquad (11.130)$$

где $\widehat{\mathbf{R}}$ — координата нейтрона. Соответственно, вклад фононов в структурный фактор есть $S(\omega, \mathbf{q}) = 2\operatorname{Im}\mathscr{K}^R(\omega, \mathbf{q})$, где

$$\mathscr{K}^R(\mathbf{r}, t) = -i\left(\frac{2\pi a\hbar^2}{\mu}\right)^2 \begin{cases} \langle\delta\widehat{\rho}(\mathbf{r}, t)\delta\widehat{\rho}(0,0) - \delta\widehat{\rho}(0,0)\delta\widehat{\rho}(\mathbf{r}, t)\rangle_{\text{т}}, & t > 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases} \qquad (11.131)$$

Сравнивая это выражение с определением фононной функции Грина $\mathscr{D}^R(x, x') = -i\theta(t - t')\langle[\widehat{\varphi}(x), \widehat{\varphi}(x')]\rangle_{\text{т}}$, где $\widehat{\varphi}(x) = c\sqrt{\rho_0}\operatorname{div}\mathbf{u}$ (см. выражения (6.5) и (6.7)), получаем соотношение

$$\mathscr{K}^R(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{2\pi a\hbar^2}{\mu c}\right)^2 \mathscr{D}^R(\mathbf{r}, t). \qquad (11.132)$$

Запаздывающая функция Грина дебаевских фононов есть

$$\mathscr{D}^R(\omega, \mathbf{q}) = \frac{\omega_0^2(\mathbf{q})}{\omega^2 - \omega_0^2(\mathbf{q}) + i0\operatorname{sgn}\omega}, \quad \omega_0(\mathbf{q}) = c|\mathbf{q}|. \qquad (11.133)$$

Отсюда: $\operatorname{Im}\mathscr{D}^R(\omega, \mathbf{q}) = \frac{\pi}{2}\omega_0(\mathbf{q})\left[\delta(\omega - \omega_0(\mathbf{q})) - \delta(\omega + \omega_0(\mathbf{q}))\right]$, и поэтому

$$S(\omega, \mathbf{q}) = \pi\left(\frac{2\pi a\hbar^2}{\mu c}\right)^2 \omega_0(\mathbf{q})\left(\delta(\omega - \omega_0(\mathbf{q})) - \delta(\omega + \omega_0(\mathbf{q}))\right). \qquad (11.134)$$

Отметим, что отрицательный знак второго слагаемого в (11.134) согласуется с требованием положительности вероятности рассеяния нейтронов. Это обеспечивается множителем $1/(1 - e^{-\beta\omega})$ в выражении (11.28) для сечения рассеяния.

Как следует из (11.134), вероятность рассеяния с передачей кристаллу энергии ω и импульса $\mathbf{q}$ пропорциональна

$$(N_{\mathbf{q}} + 1)\ \delta(\omega - \omega_0(\mathbf{q})) + N_{\mathbf{q}}\,\delta(\omega + \omega_0(\mathbf{q})), \quad N_{\mathbf{q}} = \frac{1}{e^{\beta\omega_0(\mathbf{q})} - 1} \qquad (11.135)$$

— бозевская функция распределения. Таким образом, положение пика в структурном факторе, рассматриваемое как функция ω и $\mathbf{q}$, позволяет определить спектр фононов.

74б. Функция Грина фонона в металле $D_0(\omega, \mathbf{q}) = \omega_0^2(\mathbf{q})/(\omega^2 - \omega_0^2(\mathbf{q}))$ перенормируется за счет электрон-фононного взаимодействия. Согласно теории Мигдала (см. задачу 31), все наиболее существенные эффекты можно учесть с помощью поляризационного оператора, причем сам поляризационный оператор может быть найден через перенормированные функции Грина без учета вершинных поправок. Соответственно

$$D(\omega, \mathbf{q}) = \frac{D_0(\omega, \mathbf{q})}{1 - g^2\Pi(\omega, \mathbf{q})D_0(\omega, \mathbf{q})} = \frac{\omega_0^2(\mathbf{q})}{\omega^2 - \omega_0^2(\mathbf{q})(1 + g^2\Pi(\omega, \mathbf{q}))}, \quad \omega_0(\mathbf{q}) = c|\mathbf{q}|, \qquad (11.136)$$

где поляризационный оператор $\Pi(\omega, \mathbf{q})$ дается соотношениями (11.124) и (11.125). При этом, как и в задачах 31 и 44, нас интересует только «хартриевские» вклады, дающиеся диаграммами, которые распадаются на несвязные части при разрезании любой фононной линии (остальные диаграммы малы в силу теоремы Мигдала — см. задачу 30). Поэтому в выражениях (11.124) и (11.125) в данном случае следует использовать плотность состояний $\nu = 2\nu_0$, учитывающую обе проекции спина.

Поскольку характерные ω и q, представляющие для нас интерес, есть $\omega \approx cq$, безразмерный параметр $s = \omega/(v_F q)$ в данном случае много меньше единицы. Соответственно, переходя в (11.124) к пределу $s \ll a = k/2p_0$, мы получаем

$$\Pi(a)_{s=0} = -\frac{\nu}{4a}\left(2a + \left(1 - a^2\right)\ln\frac{1+a}{1-a}\right). \qquad (11.137)$$

Плотность состояний ν в (11.137) должна быть определена с учетом электрон-фононной перенормировки, найденной в задаче 29. Полюс функции Грина (11.136) дает перенормированный закон дисперсии фононов

$$\omega = \omega_0(\mathbf{q})\sqrt{1 + g^2\Pi\,\frac{|\mathbf{q}|}{2p_0}}. \qquad (11.138)$$

Выражение (11.137) имеет при $|\mathbf{q}| = 2p_0$ слабую особенность, приводящую к логарифмической расходимости перенормированной скорости звука $\widetilde{c} = d\omega/dq$. Эта особенность и есть коновская аномалия.

Вклад фононов в структурный фактор, согласно (11.132) и (11.136), есть

$$S(\omega,\,\mathbf{q}) = 2\left(\frac{2\pi a\hbar^2}{\mu c}\right)^2 \,\mathrm{Im}\, \frac{\omega_0^2(\mathbf{q})}{(\omega+i0)^2 - \omega_0^2(\mathbf{q})(1+g^2\Pi(\omega+i0,\mathbf{q}))}. \tag{11.139}$$

На рис. 11.14 мы изобразили структурный фактор, получающийся при использовании выражений (11.124) и (11.125) для $\Pi(\omega,\,\mathbf{q})$. Значение константы электрон-фононного взаимодействия было выбрано равным $g^2\nu = 8/9$.

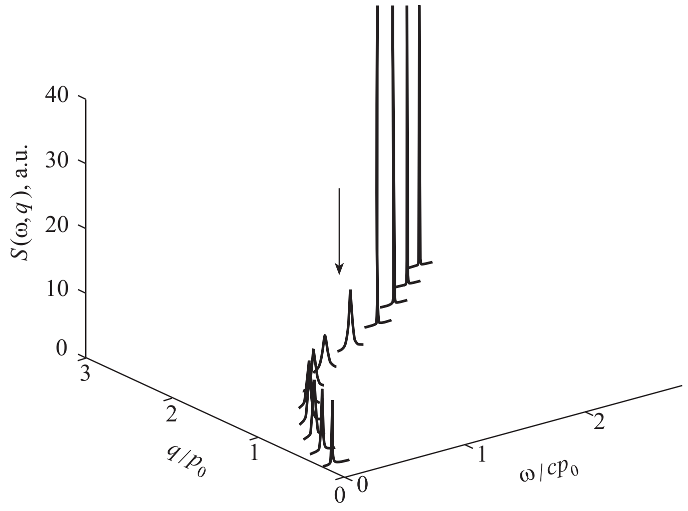

Рис. 11.14

Положение пика в плоскости (ω, q) дает закон дисперсии фононов $\omega(q)$. При $q \lesssim 2p_0$ зависимость $\omega(q)$ приблизительно линейная с наклоном $d\omega/dq = c\sqrt{1-g^2\nu}$, что соответствует переномировке скорости акустических фононов — см. задачу 31а. При $q > 2p_0$ перенормировка скорости постепенно исчезает. На рис. 11.14 хорошо видно также резкое возрастание наклона $d\omega/dq$ в окрестности $q = 2p_0$, помеченной стрелкой. Отметим, что конечная ширина пиков на рис. 11.14 связана с тем, что электрон-фононное взаимодействие приводит к затуханию фононов в металле (см. задачу 31б).