ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 5

Список обозначений 8

I. Теория возмущений

Глава 1. **Квазичастицы** 9
1.1. Вторичное квантование. Канонические преобразования 9
1.2. Задачи 1–4 13
1.3. Решения задач 1–4 14
1.4. От спиновых операторов — к фермиевским 22

Глава 2. **Функция Грина** 25
2.1. Представление взаимодействия. Хронологическое упорядочение . 25
2.2. Задачи 5–10 28
2.3. Решения задач 5–10 30

Глава 3. **Квантовая механика одной частицы** 42
3.1. Теория возмущений и функция Грина 42
3.2. Задачи 11–15 44
3.3. Решения задач 11–15 47

Глава 4. **Взаимодействующие частицы** 57
4.1. Правила построения диаграмм 57
4.1.1. Блочное суммирование (60).
4.2. Полюсы функции Грина — спектр квазичастиц 61
4.2.1. Двухчастичная функция Грина (63).
4.3. Задачи 16–21 65
4.4. Решения задач 16–21 69

Глава 5. **Идеальный ферми-газ** 86
5.1. Электроны на ферми-поверхности 86
5.1.1. Формула Кубо (87).
5.2. Задачи 22–27 89
5.3. Решения задач 22–27 92

Глава 6. **Электроны и фононы** 107
6.1. Гамильтониан фононов. Диаграммная техника 107
6.2. Задачи 28–33 111
6.3. Решения задач 28–33 113
6.4. Эффект Пайерлса. Теория среднего поля 126

Глава 7. **Диаграммная техника при конечных температурах** 134
7.1. Мацубаровское время 134
7.2. Дискретные частоты 137
7.2.1. Метод аналитического продолжения (138).
7.3. Задачи 34–42 141

7.4. Решения задач 34–42 146

II. Методы теории многих тел

Глава 8. **Теория ферми-жидкости** 174
8.1. Квазичастицы 175
8.2. Кинетическое уравнение. Коллективные моды 177
8.3. Приближение случайных фаз 180
8.4. Задачи 43–49 185
8.5. Решения задач 43–49 190
8.6. Энергия взаимодействия в металле. Вигнеровский кристалл . . . 208
8.7. Микроскопическое обоснование теории ферми-жидкости 211

Глава 9. **Электроны в случайном потенциале** 216
9.1. Усреднение функций Грина по беспорядку 216
9.2. Усреднение функций отклика 221
9.3. Задачи 50–54 224
9.4. Задачи повышенной сложности 55–57 (слабая локализация и мезоскопика) 228
9.5. Решения задач 55–57 233
9.6. Диаграммы без самопересечений 260
9.7. Электронный спектр неупорядоченной системы 264
9.7.1. Хвост локализованных состояний (266).

Глава 10. **Сверхпроводимость** 268
10.1. Микроскопическая теория сверхпроводимости 268
10.1.1. Образование куперовских пар (268). 10.1.2. Квазичастицы в сверхпроводнике (272).
10.2. Диаграммная техника для теории Бардина–Купера–Шриффера 275
10.2.1. Рассеяние в куперовском канале. (275). 10.2.2. Функции Грина в сверхпроводнике (278).
10.3. Задачи 58–64 283
10.4. Трудные задачи 65–67 287
10.5. Решения задач 65–67 289

Глава 11. **Измерение функций Грина** 317
11.1. Туннелирование 317
11.2. Неупругое рассеяние 324
11.3. Задачи 68–74 327
11.4. Решения задач 68–74 331

Глава 12. **Бозонизация и латтинжеровская жидкость** 355
12.1. Гидродинамика одномерного ферми-газа 356
12.2. Коммутаторы операторов плотности 357
12.3. Модель Томонаги 359
12.4. От бозонов к фермионам 362
12.5. Задачи 75–82 366
12.6. Решения задач 75–82 369

Список литературы 386

Предметный указатель 387

ПРЕДИСЛОВИЕ

Метод функций Грина, впервые предложенный Р. Фейнманом в квантовой электродинамике, уже давно стал универсальным языком всей теоретической физики. Знание диаграммной техники и умение использовать функции Грина является неотъемлемой частью образования физика-теоретика, независимо от конкретной области его интересов. При этом студенту, желающему изучить эти методы, обычно приходится вначале знакомиться с ними в рамках курса квантовой теории поля, поскольку по историческим причинам в учебной литературе основное внимание уделялось именно этой области.

В теорию конденсированного состояния, изучающую квантовые свойства твердых тел и других многочастичных систем, диаграммная техника прочно вошла еще в середине 50-х годов. Как нетрудно проследить, практически все основные достижения в этой области теоретической физики были так или иначе связаны с развитием диаграммной техники. Применение функций Грина в теории твердого тела хорошо освещено в обширной литературе, центральное место в которой занимает хорошо известная монография А. А. Абрикосова, Л. П. Горькова и И. Е. Дзялошинского «Методы квантовой теории поля в статистической физике» ([1]). Эта замечательная книга, к сожалению, не может считаться учебником в полном смысле слова, поскольку в ней отсутствуют задачи, а кроме того предполагается, что читатель отчасти знаком с методами квантовой теории поля.

В настоящее время, однако, студенты часто изучают методы функций Грина, используя книгу [1] или другие аналогичные пособия, не после квантовой теории поля, а одновременно или даже несколько раньше. Это связано с тем, что современная физика твердого тела достаточно богата идеями и содержательными результатами, а теория конденсированного состояния имеет много связей с квантовой теорией поля. Поэтому нам казалось весьма полезным изложить необходимый для освоения диаграммной техники материал так, чтобы он был доступен студенту, знакомому лишь с основами квантовой механики.

Предлагаемая читателю книга возникла как попытка устранить указанный пробел в учебной литературе. Основу книги составили материалы занятий по теории твердого тела со студентами МФТИ в 1992–1994 гг., в которых в качестве учебника использовалась книга [1]. По собственному опыту авторам известно, что читателю «вечнозеленой книги о функциях Грина» приходится, как всегда при изучении трудного материала, самому придумывать себе примеры и простые задачи. Исходной идеей было — систематизировать этот опыт и снабдить читателя [1] достаточно интересными, но не слишком трудными задачами.

В процессе написания книги мы, следуя советам коллег, постарались сделать нашу книгу по возможности независимой от других учебных пособий. Для этого в начале всех главы помещены вступительные разделы, в которых напоминается необходимый теоретический материал, сравниваются различные подходы, кратко суммируются основные теоретические положения, и т.п. После этого идут разделы с задачами [1] и их подробными решениями. Иногда, если в этом имеется необходимость, приведено несколько различных решений одной и той же задачи. Помимо этого, воспользовавшись преимуществами избранной формы задачника, более свободной, чем учебник или монография, мы включили в книгу разнообразные отступления и «вставные новеллы», объясняющие мотивировку тех или иных задач, или поясняющие связь с вопросами теории, представляющими интерес в настоящее время и недостаточно освещенными в учебниках. Эти отступления помещены в конце некоторых глав.

Книга состоит из двух частей, что соответствует разделению материала по двум различным уровням трудности. Часть I имеет вводный характер. Ее основная идея — на примере фактов, известных читателю из курса квантовой механики, проиллюстрировать основные положения метода функций Грина и, так сказать, пересказать квантовую механику одной частицы на графическом языке диаграммной техники. Кроме того, в первой части вводится аппарат функций Грина, отдельно при нулевой и конечной температуре. При этом от читателя не требуется предварительного знакомства с физикой твердого тела, поскольку практически все используемые примеры имеют общефизический характер, а необходимый фактический материал изложен по ходу дела.

В часть II входят основные разделы современной теории твердого тела, такие как теория ферми-жидкости, теория неупорядоченных систем, включая возникшую за последние 20 лет теорию слабой локализации и квантовых эффектов в проводимости, а также теория сверхпроводимости, и теория одномерных сильно-коррелированных систем. Кроме того, в часть II включена глава «Измерение функций Грина», цель которой — установить связь между развиваемой теорией, опирающейся на функции Грина, и экспериментальными методами физики твердого тела. Кроме того, в этой главе сообщаются некоторые сведения из физики твердого тела, не всегда знакомые студентам-теоретикам.

Следует сказать, что отбор материала, легшего в основу части II, в сильной степени определяется вкусами и научными интересами авторов. При составлении задач мы стремились рассмотреть вопросы теории, представляющие интерес в настоящее время. При этом, однако, мы постарались избежать превращения книги в обзор современного состояния науки. Затронутые вопросы были отобраны в основном с

[1] Трудные задачи помечены знаком *. При первом чтении их можно пропустить.

точки зрения их общефизического интереса, а также исходя из того, насколько хорошо они иллюстрируют общий метод функций Грина.

В заключении нам хотелось бы поблагодарить наших коллег, без участия которых эта книга не появилась бы: Д. А. Иванова, М. А. Скворцова, Д. Е. Фельдмана и В. П. Рубана, любезно предоставивших свои решения задач, которые впоследствии были переработаны и включены в книгу. Мы признательны также М. Ю. Рейзеру за ценные советы и указание на некоторые дефекты в ротапринтном издании части I (МФТИ, 1997). Разумеется вся ответственность за (неизбежные) ошибки, имеющиеся в настоящей книге, лежит на авторах. Мы будем крайне благодарны всем, кто пожелает указать на ошибки, опечатки, или просто обсудить какой-либо связанный с книгой вопрос. Связаться с авторами проще всего по электронной почте: levitov@mit.edu, shytov@itp.ac.ru (см. также http://www.mit.edu/levitov).

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

E_F — энергия Ферми;

p_0 — фермиевский импульс;

v_F — скорость Ферми;

$\xi_{\mathbf{p}} = v_F(|\mathbf{p}| - p_0)$ — спектр электронов, линеаризованный вблизи уровня Ферми;

$\nu_0 = \dfrac{mp_0}{2\pi^2\hbar^3}$ — плотность состояний трехмерного бесспинового ферми-газа;

$\nu_{2D} = \dfrac{m}{2\pi\hbar^2}$ — плотность состояний двухмерного бесспинового ферми-газа;

$\nu_{1D} = \dfrac{m}{\pi\hbar p_0}$ — плотность состояний одномерного бесспинового ферми-газа;

$\mu_B = \dfrac{e\hbar}{2mc}$ — магнетон Бора;

c — скорость звука;

ω_D — дебаевская частота;

k_D — дебаевский волновой вектор;

g — константа электрон–фононного взаимодействия;

$\xi = g^2\nu_0$ — безразмерная константа электрон-фононного взаимодействия.

Постоянная Планка $\hbar$ полагается равной 1.

Часть I
ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Глава 1
КВАЗИЧАСТИЦЫ

1.1. Вторичное квантование. Канонические преобразования

Системы, состоящие из большого числа тождественных частиц, удобно изучать, пользуясь *методом вторичного квантования*. Напомним основную идею этого метода, не уточняя пока вид частиц. (В задачах физики твердого тела это могут быть, скажем, электроны, фононы, фотоны, экситоны и т. д.)

Рассмотрим вначале систему бозе-частиц, каждая из которых может находиться в одном из состояний $\psi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots$ Многочастичная волновая функция задается в *представлении чисел заполнения*, указывающем сколько частиц занимают каждое из состояний $\psi_i(x)$. В обозначениях Дирака такие состояния могут быть записаны как $|\ldots, N_{i-1}, N_i, N_{i+1}, \ldots\rangle$, где числа заполнения N_i принимают произвольные целые неотрицательные значения, $N_i = 0, 1, \ldots$ Канонические операторы рождения и уничтожения a_i^+ и a_i вводятся следующим образом:

$$\begin{aligned} a_i|\ldots, N_i, N_{i+1}, \ldots\rangle &= \sqrt{N_i}\,|\ldots, N_{i-1}, N_{i+1}, \ldots\rangle; \\ a_i^+|\ldots, N_i, N_{i+1}, \ldots\rangle &= \sqrt{N_i+1}\,|\ldots, N_{i+1}, N_{i+1}, \ldots\rangle. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Нетрудно проверить, что выполняются коммутационные соотношения:

$$\begin{aligned} [a_i, a_j^+] = a_i a_j^+ - a_j^+ a_i = \delta_{ij}; \\ [a_i, a_j] = [a_i^+, a_j^+] = 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Далее, вводятся *ψ-операторы*:

$$\widehat{\psi}(x) = \sum_i \widehat{a}_i \psi_i(x)\ ; \quad \widehat{\psi}^+(x) = \sum_i \widehat{a}_i^+ \psi_i^*(x). \tag{1.3}$$

Функции $\psi_i(x)$ выбирают таким образом, чтобы они образовывали полную ортонормированную систему. При этом коммутационные соот-

ношения ψ-операторов оказываются следующими:

$$[\widehat{\psi}(x), \widehat{\psi}^+(x')] = \delta(x-x'),$$
$$[\widehat{\psi}(x), \widehat{\psi}(x')] = [\widehat{\psi}^+(x), \widehat{\psi}^+(x')] = 0. \tag{1.4}$$

В случае ферми-статистики представление чисел заполнения, а также операторы рождения и уничтожения, их коммутационные соотношения и ψ-операторы вводятся сходным образом. Остановимся на отличиях бозевского и фермиевского вторичного квантования. Во-первых, в силу принципа Паули, числа заполнения N_i принимают всего два значения: $N_i = 0,\ 1$. Поэтому канонические операторы a_i и a_i^+ действуют так:

$$a_i|\dots, N_i, N_{i+1}, \dots\rangle = \begin{cases} |\dots, 0, N_{i+1}, \dots\rangle & \text{при } N_i = 1, \\ 0 & \text{при } N_i = 0; \end{cases}$$
$$a_i^+|\dots, N_i, N_{i+1}, \dots\rangle = \begin{cases} 0 & \text{при } N_i = 1, \\ |\dots, 1, N_{i+1}, \dots\rangle & \text{при } N_i = 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Во-вторых, антисимметрия многочастичного состояния по отношению к перестановке частиц приводит к антикоммутативности a_i и a_j^+:

$$[a_i^+, a_j]_+ = a_i^+ a_j + a_j a_i^+ = \delta_{ij},$$
$$[a_i, a_j]_+ = [a_i^+, a_j^+]_+ = 0. \tag{1.6}$$

Для ψ-операторов (1.3) соотношения антикоммутативности выглядят так:

$$[\widehat{\psi}(x), \widehat{\psi}^+(x')]_+ = \delta(x-x'),$$
$$[\widehat{\psi}(x), \widehat{\psi}(x')]_+ = [\widehat{\psi}^+(x), \widehat{\psi}^+(x')]_+ = 0. \tag{1.7}$$

Удобство представления вторичного квантования заключается в том, что связь между одно- и многочастичной задачами на языке ψ-операторов оказывается весьма простой. Например, нетрудно проверить, что гамильтониан системы невзаимодействующих бозе- или ферми-частиц, имеющих массу m и движущихся в потенциале $U(\mathbf{r})$, записывается так:

$$\widehat{\mathscr{H}} = \int \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \widehat{\psi}^+(\mathbf{r}) \nabla^2 \widehat{\psi}(\mathbf{r}) + \widehat{\psi}^+(\mathbf{r}) \widehat{\psi}(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}) \right) d^3 r. \tag{1.8}$$

А если частицы взаимодействуют по закону $V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, то гамильтониан нужно просто дополнить членом

$$\widehat{\mathscr{H}}_{\text{int}} = \frac{1}{2} \iint \widehat{\psi}^+(\mathbf{r}_1) \widehat{\psi}^+(\mathbf{r}_2) V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \widehat{\psi}(\mathbf{r}_2) \widehat{\psi}(\mathbf{r}_1) d^3 r_1 d^3 r_2. \tag{1.9}$$

Вторично квантованный *оператор плотности* $\widehat{\rho}(\mathbf{r}) = \widehat{\psi}^+(\mathbf{r}) \widehat{\psi}(\mathbf{r})$ является многочастичным эквивалентом одночастичного выражения

$|\psi(\mathbf{r})|^2$ для плотности вероятности. Интеграл от $\widehat{\rho}(\mathbf{r})$, взятый по всему пространству, есть оператор полного числа частиц в системе

$$\widehat{N} = \int \widehat{\psi}^+(\mathbf{r}) \widehat{\psi}(\mathbf{r}) \, d^3 r. \tag{1.10}$$

Подчеркнем, что все операторы (1.8)–(1.10) в представлении вторичного квантования имеют один и тот же вид и для фермионов, и для бозонов.

Остановимся теперь на важном понятии канонического преобразования и на том, как эти преобразования выглядят в представлении вторичного квантования. Напомним, что в классической механике канонические преобразования фазового пространства $(p, q) \to (p', q')$ вводятся с помощью скобок Пуассона $\{\dots\}$, причем роль этих преобразований заключается в том, что они сохраняют гамильтонову форму уравнений движения: $\dot{p} = \{p, H\}$, $\dot{q} = \{q, H\}$.

В квантовой механике роль скобок Пуассона переходит к коммутаторам. (Например, в представлении Гейзенберга уравнения движения имеют вид $i\hbar \partial_t \widehat{A} = [\widehat{A}, \widehat{\mathscr{H}}]$.) Поэтому каноническими называют преобразования физических величин, сохраняющие коммутационные соотношения операторов. Как и в классической механике, канонические преобразования важны, поскольку они сохраняют форму уравнений движения.

Подобрав каноническое преобразование, часто возможно перейти от взаимодействующих частиц к невзаимодействующим *квазичастицам*. Наиболее часто рассматривают линейные преобразования канонических операторов (бозонов или фермионов)

$$\widetilde{a}_i = \sum_j \left(U_{ij} a_j + V_{ij} a_j^+ \right), \quad \widetilde{a}_i^+ = \sum_j \left(V_{ij}^* a_j + U_{ij}^* a_j^+ \right), \tag{1.11}$$

называемые *преобразованиями Боголюбова*. Одной из часто встречающихся задач является отыскание спектра и собственных состояний гамильтониана, квадратичного по операторам рождения и уничтожения. Нетрудно проверить, что произвольный гамильтониан такого вида может быть приведен к диагональной форме с помощью соответствующим образом подобранного преобразования (1.11):

$$\widehat{\mathscr{H}} = \sum_{ij} h_{ij}^{(1)} a_i^+ a_j + h_{ij}^{(2)} a_i a_j + \text{h.c.} = \sum_i \varepsilon_i \widetilde{a}_i^+ \widetilde{a}_i \ + \ \langle 0 | \widehat{\mathscr{H}} | 0 \rangle. \tag{1.12}$$

Энергии ε_i дают спектр квазичастиц, а константа $\langle 0 | \widehat{\mathscr{H}} | 0 \rangle$ в правой части представляет собой так называемую энергию нулевых колебаний.

Преобразования (1.11) являются каноническими, если они сохраняют коммутационные соотношения:

$$[a_i, a_j]_\pm = 0, \quad [a_i, a_j^+]_\pm = \delta_{ij}. \tag{1.13}$$

Соответствующие условия на матрицы U и V в (1.11) в общем случае выглядят так:

$$U_{ki}V_{kj} \pm V_{ki}U_{kj} = 0, \quad U^*_{ki}U_{kj} \pm V^*_{ki}V_{kj} = \delta_{ij}, \tag{1.14}$$

где знак «+» соответствует случаю ферми-статистики, а знак «−» — случаю бозе-статистики.

Структура преобразований (1.11) для бозе-операторов видна уже в простейшем случае одной бозонной степени свободы (примером является квантовомеханический осциллятор). При этом U и V — не матрицы, а числа, и имеется всего два простейших однородных канонических преобразования:

$$\begin{aligned} \widetilde{a} &= \operatorname{ch}\lambda\ a + \operatorname{sh}\lambda\ a^+, \quad \widetilde{a} = e^{i\varphi}\,\widetilde{a}, \\ \widetilde{a}^+ &= \operatorname{sh}\lambda\ a + \operatorname{ch}\lambda\ a^+, \quad \widetilde{a}^+ = e^{-i\varphi}\,\widetilde{a}^+. \end{aligned} \tag{1.15}$$

где λ и φ —вещественные параметры. Более общие преобразования представляют собой произведение (композицию) преобразований (1.15).

В случае же ферми-статистики линейные канонические преобразования задаются сходным образом. Для одной фермионной степени свободы все линейные канонические преобразования исчерпываются сопряжением, $\widetilde{a} = a^+$, $\widetilde{a}^+ = a$, и умножением на фазовый множитель, $\widetilde{a} = e^{i\varphi}a^+$, $\widetilde{a}^+ = e^{-i\varphi}a$, а преобразования более общего вида в этом случае оказываются нелинейными — см. задачу 3. Более общие линейные преобразования возникают в системе из двух фермионов, например,

$$\begin{aligned} \widetilde{a} &= \cos\theta\ a - \sin\theta\ b^+, \qquad \widetilde{a}^+ = \cos\theta\ a^+ - \sin\theta\ b, \\ \widetilde{b}^+ &= \sin\theta\ a + \cos\theta\ b^+, \qquad \widetilde{b} = \sin\theta\ a^+ + \cos\theta\ b, \end{aligned} \tag{1.16}$$

где θ —параметр. Интересно, что первое из бозонных преобразований (1.15) есть псевдоевклидово вращение, т. е. не что иное, как преобразование Лоренца с быстротой λ в двумерном пространстве–времени, в то время как для фермионов возникают преобразования вида (1.16), соответствующие вращению евклидова пространства.

Возможные канонические преобразования не исчерпываются однородными линейными преобразованиями. Иногда бывают полезны неоднородные линейные преобразования (как в задаче 6) или даже нелинейные преобразования (см. задачу 3, а также разд. 1.4).

Часто встречающаяся разновидность линейных канонических преобразований — фурье-преобразование ψ-операторов:

$$\widehat{\psi}(\mathbf{r}) = \int e^{i\mathbf{pr}}\,\widehat{a}_{\mathbf{p}}\,\frac{d^3p}{(2\pi)^3}, \quad \widehat{\psi}^+(\mathbf{r}) = \int e^{-i\mathbf{pr}}\,\widehat{a}^+_{\mathbf{p}}\,\frac{d^3p}{(2\pi)^3}. \tag{1.17}$$

Принято выбирать нормировку операторов $\widehat{a}_{\mathbf{p}}$ и $\widehat{a}^+_{\mathbf{p}}$ так, чтобы

$$[\widehat{a}_{\mathbf{p}_1}, \widehat{a}^+_{\mathbf{p}_2}]_\pm = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2). \tag{1.18}$$

Такой выбор согласуется с определениями (1.4) и (1.7).

Имеется важный для теории твердого тела круг задач, когда ψ-операторы или другие величины заданы на решетке. Фурье-преобразование (1.17) нетрудно распространить на этот случай, заметив, что если $\mathbf{r}$ пробегает узлы некоторой решетки, то $\mathbf{p}$ изменяется внутри периода обратной решетки (или, иначе говоря, внутри зоны Бриллюэна). Скажем, в одном измерении решетка есть $r_n = an$, а зона Бриллюэна —это отрезок $-\pi/a < p < \pi/a$. Такое преобразование используется в задачах 1, 2 и 4.

Литература: Подробное изложение метода вторичного квантования можно найти в [3], гл. VI, а также в [2], § 64, 65 и [1], § 3. Понятие квазичастиц обсуждается в [1], гл. 1 и [6], гл. 1. Канонические преобразования Боголюбова для бозе-частиц рассматриваются в [1], § 4 и [6], § 25, а для ферми-частиц — в [6], § 39.

1.2. Задачи 1–4

Задача 1. (*Классическая цепочка осцилляторов*[1].) Рассмотрим цепочку атомов массы m_i, соединенных одинаковыми пружинками жесткости K:

$$\mathscr{H} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left[p_i^2/(2m_i) + (K/2)(x_i - x_{i+1})^2\right] \tag{1.19}$$

где $m_i = m$, если i — четно, и $m_i = M$, если i — нечетно. Определите нормальные моды для этой системы. Покажите, что их две: акустическая и оптическая.

Чему равна скорость звука c? Получится ли такой же ответ, если вычислять c по формуле Лапласа $c = \sqrt{\partial P/\partial\rho}$, где P — давление, а ρ — плотность?

Чему равна ширина щели между оптической и акустической ветвями? Покажите, что при $M \gg m$ дисперсия оптической моды практически отсутствует. Как можно объяснить это качественно?

Задача 2. (*Фермионная цепочка.*) Найдите преобразование Боголюбова, диагонализующее фермионный гамильтониан ($J_{1,2}$ и B — некоторые константы)

$$\begin{aligned} \widehat{\mathscr{H}} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \Big(& J_1\, a_i^+ a_{i+1} + \\ & + J_1\, a_{i+1}^+ a_i + J_2\, a_i a_{i+1} + J_2\, a_{i+1}^+ a_i^+ - 2B\, a_i^+ a_i \Big). \end{aligned} \tag{1.20}$$

Такой гамильтониан возникает при рассмотрении одномерной модели квантового магнетика, так называемой «XY-модели» (см. разд. 1.4).

Определите спектр квазичастиц $\varepsilon(k)$ гамильтониана (1.20). Обратите внимание, что при $B = 0$ и $J_1 = J_2$ дисперсия пропадает. Можно ли понять это без вычислений?

[1] С рассмотрения этой простейшей модели колебаний решетки начинаются почти все курсы физики твердого тела.

Задача 3. (*Нелинейные канонические преобразования.*) Рассмотрим фермиевские операторы a и a^+, действующие в пространстве состояний фермиона, который может заполнять или не заполнять ровно одно состояние. В этом случае пространство многочастичных состояний двумерно и каноническим базисом в нем служат состояния $|0\rangle$ и $|1\rangle$.

Найдите все канонические преобразования операторов a и a^+, сохраняющие соотношения $a^2 = (a^+)^2 = 0$ и $a^+a + aa^+ = 1$. Убедитесь в том, что канонические преобразования наиболее общего вида не описываются линейными соотношениями вида (1.11).

Рассмотрите представление фермиевских операторов спиновыми матрицами Паули:

$$\sigma_x = a + a^+, \quad \sigma_y = i(a - a^+), \quad \sigma_z = 2a^+a - 1. \tag{1.21}$$

Покажите, что канонические преобразования a и a^+ соответствуют вращениям в спиновом пространстве.

Связь между фермиевскими операторами и операторами спина $1/2$ более подробно рассмотрена в разделе 1.4.

Задача 4. (*Квантовая цепочка осцилляторов.*) Пусть теперь гамильтониан (1.19) определяет квантовую задачу, т. е. $p_i = -i\hbar\partial/\partial x_i$. Перейдите к бозонным операторам рождения и уничтожения:

$$\widehat{x}_i = \sqrt{\frac{\hbar}{m_i\omega_i}}\,\frac{a_i + a_i^+}{\sqrt{2}}, \qquad \widehat{p}_i = \sqrt{\hbar m_i\omega_i}\,\frac{a_i - a_i^+}{i\sqrt{2}}. \tag{1.22}$$

Для случая $M = m$ найдите каноническое преобразование, приводящее гамильтониан к диагональному виду. Определите спектр фононов и вычислите энергию нулевых колебаний.

1.3. Решения задач 1–4

1. Гамильтониан (1.19) приводит к уравнениям движения:

$$m\ddot{x}_i = K\,(y_i + y_{i-1} - 2x_i), \quad M\ddot{y}_i = K\,(x_i + x_{i+1} - 2y_i) \tag{1.23}$$

(x_i —смещение атома массы m в i-й элементарной ячейке, y_i — смещение атома массы M). Будем искать решение в виде плоских волн:

$$x_n = e^{i(qn-\omega t)}\,x_q, \quad y_n = e^{i[q(n+1/2)-\omega t]}\,y_q. \tag{1.24}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} m\omega^2 x_q &= 2Kx_q - 2K\cos\frac{q}{2}\,y_q, \\ M\omega^2 y_q &= 2Ky_q - 2K\cos\frac{q}{2}\,x_q. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Здесь q —волновой вектор в первой зоне Бриллюэна: $-\pi < q < \pi$.

Нормальные моды имеют закон дисперсии, определяемый из условия

$$\det\begin{pmatrix} 2K - m\omega^2 & -2K\cos(q/2) \\ -2K\cos(q/2) & 2K - M\omega^2 \end{pmatrix} = 0, \tag{1.26}$$

что дает $\omega^4 - (2K/\mu)\omega^2 + (4K^2/mM)\sin^2\dfrac{q}{2} = 0$, где $\mu = \dfrac{Mm}{M+m}$. Получаем

$$\omega_\pm^2(q) = \frac{K}{\mu}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\mu^2}{mM}\sin^2\frac{q}{2}}\,\right) \tag{1.27}$$

Здесь «+» соответствует оптической, а «−» — акустической моде. Дисперсия нормальных мод (1.27) показана на рис. 1.1. При малых q разлагаем закон дисперсии акустической моды:

$$\omega_-^2(q) = \frac{2K\mu}{mM}\left(\frac{q}{2}\right)^2, \tag{1.28}$$

и получаем скорость звука:

$$c = \left.\frac{\omega_-}{q}\right|_{q\to 0} = \frac{1}{2}\left(\frac{2K}{M+m}\right)^{1/2}. \tag{1.29}$$

При выводе предполагалось, что период решетки $2a$ равен единице. Чтобы получить выражение, имеющее размерность скорости, надо умножить результат на $2a$, где a — расстояние между атомами M и m. При этом получается скорость

$$c = a\sqrt{2K/(M+m)}\,.$$

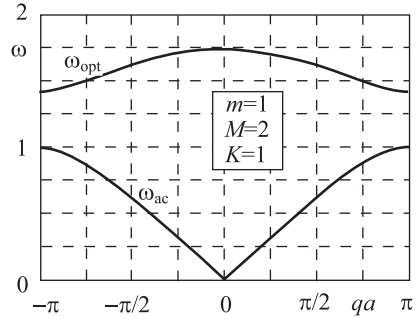

Рис. 1.1

Проверим, что найденная скорость звука согласуется с формулой Лапласа $c^2 = \partial P/\partial\rho$, связывающей скорость звука и сжимаемость системы. Для цепочки длины x, содержащей N атомов каждого типа, сила пропорциональна удлинению, $dP = -(K/2N)\,dx$ (в одном измерении сила и давление —это одно и то же), а изменение плотности есть

$$d\rho = \frac{d}{dx}\left(\frac{(M+m)N}{x}\right)dx = -\frac{(M+m)N}{x_0^2}\,dx, \tag{1.30}$$

где $x_0 = 2Na$. Отсюда получаем $c^2 = 2Ka^2/(M+m)$, как и следовало.

Верхний край акустической ветви спектра:

$$\max[\omega_-^2(q)] = \omega_-{}^2(\pi) = \frac{2K}{M}. \tag{1.31}$$

Аналогично, нижний край оптической ветви есть

$$\min[\omega_+^2(q)] = \omega_+^2(\pi) = \frac{2K}{m}, \tag{1.32}$$

и поэтому ширина щели $\Delta\omega = \sqrt{2K/m} - \sqrt{2K/M}$.

При $M \gg m$ частота оптической ветви

$$\omega_+(q) = \sqrt{\frac{2K}{m}}\left(1 + \frac{m}{2M}\cos^2\frac{q}{2} + O\left(\frac{m^2}{M^2}\right)\right) \tag{1.33}$$

практически не зависит от q, что соответствует колебаниям легких атомов между почти неподвижными тяжелыми. Физическая причина отсутствия дисперсии — взаимная независимость колебаний соседних атомов массы m.

При $M \gg m$ неважно, колеблются ли соседние легкие атомы в фазе или же в противофазе, поскольку через тяжелые стенки (т. е. атомы массы M) влияние не передается.

2. (*Первое решение.*) Сделаем преобразование Фурье

$$a_m = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikm} a_k \frac{dk}{2\pi}.$$

При этом члены гамильтониана преобразуются к такому виду:

$$\sum_m a_m^+ a_{m+1} = \sum_k a_k^+ a_k e^{ik}, \tag{1.34}$$

$$\sum_m a_m a_{m+1} = \sum_k a_k a_{-k} e^{-ik}, \tag{1.35}$$

$$\sum_m a_m^+ a_{m+1} + a_{m+1}^+ a_m = \sum_k 2\cos k \cdot a_k^+ a_k, \tag{1.36}$$

где сумма по k есть сокращенное обозначение для $\int_{-\pi}^{\pi} \ldots dk/2\pi$. Пользуясь антикоммутативностью a_k и a_{-k}, перепишем вторую сумму так:

$$\sum_m a_m a_{m+1} = -i\sum_k \sin k \cdot a_k a_{-k}, \tag{1.37}$$

после чего гамильтониан принимает вид

$$\widehat{\mathscr{H}} = \sum_k \Big(2(J_1\cos k - B)\, a_k^+ a_k - iJ_2 \sin k \cdot a_k a_{-k} + iJ_2 \sin k \cdot a_{-k}^+ a_k^+\Big). \tag{1.38}$$

После «поворота» $a_k = e^{i\pi/4} b_k$, $a_k^+ = e^{-i\pi/4} b_k^+$ гамильтониан становится вещественным:

$$\widehat{\mathscr{H}} = \sum_k \Big((J_1\cos k - B)\, b_k^+ b_k + J_2 \sin k \cdot b_k b_{-k} + \text{h.c.}\Big) \tag{1.39}$$

Будем искать фермионное преобразование Боголюбова в виде

$$\begin{aligned} b_k &= u_k c_k + v_k c_{-k}^+, \quad & b_k^+ &= u_k c_k^+ + v_k c_{-k}, \\ b_{-k}^+ &= -v_k c_k + u_k c_{-k}^+, \quad & b_{-k} &= -v_k c_k^+ + u_k c_{-k} \end{aligned} \tag{1.40}$$

с вещественными u_k и v_k, причем $u_k^2 + v_k^2 = 1$. Получаем

$$\widehat{\mathscr{H}} = \sum_k (J_1\cos k - B)\left(u_k^2 c_k^+ c_k + u_k v_k (c_k^+ c_{-k}^+ + c_{-k} c_k) + v_k^2 c_{-k} c_{-k}^+\right) +$$

$$+ J_2 \sin k \left(u_k^2 c_k c_{-k} + u_k v_k (c_{-k}^+ c_{-k} - c_k c_k^+) - v_k^2 c_{-k}^+ c_k^+\right) + \text{h.c.} \tag{1.41}$$

Приравняем коэффициент при $c_{-k} c_k$ нулю, потребовав чтобы

$$2u_k v_k (J_1\cos k - B) + (-u_k^2 + v_k^2) J_2 \sin k = 0. \tag{1.42}$$

Тогда будем иметь следующее:

$$\frac{v_k}{u_k} = \frac{B - J_1\cos k \pm \sqrt{(J_1\cos k - B)^2 + J_2^2 \sin^2 k}}{J_2 \sin k}. \tag{1.43}$$

Решив это уравнение при условии $u_k^2 + v_k^2 = 1$, найдем значения u_k, v_k и подставим их в гамильтониан:

$$\widehat{\mathscr{H}} = \text{const} + \sum_k \left[2(J_1\cos k - B)(u_k^2 - v_k^2) + 4J_2 u_k v_k \sin k\right] c_k^+ c_k =$$

$$= \text{const} + \sum_k \varepsilon_k c_k^+ c_k. \tag{1.44}$$

Спектр возбуждений, таким образом, есть

$$\varepsilon_k = 2\sqrt{(J_1\cos k - B)^2 + J_2^2 \sin^2 k}\,. \tag{1.45}$$

Отсутствие дисперсии при $J_1 = J_2$ и $B = 0$ означает, что возбуждения локализованы на одном или нескольких соседних узлах. Это можно понять с точки зрения преобразования Йордана–Вигнера (см. разд. 1.4), которое в данном случае приводит к изинговской спиновой цепочке:

$$\widehat{\mathscr{H}} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} J_y \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y. \tag{1.46}$$

В такой цепочке каждый спин характеризуется определенной проекцией на ось y. Поэтому элементарное возбуждение в этой системе —просто

переворот спина на любом из узлов, никак не затрагивающий остальные узлы.

Таким образом, полная локализация возбуждения на одном узле эквивалентна отсутствию дисперсии. Обратим внимание на аналогию с задачей 1 в случае $M \gg m$, когда оптическая мода колебаний становится почти бездисперсионной из-за того, что колебания соседних легких атомов почти полностью развязаны.

2. (*Второе решение.*) Приведенное выше решение иллюстрирует стандартный подход к преобразованию Боголюбова. Дадим другое решение, в котором физический смысл вычислений яснее, и сами они — элегантнее. Вернемся к гамильтониану (1.38) и рассмотрим его коммутатор с фермиевскими операторами: $[\widehat{\mathscr{H}}, a_k]$. Пользуясь соотношениями

$$[a^+a, a] = a^+aa - aa^+a = -a, \quad [aa^+, a^+] = -a^+, \tag{1.47}$$

вычислим коммутатор

$$[\widehat{\mathscr{H}}, a_k] = -2(J_1\cos k - B)a_k + 2J_2 i a^+_{-k}\sin k. \tag{1.48}$$

(Напомним, что физический смысл коммутатора некоторой величины с гамильтонианом — скорость изменения этой величины: $i\hbar\dot{A} = [A, \mathscr{H}]$.) Теперь рассмотрим каноническое преобразование:

$$a_k = u_k b_k + v_k b^+_{-k}, \quad a^+_{-k} = u^*_k b^+_{-k} - v^*_k b_k, \tag{1.49}$$

и предположим, что параметры u_k и v_k выбраны так, что гамильтониан принял диагональную форму

$$\widehat{\mathscr{H}} = E_0 + \sum_k \varepsilon_k b^+_k b_k. \tag{1.50}$$

Возьмем коммутаторы

$$[\widehat{\mathscr{H}}, b_k] = -\varepsilon_k b_k, \quad [\widehat{\mathscr{H}}, b^+_k] = \varepsilon_k b^+_k, \tag{1.51}$$

и с их помощью перепишем коммутатор (1.48):

$$-u_k\varepsilon_k b_k + v_k\varepsilon_k b^+_{-k} = -2(J_1\cos k - B)(u_k b_k + v_k b^+_{-k}) + \\ + 2J_2 i\sin k(u^*_k b^+_{-k} - v^*_k b_k), \tag{1.52}$$

откуда получаем два уравнения для ε_k, u_k и v_k:

$$u_k\varepsilon_k = 2(J_1\cos k - B)\ u_k + 2J_2 i\sin k\cdot v^*_k, \tag{1.53}$$

$$v_k\varepsilon_k = -2(J_1\cos k - B)\ v_k + 2J_2 i\sin k\cdot u^*_k. \tag{1.54}$$

Так как уравнения однородны по u_k и v_k, выразим v_k через u_k из (1.54):

$$v_k = \frac{2J_2 i\ \sin k\cdot u^*_k}{\varepsilon_k + 2(J_1\cos k - B)}, \tag{1.55}$$

и затем исключим v_k из (1.53):

$$\varepsilon_k^2 - 4(J_1\cos k)^2 = 4J_2^2\sin^2 k, \tag{1.56}$$

откуда находим закон дисперсии

$$\varepsilon_k = 2\sqrt{(J_1\cos k - B)^2 + J_2^2\sin^2 k}\,. \tag{1.57}$$

(Знак перед корнем выбираем, согласно тому, что энергия возбуждений над основным состоянием всегда положительна.) Параметры преобразования нетрудно найти из (1.55) и условия нормировки $|u_k|^2 + |v_k|^2 = 1$.

3. Будем искать каноническое преобразование в таком виде:

$$a' = ua + va^+ + wa^+a + q, \tag{1.58}$$

$$a'^+ = u^*a^+ + v^*a + w^*a^+a + q^*. \tag{1.59}$$

Это наиболее общая форма, к которой может быть приведено любое полиномиальное по a и a^+ выражение. Убедиться в этом можно следующим образом. Во-первых, с помощью коммутационных соотношений любое выражение может быть приведено к нормальной форме, в которой в каждом слагаемом оператор a^+ (если он есть) стоит слева от a. Во-вторых, поскольку $a^2 = (a^+)^2 = 0$, выражение (1.58) представляет собой нормальную форму наиболее общего вида.

Рассмотрим выражение a'^2. Приведем квадрат правой части выражения (1.58) для a' к нормальной форме и потребуем, чтобы все коэффициенты обратились в нуль. Это дает два условия:

$$w + 2q = 0, \quad uv + q^2 = 0. \tag{1.60}$$

Аналогично, условие $a'a'^+ + a'^+a' = 1$ приводит к соотношению

$$|u|^2 + |v|^2 + 2|q|^2 = 1. \tag{1.61}$$

Из полученных соотношений следует, что

$$|u| + |v| = 1. \tag{1.62}$$

Таким образом, наиболее общее каноническое преобразование задается двумя комплексными параметрами u и v, удовлетворяющими условию (1.62). Коэффициенты q и w определяются таким образом: $q = \pm i\sqrt{uv}$, $w = -2q$.

Нетрудно видеть, что в общем случае каноническое преобразование нелинейное, поскольку коэффициент w не обращается в нуль. Более того, линейными оказываются лишь тривиальные преобразования (с u или v равным нулю).

Решим теперь задачу другим способом, воспользовавшись представлением (1.21) фермиевских операторов через матрицы Паули. Обратим соотношения (1.21):

$$a = (\sigma_x - i\sigma_y)/2, \quad a^+ = (\sigma_x + i\sigma_y)/2. \tag{1.63}$$

Нетрудно проверить, что условия $a^2 = (a^+)^2 = 0$, $a^+a + aa^+ = 1$ эквивалентны соотношениям антикоммутативности для σ_i:

$$[\sigma_i, \sigma_j]_+ = 2\delta_{ij}. \tag{1.64}$$

Преобразования, сохраняющие соотношения (1.64), можно записать в виде

$$\sigma_i' \;=\; R_{ij}\,\sigma_j, \tag{1.65}$$

где R_{ij} — вещественная ортогональная матрица 3×3. Поэтому канонические преобразования в данном случае образуют группу $SO(3)$.

4. (*Первое решение.*) Выразим $\widehat{\mathscr{H}}$ через a_i и a_i^+ по формулам (1.22), не определяя пока частоту ω_0:

$$\begin{aligned}\widehat{\mathscr{H}} &= \sum\left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{K}{2}(x_i - x_{i+1})^2\right) = \\ &= -\sum\left[\frac{\hbar\omega_0}{4}(a_i - a_i^+)^2 + \frac{K\hbar}{4m\omega_0}(a_i + a_i^+ - a_{i+1} - a_{i+1}^+)^2\right] = \\ &= \sum\left[\frac{\hbar\omega_0}{4}(a_i^+a_i - a_i^2) + \frac{\hbar K}{4m\omega_0}((a_i - a_{i+1})(a_i^+ - a_{i+1}^+) + \right. \\ &\qquad \left. + (a_i - a_{i+1})^2) + \text{h.c.}\right]\end{aligned} \tag{1.66}$$

(с точностью до константы, возникающей из-за коммутационных соотношений бозе-операторов). Выполним преобразование Фурье:

$$a_m = \int\limits_{-\pi}^{\pi} a_k\, e^{ikm}\frac{dk}{2\pi} = \sum_k a_k\, e^{ikm}, \quad a_k = \sum_m a_m\, e^{-ikm}. \tag{1.67}$$

При этом

$$a_i - a_{i+1} \;\to\; (1 - e^{ik})a_k, \quad a_i^+ - a_{i+1}^+ \;\to\; (1 - e^{-ik})a_k^+. \tag{1.68}$$

Подставляя эти выражения в (1.66), получаем

$$\widehat{\mathscr{H}} = \sum_k\Big(p(k)\,a_k^+a_k \;+\; q(k)\,a_ka_{-k} \;+\; \text{h.c.}\Big), \tag{1.69}$$

где

$$p(k) = \frac{\hbar\omega_0}{4} + \frac{\hbar K}{2m\omega_0}(1 - \cos k), \quad q(k) = \frac{\hbar K}{2m\omega_0}(1 - \cos k) - \frac{\hbar\omega_0}{4}. \tag{1.70}$$

Рассмотрим каноническое преобразование:

$$a_k = u_kb_k + v_kb_{-k}^+, \quad a_{-k}^+ = v_kb_k + u_kb_{-k}^+, \tag{1.71}$$

где $u_k = \operatorname{ch}\lambda_k$, $v_k = \operatorname{sh}\lambda_k$. Нетрудно проверить, что при преобразовании (1.71) гамильтониан сохраняет свой вид, причем $p(k)$ и $q(k)$

меняются так:

$$\begin{aligned}p'(k) &= \operatorname{ch}2\lambda_k\cdot p(k) + \operatorname{sh}2\lambda_k\cdot q(k),\\ q'(k) &= \operatorname{sh}2\lambda_k\cdot p(k) + \operatorname{ch}2\lambda_k\cdot q(k).\end{aligned} \tag{1.72}$$

Подберем λ_k так, чтобы $q'(k)$ обратилось в нуль:

$$\operatorname{th}2\lambda_k = -q(k)/p(k). \tag{1.73}$$

При этом $p'(k) = \sqrt{p^2(k) - q^2(k)} = \hbar\sqrt{K/m}\,\sin|k/2|$. Обратим внимание на то, что частота ω_0, значение которой может быть произвольным, выпадает из выражения для $p'(k)$ (но не из выражения для λ_k!).

Диагонализованный гамильтониан имеет вид

$$\widehat{\mathscr{H}} = \sum_k\left(p'(k)\,b_k^+b_k + \text{h.c.}\right) = \sum_k\omega(k)\left(b_k^+b_k + \frac{1}{2}\right), \tag{1.74}$$

где $\omega(k) = 2p'(k) = 2\hbar\sqrt{K/m}\;\sin|k/2|$.

Выражение (1.74) позволяет найти энергию нулевых колебаний, приходящуюся на одну частицу:

$$E_0 \;=\; \int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\hbar\omega(k)}{2}\frac{dk}{2\pi} \;=\; \frac{2}{\pi}\,\hbar\sqrt{K/m}\,. \tag{1.75}$$

4. (*Второе решение.*) Чтобы получить каноническое преобразование, достаточно проверить сохранение коммутационных соотношений для любой полной системы операторов. В этой задаче наиболее естественный выбор — координаты и импульсы частиц.

Сделаем преобразование Фурье

$$\widehat{x}_m = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\widehat{x}_q\,e^{imq}\frac{dq}{2\pi}, \quad \widehat{p}_m = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\widehat{p}_q\,e^{imq}\frac{dq}{2\pi}, \tag{1.76}$$

и проверим, что коммутационные соотношения не нарушаются:

$$[\widehat{x}_q, \widehat{p}_{q'}] = 2\pi i\hbar\,\delta(q + q'). \tag{1.77}$$

Переписывая гамильтониан, имеем

$$\widehat{\mathscr{H}} = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2m}\,\widehat{p}_q\widehat{p}_{-q} + \frac{K}{2}\,(2 - 2\cos q)\,\widehat{x}_q\widehat{x}_{-q}\right]\frac{dq}{2\pi}, \tag{1.78}$$

т. е. каждой фурье-гармонике соответствует осциллятор с частотой

$$\omega(q) = \sqrt{(K/m)\,(2 - 2\cos q)} \;= 2\sqrt{K/m}\;\sin|q/2|. \tag{1.79}$$

Положив

$$\widehat{x}_q = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega(q)}}\,\frac{b_q + b_{-q}^+}{\sqrt{2}}, \quad \widehat{p}_q = \sqrt{\hbar m\omega(q)}\,\frac{b_q - b_{-q}^+}{i\sqrt{2}}, \tag{1.80}$$

снова приходим к гамильтониану (1.74):

$$\widehat{\mathscr{H}} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \hbar\omega(q)\,\left(b_q^+ b_q + \frac{1}{2}\right)\frac{dq}{2\pi}. \qquad (1.81)$$

и к выражению (1.75) для энергии нулевых колебаний, приходящейся на одну частицу.

Из хода решения очевидно, что и для неравных масс $m \neq M$ спектр квантовой цепочки будет связан с частотами колебаний классической цепочки точно так же: каждой классической нормальной моде соответствует квантовый осциллятор.

1.4. От спиновых операторов — к фермиевским

Здесь мы рассмотрим одно интересное применение канонических преобразований из теории одномерных магнитных систем. Одномерный магнетик в простейшем случае представляет собой цепочку спинов $1/2$, в которой взаимодействуют только соседние спины. Как мы увидим, с помощью специального обобщения полученных в задаче 3 соотношений между фермионными операторами и матрицами Паули оказывается возможным перейти от одномерной спиновой цепочки к эквивалентной фермионной цепочке. Соответствующие правила перехода называются *преобразованиями Йордана–Вигнера*. Гамильтониан одномерного магнетика со спином $1/2$ имеет вид

$$\widehat{\mathscr{H}} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(J_x \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + J_y \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + J_z \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z - B\sigma_i^z\right). \qquad (1.82)$$

Здесь σ_i^α — матрицы Паули; J_x, J_y, J_z — обменные константы; B — внешнее магнитное поле, приложенное вдоль оси z. В обычной изотропной модели Гейзенберга константы J_x, J_y и J_z одинаковы, но нам будет полезно рассмотреть более общий анизотропный случай.

Преобразование Йордана–Вигнера выражает спиновые операторы $\sigma_i^\pm = (1/2)(\sigma_i^x \pm i\sigma_i^y)$ через операторы фермионов a_i^+, a_i по следующему правилу:

$$\sigma_i^z = 2a_i^+ a_i - 1, \quad \sigma_i^- = a_i \prod_{j<i} \sigma_j^z, \quad \sigma_i^+ = a_i^+ \prod_{j<i} \sigma_j^z, \qquad (1.83)$$

т. е. каждый спин заменяется на фермион и «струну», идущую влево до бесконечности (струной принято называть фигурирующее в (1.83) бесконечное произведение). Цель введения струны состоит в том, чтобы перейти к операторам с фермиевским правилом коммутации. Для этого необходимо «подправить» коммутационные соотношения спиновых операторов на разных узлах. На одном узле, согласно задаче 3, коммутационные соотношения и так фермиевские ($\sigma^+ \to a^+$, $\sigma^- \to a$). На разных же узлах спиновые операторы коммутируют, но после умножения на оператор струны $\prod_{j<i} \sigma_j^z$ они становятся антикоммутирующими.

Нетрудно написать обратное преобразование, выражающее фермиевские операторы через спины:

$$a_i = \sigma_i^- \prod_{j<i} \sigma_i^z, \quad a_i^+ = \sigma_i^+ \prod_{j<i} \sigma_i^z. \qquad (1.84)$$

Найдем как спиновый гамильтониан (1.82) выражается через йордан-вигнеровские фермионы. С помощью преобразования (1.83) гамильтониан (1.82) превращается в эквивалентный фермионный гамильтониан:

$$\widehat{\mathscr{H}} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \Big[\left(J_1 a_i^+ a_{i+1} + J_2 a_i a_{i+1} + \text{h.c.}\right) + \\ + J_z(2n_i - 1)(2n_{i+1} - 1) - B(2n_i - 1)\Big], \qquad (1.85)$$

где $n_i = a_i^+ a_i$, $J_1 = -J_x - J_y$, $J_2 = J_x - J_y$. Нетрудно видеть, что при $J_z = 0$ гамильтониан (1.85) с точностью до константы совпадает с рассмотренным в задаче 2 гамильтонианом (1.20). Метод задачи 2 позволяет диагонализовать гамильтониан (1.82) при $J_z = 0$. С помощью канонического преобразования ферми-операторов гамильтониан (1.85) можно привести к виду

$$\widehat{\mathscr{H}} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varepsilon(k)\,\widetilde{a}_k^+ \widetilde{a}_k \frac{dk}{2\pi}, \quad \varepsilon(k) = \pm 2\sqrt{(J_1 \cos k - B)^2 + J_2^2 \sin^2 k}\,. \qquad (1.86)$$

Можно сделать вывод, что и в присутствии магнитного поля элементарные возбуждения в спиновой цепочке с $J_z = 0$ подчиняются *ферми-статистике*. Оказывается, это верно и при произвольном J_z, хотя решить задачу в этом случае уже не так просто.

Появление ферми-статистики может показаться парадоксальным, поскольку магноны (спиновые возбуждения в магнетиках) обычно являются бозонами. Однако здесь следует иметь в виду, что речь в данном случае идет о сильно взаимодействующей системе. В магнетике со спином на узле $1/2$ между магнонами возникает большое эффективное отталкивание, поскольку никакие два магнона не могут одновременно оказаться на одном и том же узле. Именно это отталкивание и «моделирует» ферми-статистика. Таким образом, рассматриваемая система представляет пример того, как отталкивание между бозонами приводит к появлению квазичастиц, являющихся невзаимодействующими фермионами [2]).

С помощью фермионного представления одномерного магнетика можно решить разнообразные задачи. Например, найдем как намагниченность системы и магнитная восприимчивость зависят от приложенного поля. Для простоты ограничимся симметричным случаем: $J_x =$

[2]) Оказывается, что низкая размерность системы усиливает эффекты взаимодействия и, как правило, способствует превращению различных типов статистики друг в друга. Как мы увидим в гл. 12, в одномерной системе взаимодействующих фермионов квазичастицы подчиняются бозе-статистике.

$= J_y = -(1/2)J < 0$, $J_z = 0$. Эквивалентный фермионный гамильтониан в этом случае принимает вид

$$\widehat{\mathscr{H}} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} 2\big(J\cos k - B\big)\; a_k^+ a_k \frac{dk}{2\pi}, \tag{1.87}$$

причем $J > 0$. Магнитный момент направлен вдоль оси z. Намагниченность, приходящаяся на узел, есть

$$\mu = \langle \sigma_i^z \rangle \int\limits_{-\pi}^{\pi} \big(2\langle a_k^+ a_k\rangle - 1\big)\,\frac{dk}{2\pi}. \tag{1.88}$$

С учетом (1.87) находим

$$\mu = \begin{cases} (2/\pi)\arcsin B/J & \text{при } |B| < J, \\ \operatorname{sgn} B/J & \text{при } |B| > J. \end{cases} \tag{1.89}$$

При $|B| = J$ происходит полное намагничивание системы. Нетрудно найти восприимчивость:

$$\chi = \frac{\partial \mu}{\partial B} = \begin{cases} (2/\pi)(J^2 - B^2)^{-1/2} & \text{при } |B| < J, \\ 0 & \text{при } |B| > J. \end{cases} \tag{1.90}$$

Знак восприимчивости парамагнитный.

Глава 2
ФУНКЦИЯ ГРИНА

2.1. Представление взаимодействия. Хронологическое упорядочение

В теории возмущений гамильтониан записывают в виде $\widehat{\mathscr{H}} = \widehat{\mathscr{H}}_0 + \widehat{\mathscr{H}}_{\text{int}}$, где $\widehat{\mathscr{H}}_0$ — невозмущенная часть, а $\widehat{\mathscr{H}}_{\text{int}}$ — возмущенная. Наиболее удобно работать в представлении взаимодействия, т. е. в представлении Гейзенберга невозмущенной задачи. В качестве базиса этого представления используются зависящие от времени собственные состояния невозмущенного гамильтониана $\widehat{\mathscr{H}}_0$:

$$|\alpha\rangle(t) = e^{-(i/\hbar)E_\alpha t}|\alpha\rangle, \tag{2.1}$$

где E_α — спектр $\widehat{\mathscr{H}}_0$. Уравнение Шредингера, записанное в этом базисе, принимает вид

$$i\hbar\,\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial t} = \widehat{\mathscr{H}}_{\text{int}}(t)\,\widetilde{\psi}, \tag{2.2}$$

где $\widehat{\mathscr{H}}_{\text{int}}(t) = e^{(i/\hbar)\widehat{\mathscr{H}}_0 t}\,\widehat{\mathscr{H}}_{\text{int}}\,e^{-(i/\hbar)\widehat{\mathscr{H}}_0 t}$, а обозначение $\widetilde{\psi}$ указывает, что ψ берется в представлении взаимодействия. Формальное решение записывается через S-матрицу, $\widetilde{\psi}(t) = \widehat{S}(t)\widetilde{\psi}(0)$, которая дается так называемой хронологической экспонентой:

$$\widehat{S}(t) = \mathrm{T}\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int\limits_0^t \widehat{\mathscr{H}}_{\text{int}}(t')dt'\right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int\limits_0^t\int\limits_0^{t_1}\dots\int\limits_0^{t_{n-1}} \widehat{\mathscr{H}}_{\text{int}}(t_1)\dots\widehat{\mathscr{H}}_{\text{int}}(t_n)\,dt_n\dots dt_1, \tag{2.3}$$

где $0 < t_n < \dots < t_1 < t$. Преобразования (2.1)–(2.3) имеют общий квантовомеханический характер: они применимы и к одночастичной и к многочастичной задачам. В многочастичном случае, представляющем основной интерес, необходимо перейти к ψ-операторам, после чего члены ряда (2.3) становятся полиномами по операторам рождения и уничтожения. Анализ операторной структуры этих выражений приводит к простым правилам вычисления средних (теорема Вика) и к

диаграммной технике, дающей удобное графическое представление для разложения S-матрицы в ряд по взаимодействию.

Введем *хронологическое произведение* операторов, которое часто называют также Т-упорядоченным произведением операторов, или просто Т-произведением. Для бозе-операторов

$$\mathrm{T}\,\widehat{A}(x)\widehat{B}(x') = \begin{cases} \widehat{A}(x)\widehat{B}(x') & \text{при } t > t', \\ \widehat{B}(x')\widehat{A}(x) & \text{при } t < t', \end{cases} \tag{2.4}$$

в то время как для ферми-операторов

$$\mathrm{T}\,\widehat{A}(x)\widehat{B}(x') = \begin{cases} \widehat{A}(x)\widehat{B}(x') & \text{при } t > t', \\ -\widehat{B}(x')\widehat{A}(x) & \text{при } t < t'. \end{cases} \tag{2.5}$$

Иначе говоря, при Т-упорядочении операторов их переставляют так, чтобы моменты времени, в которые взяты операторы, возрастали справа налево. При этом знак перестановки соответствует их коммутационным соотношениям: «+» для бозонов, «−» для фермионов.

С помощью Т-произведения операторов можно записать выражение (2.3) для хронологической экспоненты в более привычном виде:

$$\widehat{S}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!}\,\mathrm{T}\left(\int_0^t \widehat{\mathscr{H}}_{\mathrm{int}}(t')\,dt'\right)^n. \tag{2.6}$$

Основным объектом диаграммной техники является функция Грина. Она определяется через ψ-операторы, взятые в представлении взаимодействия:

$$\widetilde{\psi}_\alpha(x) = e^{i\widehat{\mathscr{H}}_0 t}\,\widehat{\psi}_\alpha(\mathbf{r})\,e^{-i\widehat{\mathscr{H}}_0 t}, \quad \widetilde{\psi}^+_\alpha(x) = e^{i\widehat{\mathscr{H}}_0 t}\,\widehat{\psi}^+_\alpha(\mathbf{r})\,e^{-i\widehat{\mathscr{H}}_0 t}, \tag{2.7}$$

где под x понимается совокупность четырех переменных — координат $\mathbf{r}$ и времени t; α — спиновый индекс (для фермионов).

Так называемая *причинная функция Грина* есть среднее от хронологического произведения ψ-операторов, взятых в представлении взаимодействия [1]:

$$G^c_{\alpha\beta}(x,x') = -i\langle \mathrm{T}\,\widetilde{\psi}_\alpha(x)\,\widetilde{\psi}^+_\beta(x')\rangle, \tag{2.8}$$

где скобки $\langle\ldots\rangle$ означают матричный элемент $\langle\widehat{S}_0\rangle^{-1}\langle 0|\ldots|0\rangle$, взятый по основному состоянию системы с гамильтонианом $\widehat{\mathscr{H}}_0$. (Фазовый множитель $\langle\widehat{S}_0\rangle = \langle 0|e^{-i\widehat{\mathscr{H}}_0 t}|0\rangle_{t\to\infty}$ принято вводить для нормировки.) Таким образом, функции Грина бозонов и фермионов определяются одинаково, но операция Т-упорядочения имеет разный смысл.

[1] Верхний индекс у $G^c_{\alpha\beta}$ (первая буква слова «causal») используют для того, чтобы отличать причинную функцию Грина от других полезных функций Грина, таких как запаздывающая и опережающая функции $G^{R(A)}_{\alpha\beta}$ (см. (5.6)).

В выражении (2.7) и всюду далее там, где это не приводит к недоразумениям, мы используем систему единиц, в которой $\hbar = 1$, $[t] = [E]^{-1}$. Кроме того, мы также часто будем писать ψ вместо $\widetilde{\psi}$, ибо основную роль в диаграммной технике играет именно операторы $\widetilde{\psi}$ в представлении взаимодействия, а операторы ψ в шредингеровском представлении практически не встречаются.

В однородной системе (скажем, в газе или в жидкости) функция Грина (2.8), очевидно, зависит только от разности координат $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ и времен $t - t'$. В этом случае удобно сделать преобразование Фурье и перейти в импульсно-частотное представление:

$$G_{\alpha\beta}(x - x') = \iint G_{\alpha\beta}(\varepsilon, \mathbf{p})\,e^{-i\varepsilon(t-t')+i\mathbf{p}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}\,\frac{d\varepsilon\,d^3p}{(2\pi)^4}. \tag{2.9}$$

В этом представлении обычно и строится диаграммная техника. Функцию $G_{\alpha\beta}(\varepsilon,\mathbf{p})$ для идеального газа нетрудно найти, пользуясь определением (2.8). Например, для идеального ферми-газа она имеет вид

$$G_{\alpha\beta}(\varepsilon,\mathbf{p}) = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{\varepsilon - \xi(\mathbf{p}) + i0\,\mathrm{sgn}(|\mathbf{p}| - p_0)}, \tag{2.10}$$

где $\xi(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2m - E_F$ — закон дисперсии, а $p_0 = \sqrt{2mE_F}$ — импульс Ферми, являющийся границей распределения ферми-частиц по импульсам.

Функцию Грина, если она известна, можно использовать для вычисления различных физических величин. Нетрудно проверить, что величина

$$\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{r},\mathbf{r}',t) = \pm i \lim_{t'\to t+0} G_{\alpha\beta}(x,x') \tag{2.11}$$

есть одночастичная матрица плотности. (Знак соответствует статистике: «+» для бозонов, «−» для фермионов.) Зная $\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{r},\mathbf{r}',t)$, нетрудно найти среднее любой величины. Например, плотность частиц выражается через функцию Грина как

$$n(x) = \pm i \lim_{\substack{t'\to t+0 \\ \mathbf{r}'\to\mathbf{r}}} \mathrm{Tr}\; G_{\alpha\beta}(x,x'), \tag{2.12}$$

а плотность тока как

$$\mathbf{j}(x) = \pm\frac{\hbar}{2m} \lim_{\substack{t'\to t+0 \\ \mathbf{r}'\to\mathbf{r}}} \left(\nabla_{\mathbf{r}} - \nabla_{\mathbf{r}'}\right)\,\mathrm{Tr}\; G_{\alpha\beta}(x,x'), \tag{2.13}$$

где Tr обозначает взятие следа по спиновым индексам α, β. Брать предел по $t' > t$ в соотношениях (2.11) – (2.13) необходимо из-за неоднозначности определения функции Грина при $t = t'$.

Представление взаимодействия и функция Грина являются основой при построении и использовании диаграммной техники. В этой главе собраны задачи, иллюстрирующие эти важные понятия на простых примерах.

Литература: Представление взаимодействия рассматривается в [1], § 6; [6], § 12. Определение функции Грина можно найти в [1], § 7; [6], § 7.

2.2. Задачи 5–10

Задача 5. (*Спин во вращающемся поле.*) Частица со спином $s = 1/2$ и магнитным моментом μ находится в постоянном вертикальном и вращающемся горизонтальном магнитном полях [2])

$$B = (B_1 \cos \omega t, B_1 \sin \omega t, B_0). \tag{2.14}$$

Запишите уравнение Шредингера в представлении взаимодействия, считая переменную часть поля «возмущением». Решите уравнение и найдите S-матрицу.

Пусть при $t = 0$ частица находится в состоянии «спин вверх». Какова вероятность найти ее в состоянии «спин вниз» в момент $t > 0$? Рассмотрите отдельно случай резонанса $\omega = 2\mu B_0$.

Задача 6. Заряженная частица массы m движется по прямой в параболическом потенциале $U(x) = m\omega^2 x^2/2$. На короткое время τ включают слабое электрическое поле E, а затем выключают. Какова вероятность перевести частицу в состояние $|n\rangle$, если до включения поля она была в основном состоянии?

а. Решите задачу в представлении взаимодействия. Обратите внимание на то, что матричные элементы возмущения отличны от нуля только между соседними уровнями. Следовательно, при малом E вероятность перехода в n-е состояние дается n-м порядком теории возмущений. При каком соотношении между E, ω и τ теория возмущений работает?

б.* Для произвольных E и τ найдите *точную* S-матрицу и вероятность перехода из основного в n-е состояние.

Задача 7. (*Обход полюса.*) Выразите плотность n ферми-газа через функцию Грина $G(\varepsilon, p)$, воспользовавшись соотношением (2.12). Вычислите интеграл и получите формулу $p_0^3 = 3\pi^2 n$ для импульса Ферми p_0.

Задача 8. а. Для невзаимодействующих ферми-частиц на прямой найдите функцию Грина $G_{\alpha\beta}(\varepsilon, x, x')$.

б. То же для ферми-частиц на полупрямой $x > 0$ с граничным условием $\psi|_{x=0} = 0$ (непроницаемая твердая стенка).

в. (*Осцилляции Фриделя.*) В случае б) покажите, что плотность ферми-газа, как функция расстояния до стенки, осциллирует. Чему равен период осцилляций?

Задача 9. (*Возврат назад при случайном блуждании.*) Функции Грина оказываются полезными и при изучении вопросов, не имеющих отношения к квантовой механике. В этой и следующей задачах мы

[2]) Такая ситуация возникает, например, в эксперименте по ядерному магнитному резонансу (ЯМР).

приведем два таких примера. Первый из них — задача о случайном блуждании.

Рассмотрим частицу, совершающую случайное блуждание по n-мерной кубической решетке. Движение начинается при $t = 0$ из начала координат. Попав на очередном шаге в какой-то из узлов решетки, частица на следующем шаге с одинаковой вероятностью переходит в любой из $2n$ соседних узлов. Пусть $p(t, \mathbf{x})$ — вероятность того, что частица через t шагов оказалась в узле $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ решетки. (В этой задаче время t является дискретным.) В теории вероятностей рассматривают *производящую функцию*

$$G(z, \mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{x}, t} z^t \, e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} \, p(t, \mathbf{x}) \qquad (t \geqslant 0, \, |z| < 1). \tag{2.15}$$

Свойства этой величины во многом аналогичны свойствам функции Грина. Покажите, что

$$G(z, \mathbf{q}) = \frac{1}{1 - zW(\mathbf{q})}, \quad W(\mathbf{q}) = \frac{1}{n}(\cos q_1 + \ldots + \cos q_n). \tag{2.16}$$

Рассмотрим производящую функцию $\widetilde{G}(z, \mathbf{q})$ для блужданий, начинающихся из начала координат, но ни разу не возвращающихся туда на последующих шагах. Величина $\widetilde{G}(z, \mathbf{q})$ по своим свойствам похожа на функцию Грина частицы в поле отталкивающего центра (см. задачи 11, 12 и 13). В частности, для нее можно написать такое же интегральное уравнение (напоминающее уравнение Дайсона). Выразите $\widetilde{G}(z, \mathbf{q})$ через $G(z, \mathbf{q})$. Найдите вероятность P того, что частица никогда не возвращается в начало координат. Покажите, что

$$P^{-1} = \int G(1, \mathbf{q}) \frac{d^n q}{(2\pi)^n}. \tag{2.17}$$

Здесь интеграл берется по зоне Бриллюэна, т. е. по периоду обратной решетки.

Вероятность возврата (2.17) имеет нетривиальную зависимость от размерности решетки n. Покажите, что

а) $P = 0$ при $n \leqslant 2$;

б) $0 < P < 1$ при $n > 2$;

в) $P \to 1$ при $n \gg 2$.

Поскольку перечисленные свойства чувствительны только к поведению $G(1, \mathbf{q})$ при малых $\mathbf{q}$, т. е. на больших масштабах, они имеют место для произвольного диффузионного движения, а не только для блуждания по решетке. Типичная диффузионная траектория имеет бесконечно много возвратов при $n \leqslant 2$, и конечное число при $n > 2$.

Задача 10. Второй пример использования функций Грина — из электродинамики. Рассмотрим модель проводящей среды, представляющую собой n-мерную сетку из одинаковых сопротивлений. Сетка образует n-мерную кубическую решетку, сопротивление каждого ребра

которой равно R. Обозначим через $R_{\mathbf{x}}$ полное сопротивление решетки между узлами 0 и $\mathbf{x}$. Покажите, что

$$R_{\mathbf{x}} = \frac{R}{n}\int (1 - e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}})\, G(1,\mathbf{q})\frac{d^n q}{(2\pi)^n}, \tag{2.18}$$

где $G(z,\mathbf{q})$ — функция Грина, введенная в задаче 9. Исследуйте поведение $R_{\mathbf{x}}$ при $|\mathbf{x}| \gg 1$ в зависимости от размерности n.

2.3. Решения задач 5–10

5. Представим гамильтониан в виде $\widehat{\mathscr{H}} = \widehat{\mathscr{H}}_0 + \widehat{\mathscr{H}}_{\rm int}$, где

$$\widehat{\mathscr{H}}_0 = \mu B_0 \sigma_z = \begin{pmatrix} \mu B_0 & 0 \\ 0 & -\mu B_0 \end{pmatrix}, \tag{2.19}$$

$$\widehat{\mathscr{H}}_{\rm int} = \mu B_1(\sigma_x \cos\omega t + \sigma_y \sin\omega t) = \begin{pmatrix} 0 & \mu B_1 e^{-i\omega t} \\ \mu B_1 e^{i\omega t} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

В представлении взаимодействия $i\dot{\psi} = \widehat{\mathscr{H}}_{\rm int}(t)\psi$, где

$$\widehat{\mathscr{H}}_{\rm int}(t) = e^{i\widehat{\mathscr{H}}_0 t}\widehat{\mathscr{H}}_{\rm int} e^{-i\widehat{\mathscr{H}}_0 t} = \begin{pmatrix} e^{i\mu B_0 t} & 0 \\ 0 & e^{-i\mu B_0 t} \end{pmatrix} \times \\ \times \widehat{\mathscr{H}}_{\rm int}\begin{pmatrix} e^{-i\mu B_0 t} & 0 \\ 0 & e^{i\mu B_0 t} \end{pmatrix} = \mu B_1 \begin{pmatrix} 0 & e^{-2i\Omega t} \\ e^{2i\Omega t} & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.21}$$

где $\Omega = \omega/2 - \mu B_0$. Отсюда получаем уравнения

$$i\dot{\psi}_\uparrow = \mu B_1 e^{-2i\Omega t}\psi_\downarrow, \quad i\dot{\psi}_\downarrow = \mu B_1 e^{2i\Omega t}\psi_\uparrow. \tag{2.22}$$

Введем новые переменные:

$$\varphi_\uparrow = e^{i\Omega t}\psi_\uparrow, \quad \varphi_\downarrow = e^{-i\Omega t}\psi_\downarrow. \tag{2.23}$$

Уравнения для $\varphi_\alpha(t)$ не содержат явной зависимости от времени:

$$i\dot{\varphi}_\uparrow + \Omega\varphi_\uparrow = \mu B_1\varphi_\downarrow, \quad i\dot{\varphi}_\downarrow - \Omega\varphi_\downarrow = \mu B_1\varphi_\uparrow,$$

или

$$i\dot{\varphi} = \begin{pmatrix} -\Omega & \mu B_1 \\ \mu B_1 & \Omega \end{pmatrix}\varphi. \tag{2.24}$$

Общее решение этих уравнений имеет вид

$$\varphi(t) = c_+\begin{pmatrix} (1+\lambda)^{1/2} \\ -(1-\lambda)^{1/2} \end{pmatrix} e^{i\widetilde{\omega}t} + c_-\begin{pmatrix} (1-\lambda)^{1/2} \\ (1+\lambda)^{1/2} \end{pmatrix} e^{-i\widetilde{\omega}t}, \tag{2.25}$$

где $\widetilde{\omega} = \sqrt{\Omega^2 + (\mu B_1)^2}$, $\lambda = \Omega/\widetilde{\omega}$, а коэффициенты $c_\pm$ зависят от начальных условий.

Полная S-матрица определяется из $\psi_i(t) = \widehat{S}(t)\psi_i(0)$. Сравнивая с (2.25), получаем

$$\widehat{S}(t) = \begin{pmatrix} e^{-i\Omega t} & 0 \\ 0 & e^{i\Omega t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (1+\lambda)^{1/2}e^{i\widetilde{\omega}t} & (1-\lambda)^{1/2}e^{-i\widetilde{\omega}t} \\ -(1-\lambda)^{1/2}e^{i\widetilde{\omega}t} & (1+\lambda)^{1/2}e^{-i\widetilde{\omega}t} \end{pmatrix} \times \\ \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (1+\lambda)^{1/2} & -(1-\lambda)^{1/2} \\ (1-\lambda)^{1/2} & (1+\lambda)^{1/2} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} W(t)e^{-i\Omega t} & -i(1-\lambda^2)^{1/2}e^{-i\Omega t}\sin\widetilde{\omega}t \\ -i(1-\lambda^2)^{1/2}e^{i\Omega t}\sin\widetilde{\omega}t & W^*(t)e^{i\Omega t} \end{pmatrix}, \tag{2.26}$$

где $W(t) = \cos\widetilde{\omega}t + i\lambda\sin\widetilde{\omega}t$.

Рассмотрим теперь вероятность переворота спина. Ее можно найти с помощью S-матрицы, а можно и прямо из (2.25). Воспользуемся вторым способом. Поскольку при $t = 0$ $\varphi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, то коэффициенты $c_\pm$ в выражении (2.25) есть $c_+ = (1+\lambda)^{1/2}/2$, $c_- = (1-\lambda)^{1/2}/2$. Отсюда

$$\varphi_\downarrow(t) = \frac{1}{2}\sqrt{1-\lambda^2}\,(e^{-i\widetilde{\omega}t} - e^{i\widetilde{\omega}t}) = \frac{\mu B_1}{i\widetilde{\omega}}\sin\widetilde{\omega}t. \tag{2.27}$$

Вероятность обнаружения состояния $|\downarrow\rangle$ при $t > 0$ равна

$$p_\downarrow(t) = |\varphi_\downarrow(t)|^2 = \frac{(\mu B_1)^2}{\Omega^2 + (\mu B_1)^2}\sin^2\widetilde{\omega}t. \tag{2.28}$$

Если выполнено условие резонанса $\omega = 2\mu B_0$, то $\Omega = 0$, $\widetilde{\omega} = \mu B_1$ и выражение для S-матрицы упрощается:

$$\widehat{S}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\mu B_1 t) & -i\sin(\mu B_1 t) \\ -i\sin(\mu B_1 t) & \cos(\mu B_1 t) \end{pmatrix}. \tag{2.29}$$

В этом случае вероятность переворота спина есть $p_\downarrow(t) = \sin^2\mu B_1 t$.

6 а. В представлении взаимодействия $\widehat{\mathscr{H}}_{\rm int} = -eEe^{i\widehat{\mathscr{H}}_0 t}\widehat{x}e^{-i\widehat{\mathscr{H}}_0 t}$, откуда

$$\langle m|\widehat{\mathscr{H}}_{\rm int}(t)|n\rangle = -eEe^{i(m-n)\omega t}\langle m|\widehat{x}|n\rangle. \tag{2.30}$$

Воспользуемся матричными элементами оператора координаты:

$$\langle m|\widehat{x}|n\rangle = l_0\langle m|a + a^+|n\rangle = l_0\Big(\delta_{m,n+1}\sqrt{m} + \delta_{m+1,n}\sqrt{n}\Big), \tag{2.31}$$

где $l_0 = \sqrt{\hbar/2m\omega}$ — размер основного состояния осциллятора. Получаем

$$\langle m|\widehat{\mathscr{H}}_{\rm int}(t)|n\rangle = -eEl_0\Big(\delta_{m,n+1}\sqrt{m}\ e^{i\omega t} + \delta_{m+1,n}\sqrt{n}\ e^{-i\omega t}\Big). \tag{2.32}$$

Теперь рассмотрим зависимость вектора состояния от времени. Из уравнения Шредингера в представлении взаимодействия, $i\hbar\dot{\psi} = \widehat{\mathscr{H}}_{\rm int}\psi$, получаем

$$\psi(t) = \psi(0) - \frac{i}{\hbar}\int\limits_0^t \widehat{\mathscr{H}}_{\rm int}(t')\psi(t')\,dt'. \tag{2.33}$$

Из такой записи видно, что проекция $\langle n|\psi(t)\rangle$ отлична от нуля только начиная с n-го порядка теории возмущений. Поэтому

$$\langle n|\psi^{(n)}(t)\rangle = -i\int\limits_0^t \langle n|\widehat{\mathscr{H}}_{\rm int}(t')|\psi^{(n-1)}(t')\rangle\,dt' = \\ = \frac{ieEl_0}{\hbar}\sqrt{n}\int\limits_0^t e^{i\omega t'}\langle n-1|\psi^{(n-1)}(t')\rangle\,dt', \tag{2.34}$$

где индекс (n) состояния $\psi^{(n)}(t)$ означает порядок теории возмущений. Вводя функции $u_n(t) = \langle n|\psi^{(n)}(t)\rangle$, получаем рекуррентные уравнения:

$$u_n(t) = \frac{ieEl_0}{\hbar}\sqrt{n}\int\limits_0^t e^{i\omega t'}u_{n-1}(t')\,dt', \tag{2.35}$$

причем $u_0(t) = 1$. Решив их, находим

$$u_n(t) = \Big(\frac{eEl_0}{\hbar\omega}\Big)^n \frac{1}{\sqrt{n!}}\,\Big(e^{i\omega t}-1\Big)^n. \tag{2.36}$$

Искомая вероятность $W_{0\to n}$ в приближении теории возмущений равна

$$|u_n(\tau)|^2 = \left(\frac{e^2E^2}{2m\omega^3\hbar}\right)^n \frac{1}{n!}\left(2\sin\frac{\omega\tau}{2}\right)^{2n} = \frac{1}{n!}\left[\frac{e^2E^2(1-\cos\omega\tau)}{m\omega^3\hbar}\right]^n. \tag{2.37}$$

Теория возмущений работает, если выражение в квадратных скобках много меньше единицы.

6 б. (*Первое решение.*) Запишем гамильтониан $\widehat{\mathscr{H}} = \widehat{\mathscr{H}}_0 + \widehat{\mathscr{H}}_{\rm int}$ через бозе-операторы:

$$\widehat{\mathscr{H}}_0 = \hbar\omega\left(a^+a + 1/2\right), \quad \widehat{\mathscr{H}}_{\rm int} = -eE\widehat{x} = -eEl_0(a + a^+) \tag{2.38}$$

($l_0 = \sqrt{\hbar/2m\omega}$). Найдем $a(t)$ и $a^+(t)$ в случае, когда $\widehat{\mathscr{H}}_{\rm int} = 0$:

$$\dot{a} = (i/\hbar)[\widehat{\mathscr{H}}_0,\, a] = i\omega[a^+a, a] = -i\omega a, \quad \dot{a}^+ = i\omega a^+. \tag{2.39}$$

Отсюда имеем

$$a(t) = a\,e^{-i\omega t}, \qquad a^+(t) = a^+e^{i\omega t}. \tag{2.40}$$

Теперь пусть $\widehat{\mathscr{H}}_{\rm int} \neq 0$. Запишем уравнения движения для a в представлении взаимодействия:

$$\dot{a} = (i/\hbar)[\widehat{\mathscr{H}}_{\rm int},\, a] = ieEl_0e^{-i\omega t}. \tag{2.41}$$

Находим решение:

$$a(\tau) = a(0) - iEl_0\int\limits_0^\tau e^{-i\omega t}dt = a(0) + \mu, \tag{2.42}$$

где $a(0)$ — канонический бозевский оператор уничтожения, а

$$\mu = \frac{eEl_0}{\hbar\omega}(e^{-i\omega\tau} - 1). \tag{2.43}$$

Отсюда получаем зависимость n-го состояния от времени:

$$|n, t=\tau\rangle = \frac{(a^+(\tau))^n}{\sqrt{n!}}|0, t=\tau\rangle = \frac{(a^+(0)+\mu^*)^n}{\sqrt{n!}}|0, t=\tau\rangle. \tag{2.44}$$

Теперь разлагаем состояние $|0, t=0\rangle$ по состояниям $|n, t=\tau\rangle$:

$$\langle n, t=\tau|0, t=0\rangle = \langle 0, t=\tau|\frac{(a(0)+\mu)^n}{\sqrt{n!}}|0; t=0\rangle = \\ = \frac{(\mu)^n}{\sqrt{n!}}\langle 0, t=\tau|0, t=0\rangle. \tag{2.45}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $a(0)|0\rangle = 0$.

Из (2.45) находим связь между вероятностями переходов:

$$W_{0\to n} = \frac{|\mu|^{2n}}{n!}W_{0\to 0}, \tag{2.46}$$

причем условие нормировки $\sum\limits_n W_{0\to n} = 1$ дает $W_{0\to 0} = e^{-|\mu|^2}$. Получается распределение Пуассона

$$W_{0\to n} = \frac{|\mu|^{2n}}{n!}e^{-|\mu|^2} \tag{2.47}$$

с параметром $|\mu|^2 = e^2E^2/m\hbar\omega^3\,(1-\cos\omega\tau)$. При малых μ ответ совпадает с результатом, полученным по теории возмущений, как и должно быть.

6 б. (*Второе решение.*) Приведем решение, показывающее связь задачи с *когерентными состояниями* осциллятора, определяемыми как собственные состояния оператора уничтожения a.

Исторически, когерентные состояния впервые появились в задаче о минимизации $\delta x\delta p$ для состояний осциллятора, рассмотренной Шредингером (1926). Позже оказалось, что они полезны и во многих других случаях. Специфическая координатно-временная структура когерентных состояний исследована в задаче 3 к § 23 [2].

Представим гамильтониан в виде

$$\widehat{\mathscr{H}} = \hbar\omega\left[a^+a + 1/2 + \lambda(a^+ + a)\right], \tag{2.48}$$

где $\lambda = -eEl_0/\hbar\omega$. Введем новые операторы

$$b = a + \lambda, \quad b^+ = a^+ + \lambda. \tag{2.49}$$

Поскольку $[b, b^+] = 1$, переход от a и a^+ к b и b^+ определяет каноническое преобразование. При этом гамильтониан становится чисто осцилляторным:

$$\widehat{\mathscr{H}} = \hbar\omega\left(b^+b + 1/2 - \lambda^2\right). \tag{2.50}$$

Введем собственные состояния оператора уничтожения b:

$$b|\eta\rangle = \eta|\eta\rangle. \tag{2.51}$$

Здесь η может быть любым комплексным числом. Нетрудно проверить, что

$$|\eta\rangle = e^{-|\eta|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\eta^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle, \tag{2.52}$$

где $|n\rangle$ — состояния гамильтониана (2.50), отвечающие энергии $E_n = \hbar\omega(n + 1/2 - \lambda^2)$. Возьмем состояние осциллятора до включения поля: $a|0_a\rangle = 0$. Используя связь a и b, находим

$$b|0_a\rangle = \lambda|0_a\rangle, \tag{2.53}$$

а значит,

$$|0_a\rangle = e^{-\lambda^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}|n_b\rangle. \tag{2.54}$$

Разложение по состояниям $|n_b\rangle$ позволяет сразу написать зависимость от времени:

$$|0_a\rangle(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\widehat{\mathscr{H}}t\right)|0_a\rangle = e^{i(\lambda^2-1/2)\omega t}e^{-\lambda^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\lambda e^{-i\omega t}\right)^n}{\sqrt{n!}}|n_b\rangle, \tag{2.55}$$

т. е.

$$b|0_a\rangle(t) = \lambda e^{-i\omega t}|0_a\rangle(t), \tag{2.56}$$

откуда

$$a|0_a\rangle(t) = \lambda(e^{-i\omega t} - 1)|0_a\rangle(t). \tag{2.57}$$

Обозначив $\mu = \lambda(e^{-i\omega t} - 1)$, получаем

$$|0_a\rangle(t) = S(t)|0_a\rangle = e^{-|\mu|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mu^n}{\sqrt{n!}}|n_a\rangle. \tag{2.58}$$

Отсюда находим столбец S-матрицы: $\langle n|\widehat{S}(t)|0\rangle e^{-|\mu|^2/2}\mu^n/\sqrt{n!}$. Искомые вероятности переходов есть

$$W_{0\to n} = e^{-|\mu|^2}\frac{|\mu|^{2n}}{n!} = \frac{1}{n!}\left[\frac{e^2E^2(1-\cos\omega t)}{m\omega^3\hbar}\right]^n\exp\left[-\frac{e^2E^2(1-\cos\omega t)}{m\omega^3\hbar}\right]. \tag{2.59}$$

Остальные матричные элементы можно получить из соотношений для зависящих от времени операторов: $\widehat{S}b^+ = b^+\widehat{S}e^{-i\omega t}$, $\widehat{S}a^+ = a^+\widehat{S}e^{-i\omega t} + \mu\widehat{S}$. Отсюда

$$\langle n|\widehat{S}|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{k}}\langle n|\widehat{S}a^+|k-1\rangle\frac{1}{\sqrt{k}}\langle n|a^+\widehat{S}e^{-i\omega t} + \mu\widehat{S}|k-1\rangle \tag{2.60}$$

и получается рекуррентная формула:

$$\langle n|\widehat{S}|k\rangle = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{k}}e^{-i\omega t}\langle n-1|\widehat{S}|k-1\rangle - \frac{\mu}{k}\langle n|\widehat{S}|k-1\rangle. \tag{2.61}$$

Применяя (2.61) достаточно много раз, выражаем $\langle n|\widehat{S}|k\rangle$ через $\langle 0|\widehat{S}|0\rangle = e^{-|\mu|^2/2}$ и получаем общую формулу:

$$\langle n|\widehat{S}|m\rangle = \frac{e^{-|\mu|^2/2}}{\sqrt{m!n!}}\sum_{k=0}^{\min(m,n)}\frac{n!m!}{k!(n-k)!(m-k)!}\mu^{n+m-2k}e^{-i\omega kt}. \tag{2.62}$$

7. Используем причинную функцию Грина

$$G_{\alpha\beta} = -i\langle\mathrm{T}\,\psi_\alpha(\mathbf{r},t)\,\psi^+_\beta(\mathbf{r}',t')\rangle\delta_{\alpha\beta}G, \tag{2.63}$$

введенную в (2.8). Плотность частиц с проекцией спина α есть

$$n_\alpha(\mathbf{r},t) = \lim_{t'\to t+0}\langle\psi^+_\alpha(\mathbf{r},t')\,\psi_\alpha(\mathbf{r},t)\rangle = -iG_{\alpha\alpha}(\mathbf{r}'=\mathbf{r}, t'=t+0) \tag{2.64}$$

(при $t' = t - 0$ из-за перестановки ψ и ψ^+ получилось бы $n_\alpha - 1$, по определению функции Грина). В нашем случае система однородна, и G зависит только от разности $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ и $t - t'$. Поэтому переходим в фурье-представление:

$$n_\alpha = -i\lim_{\tau\to-0}\int G(\varepsilon,\mathbf{p})\,e^{-i\varepsilon\tau}\,\frac{d^3\mathbf{p}\,d\varepsilon}{(2\pi)^4} = \\ = -i\lim_{\tau\to-0}\int_0^\infty\frac{4\pi p^2\,dp}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\varepsilon\tau}}{\varepsilon - \xi(p) + i\delta\,\mathrm{sgn}(p-p_0)}\,\frac{d\varepsilon}{2\pi}, \tag{2.65}$$

где $\tau = t - t'$, $\xi(p) = \mathbf{p}^2/2m - E_F$.

Контур интегрирования по ε замыкаем в верхней полуплоскости, поскольку $\tau < 0$. При этом при $p > p_0$ полюс не захвачен:

$$\int\frac{e^{-i\varepsilon\tau}}{\varepsilon - \xi(p) + i\delta}\,\frac{d\varepsilon}{2\pi} = 0, \tag{2.66}$$

а при $p < p_0$ захвачен:

$$\int\frac{e^{-i\varepsilon\tau}}{\varepsilon - \xi(p) - i\delta}\,\frac{d\varepsilon}{2\pi} = ie^{-i\xi(p)\tau}. \tag{2.67}$$

Знак мнимой части $i\delta$ определяет, заполнено ли состояние с данным p. С учетом спиновой двойки

$$n = 2\int_0^{p_0} \frac{4\pi p^2\,dp}{(2\pi)^3} = \frac{p_0^3}{3\pi^2}, \tag{2.68}$$

откуда находим $p_0^3 = 3\pi^2 n$.

8 а. Найдем

$$G_{\alpha\beta}(\varepsilon, x, x') = -i\int e^{i\varepsilon\tau}\langle \mathrm{T}\,\psi_\alpha(x)\psi_\beta^+(x')\rangle\,d\tau, \tag{2.69}$$

где $\tau = t - t'$. В импульсном представлении

$$G_{\alpha\beta}(\varepsilon, p) = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{\varepsilon - \xi(p) + i\delta\,\mathrm{sgn}\,\varepsilon}, \quad \xi(p) = \frac{p^2}{2m} - E_F. \tag{2.70}$$

Поэтому

$$G_{\alpha\beta}(\varepsilon, x, x') = \int e^{ip(x-x')}G_{\alpha\beta}(\varepsilon, p)\frac{dp}{2\pi} = -2m\delta_{\alpha\beta}\int \frac{e^{ip(x-x')}}{(p-p_1)(p-p_2)}\frac{dp}{2\pi}. \tag{2.71}$$

Полюсы подынтегрального выражения

$$p_{1,2} = \pm\varkappa, \tag{2.72}$$

где $\varkappa = \sqrt{2m(\varepsilon + E_F + i\delta\,\mathrm{sgn}\,\varepsilon)}$. Если $\varepsilon > 0$, то p_1 лежит в верхней полуплоскости, а p_2 — в нижней, а если $\varepsilon < 0$, то наоборот.

При $x > x'$ замыкаем контур интегрирования сверху:

$$G_{\alpha\beta}(\varepsilon, x, x') = -2\pi i\delta_{\alpha\beta}\frac{2m}{2\pi}\frac{e^{i(x-x')p_+}}{2p_+} = -\delta_{\alpha\beta}\frac{im}{p_+}e^{ip_+(x-x')}, \tag{2.73}$$

где $p_+ = \varkappa\,\mathrm{sgn}\,\varepsilon$ — тот из полюсов p_1, p_2, который находится в верхней полуплоскости. Повторять вычисление при $x < x'$ не нужно, поскольку $G_{\alpha\beta}(\varepsilon, x, x') = G_{\alpha\beta}(\varepsilon, x', x)$. (Это следует из четности $G_{\alpha\beta}(\varepsilon, p)$ по p.) Окончательно имеем

$$G_{\alpha\beta}(\varepsilon, x, x') = -\frac{im}{p_+}e^{ip_+|x-x'|}\delta_{\alpha\beta}. \tag{2.74}$$

8 б. В присутствии стенки функцию Грина $G^{(1)}$ находим с помощью метода изображений:

$$G^{(1)}_{\alpha\beta}(\varepsilon, x, x') = G_{\alpha\beta}(\varepsilon, x, x') - G_{\alpha\beta}(\varepsilon, x, -x'), \tag{2.75}$$

где G дается (2.74). Обосновать такой ответ можно так же, как и при использовании метода изображений в электростатике. В самом деле, $G^{(1)}_{\alpha\beta}$ удовлетворяет уравнению

$$(\varepsilon - \widehat{\mathscr{H}})G^{(1)}_{\alpha\beta}(\varepsilon, x, x') = \delta(x - x')\,\delta_{\alpha\beta} \tag{2.76}$$

и граничному условию $G^{(1)}_{\alpha\beta}(\varepsilon, 0, x') = 0$, а переход к изображениям обычным образом заменяет граничное условие условием антисимметрии.

8 в. Выразим плотность через функцию Грина, найденную в части б):

$$n(x) = -i\lim_{\tau\to-0}\mathrm{Tr}\int G^{(1)}_{\alpha\beta}(\varepsilon, x, x)\,e^{-i\varepsilon\tau}\,\frac{d\varepsilon}{2\pi}, \tag{2.77}$$

где Tr означает взятие следа. Суммируя по спинам, получаем

$$n(x) = -2i\lim_{\tau\to-0}\int \frac{e^{-i\varepsilon\tau}(1 - e^{-2ipx})}{\varepsilon - \xi(p) + i\delta\,\mathrm{sgn}\,\xi(p)}\frac{dp\,d\varepsilon}{(2\pi)^2}. \tag{2.78}$$

При интегрировании по ε, поскольку $\tau < 0$, замыкаем контур в верхней полуплоскости. Полюс захватывается при $\xi(p) < 0$, т. е. при $p^2/2m < E_F$. Находим

$$n(x) = -2i\int_{p^2<2mE_F}(1 - e^{-2ipx})\frac{2\pi i}{(2\pi)}^2\,dp. \tag{2.79}$$

Интегрируем по p:

$$n(x) = 2\int_{-p_0}^{p_0}(1 - e^{-2ipx})\frac{dp}{2\pi} = \frac{1}{\pi}\left(2p_0 - \int_{-p_0}^{p_0} e^{-2ipx}\,dp\right) = \frac{1}{\pi}\left(2p_0 - \frac{\sin(2p_0x)}{x}\right) = n_0\left(1 - \frac{\sin(2p_0x)}{2p_0x}\right), \tag{2.80}$$

где n_0 — плотность вдали от стенки. (Коэффициент в (2.80) можно проверить, подсчитав плотность частиц квазиклассически: $n_0L = 2(2p_0L)/2\pi\hbar$.) Плотность $n(x)$ обращается в нуль на стенке, а вдали осциллирует с периодом $\lambda_0 = \pi\hbar/p_0$ (рис. 2.1).

Сравним среднее расстояние между электронами $d = n_0^{-1} = \pi\hbar/2p_0$ с периодом осцилляций λ_0 — они отличаются в два раза. Это отличие связано со спином электронов. Фермиевские корреляции, приводящие к осцилляциям, имеются только для электронов с одинаковой проекцией спина. Плотность таких электронов есть $n_0/2 = \lambda_0^{-1}$, что как раз соответствует периоду осцилляций.

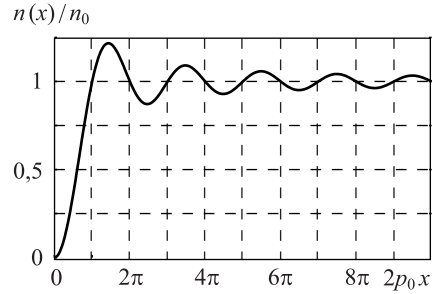

Рис. 2.1

9. Рассмотрим вероятность $p(t, \mathbf{x})$ блуждающей частицы оказаться в узле x на шаге t. Вероятности на шаге t и $t+1$ связаны простым соотношением:

$$p(t+1, \mathbf{x}) = \frac{1}{2n}\sum_{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|=1} p(t, \mathbf{x}') \tag{2.81}$$

(сумма берется по $2n$ соседям узла $\mathbf{x}$). Перейдем к фурье-образу $p(t,\mathbf{q}) = \sum\limits_{\mathbf{x}} e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} p(t,\mathbf{x})$. Соотношение (2.81) дает

$$p(t+1,\mathbf{q}) = W(\mathbf{q})\, p(t,\mathbf{q}), \quad W(\mathbf{q}) = \frac{1}{n}(\cos q_1 + \ldots + \cos q_n). \quad (2.82)$$

Находим производящую функцию

$$G(z,\mathbf{q}) = \sum_{t\geqslant 0} z^t p(t,\mathbf{q}) \frac{1}{1 - zW(\mathbf{q})}. \quad (2.83)$$

Вероятности $p(t,\mathbf{x})$ выражаются через $G(z,\mathbf{q})$ так:

$$p(t,\mathbf{x}) = \frac{-i}{(2\pi)^{n+1}} \oint \frac{dz}{z^{t+1}} \int \frac{d^n q\, e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}}}{1 - zW(\mathbf{q})}, \quad (2.84)$$

где интеграл по $d^n q$ берется по области $-\pi < q_i < \pi$ $(i = 1, \ldots, n)$, а интеграл по z — по любому контуру, охватывающему точку $z = 0$.

Теперь, чтобы найти вероятность блужданий без возврата в начало координат, немного модифицируем правила игры. Предположим, что частица блуждает случайно, как и раньше, но, как только она попадает в начало координат, ее «удаляют с поля». В этом случае связь между $p(t+1,\mathbf{x})$ и $p(t,\mathbf{x})$ будет такая:

$$p(t+1,\mathbf{x}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2n} \sum\limits_{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|=1} p(t,\mathbf{x}') & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases} \quad (2.85)$$

Переходя к фурье-образу $p(t,\mathbf{q})$, получаем

$$p(t+1,\mathbf{q}) = W(\mathbf{q})\, p(t,\mathbf{q}) - \int W(\mathbf{k})\, p(t,\mathbf{k}) \frac{d^n k}{(2\pi)^n}. \quad (2.86)$$

Производящая функция $\widetilde{G}(z,\mathbf{q}) = \sum\limits_{t\geqslant 0} z^t p(t,\mathbf{q})$ получается умножением (2.85) на z^{t+1} и суммированием по $t \geqslant 0$. Находим

$$\widetilde{G}(z,\mathbf{q})\ (1 - zW(\mathbf{q})) = 1 - z \int W(\mathbf{k})\, \widetilde{G}(z,\mathbf{k}) \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \quad (2.87)$$

Это уравнение можно записать в таком виде:

$$\widetilde{G}(z,\mathbf{q}) = G(z,\mathbf{q}) + G(z,\mathbf{q}) \int \Sigma(z,\mathbf{k})\, \widetilde{G}(z,\mathbf{k}) \frac{d^n k}{(2\pi)^n}, \quad (2.88)$$

где $\Sigma(z,\mathbf{k}) = G^{-1}(z,\mathbf{k}) - 1$. (Заметим, что по форме уравнение (2.88) напоминает уравнение Дайсона (см. 4.9)).

Ищем решение (2.88) в виде

$$\widetilde{G}(z,\mathbf{q}) = \lambda(z)\, G(z,\mathbf{q}), \quad (2.89)$$

где $\lambda(z)$ — некоторая функция z. Подставляя (2.89) в (2.88), находим

$$\lambda(z) = 1 - \lambda(z) \int (G(z,\mathbf{q}) - 1) \frac{d^n q}{(2\pi)^n}, \quad (2.90)$$

откуда

$$\lambda^{-1}(z) = \int G(z,\mathbf{q}) \frac{d^n q}{(2\pi)^n}. \quad (2.91)$$

Рассмотрим вероятность P_t того, что частица за t шагов ни разу не вернулась в начало координат. Производящая функция $F(z) = \sum\limits_{t\geqslant 0} z^t P_t$, очевидно, есть

$$F(z) = \widetilde{G}(z, \mathbf{q} = 0) = \frac{\lambda(z)}{1 - z}. \quad (2.92)$$

Находим вероятность

$$P_t = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=r} \frac{dz}{z^{t+1}} \frac{\lambda(z)}{1 - z}, \quad (2.93)$$

где $\lambda(z)$ дается (2.91), а радиус контура интегрирования $r < 1$.

Для нахождения вероятности того, что частица никогда не вернется в начало координат, необходимо перейти в (2.93) к пределу $t \to \infty$. Это удобно сделать, рассмотрев

$$P_{a,t} = A_t(P_0 + aP_1 + \ldots + a^{t-1}P_{t-1}) = \frac{A_t}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=r} \frac{(1 - a^t z^{-t})\lambda(z)}{(1 - z)(z - a)} dz, \quad (2.94)$$

где a — вспомогательный параметр, принимающий значения $0 < a < r$, а $A_t = (1 + a + \ldots + a^{t-1})^{-1} = (1 - a)/(1 - a^t)$. Переходя в (2.94) к пределу $t \to \infty$, получаем

$$P_a^* = \frac{1 - a}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=r} \frac{\lambda(z)\, dz}{(1 - z)(z - a)}. \quad (2.95)$$

Рассмотрим контурный интеграл (2.95). Функция $\lambda(z)$ аналитична внутри единичного круга, поэтому внутри контура $|z| = r$ подынтегральное выражение в (2.95) имеет один простой полюс $z = a$. Вычет в точке $z = a$ есть $\lambda(a)$, и поэтому $P_a^* = \lambda(a)$. Искомая вероятность невозвращения, согласно (2.94), есть $\lim\limits_{a\to 1} P_a^*$. Следовательно,

$$P = \lambda(a)_{a\to 1} = \left[\int G(1,\mathbf{q}) \frac{d^n q}{(2\pi)^n} \right]^{-1}. \quad (2.96)$$

При $n \leqslant 2$ интеграл в (2.96) расходится на малых q, поэтому вероятность невозвращения $P = 0$.

В другом пределе, при $n \to \infty$, величина суммы косинусов в $W(\mathbf{q})$ порядка $\sqrt{n}$, согласно закону больших чисел. (Это справедливо не для всех $\mathbf{q}$, а только для «типичных», но для оценки интеграла в (2.96) этого достаточно.) Заменяя в $G(1,\mathbf{q})$ величину $1 - W(\mathbf{q})$ на 1, находим, что при больших n вероятность невозвращения $P \to 1$.

10. Для того чтобы найти сопротивление сетки между двумя произвольными узлами, сначала рассмотрим более простую ситуацию. Допустим, что ток I втекает в узел $\mathbf{x}=0$ и растекается на бесконечность. Найдем распределение потенциала $\varphi(\mathbf{x})$ на узлах. Условие сохранения тока (закон Кирхгофа) гласит:

$$\sum_{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|=1} (\varphi(\mathbf{x})-\varphi(\mathbf{x}'))/R = \begin{cases} 0 & \text{при } \mathbf{x}\neq 0, \\ I & \text{при } \mathbf{x}=0, \end{cases} \tag{2.97}$$

где сумма, как и в задаче 9, берется по ближайшим соседям $\mathbf{x}'$ узла $\mathbf{x}$. Обратим внимание, что выражение (2.97), по существу, определяет функцию Грина оператора Лапласа на решетке.

При переходе к фурье-образу уравнение (2.97) принимает вид

$$\varphi(\mathbf{q})\,\left[2n-2(\cos q_1+\ldots+\cos q_n)\right]/R = I, \tag{2.98}$$

или, что то же самое,

$$\varphi(\mathbf{q}) = \frac{IR}{2n}\,G(1,\mathbf{q}). \tag{2.99}$$

То что функция Грина уравнения Лапласа оказалась связана со случайными блужданиями, совершенно не удивительно, поскольку распределение вероятности для блужданий подчиняется уравнению диффузии, записывающемуся через n-мерный оператор Лапласа (в данном случае решеточный).

Теперь рассмотрим более сложное распределение токов и потенциалов, которое возникает, когда ток I втекает в узел 0, и такой же ток вытекает через узел $\mathbf{a}$. Потенциал в этом случае можно выразить через $\varphi(\mathbf{x})$, пользуясь линейностью закона Кирхгофа (т. е. принципом суперпозиции). Находим

$$\varphi'(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})-\varphi(\mathbf{x}-\mathbf{a}). \tag{2.100}$$

Для определения сопротивления между узлами 0 и a найдем разность потенциалов между этими узлами:

$$\Delta\varphi = \varphi'(0)-\varphi'(\mathbf{a}) = 2\varphi(0)-\varphi(\mathbf{a})-\varphi(-\mathbf{a}). \tag{2.101}$$

Искомое сопротивление есть $\Delta\varphi/I$. С помощью обратного преобразования Фурье выражаем $\varphi(0)$ и $\varphi(\pm a)$ через фурье-образ (2.99), и получаем

$$R_{\mathbf{a}} = \frac{R}{n}\int (1-e^{i\mathbf{q}\mathbf{a}})\,G(1,\mathbf{q})\,\frac{d^nq}{(2\pi)^n}, \tag{2.102}$$

где интеграл, как и в задаче 9, берется по зоне Бриллюэна $-\pi < q_i \leqslant \pi$, $i=1,\ldots,n$.

Методом задачи 9 можно показать, что сопротивление между узлами решетки имеет простую вероятностную интерпретацию. А именно, $R_{\mathbf{a}}$ есть $\dfrac{1}{n}R$, деленное на вероятность того, что при случайном блуждании, начинающемся в точке 0, частица попадает в точку $\mathbf{a}$ до того, как возвращается в точку 0.

Рассмотрим сопротивление между двумя удаленными точками. В интеграле (2.102) при $|a|\gg 1$ вклад быстро осциллирующей экспоненты $e^{i\mathbf{q}\mathbf{a}}$ мал. Пренебрегая им, получаем такое же выражение, как для вероятности (2.96), и находим соотношение между $R_{a\to\infty}$ и P:

$$R_{a\to\infty} = \frac{R}{nP} \quad (n>2). \tag{2.103}$$

Этот результат справедлив только при $n>2$, поскольку при $n\leqslant 2$ вероятность P обращается в нуль (интеграл в (2.96) расходится). Обратим внимание, что в этой задаче «критическая размерность» $n_{\mathrm{c}}=2$ оказывается такой же, как в задаче 9 о случайных блужданиях. Это не случайно, поскольку, как уже отмечалось, и в том и в другом случае речь идет о функции Грина n-мерного уравнения Лапласа.

При $n=2$ интеграл (2.102) для $R_{a\gg 1}$ определяется малыми q. Разлагая $\cos q_i = 1-q_i^2/2+\ldots$, находим с логарифмической точностью

$$R_{a\gg 1} = \frac{R}{2\pi}\,\ln|a| \quad (n=2). \tag{2.104}$$

К такому же ответу приводит рассмотрение в приближении непрерывной среды, справедливом при $|a|\gg 1$, в котором (2.104) есть просто решение двумерного уравнения Лапласа.

Для двумерной сетки интересно найти сопротивления между близкими узлами. Это нетрудно сделать, вычисляя (2.102). Так, например,

$$R_{mm} = \frac{R}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1-e^{im(\theta_1+\theta_2)}}{1-\frac{1}{2}(\cos\theta_1+\cos\theta_2)}\,\frac{d\theta_1 d\theta_2}{(2\pi)^2} = \frac{R}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{1-e^{2im\theta_+}}{\sin\theta_+}\,d\theta_+ =$$
$$= \frac{R}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{u^{2m}-1}{u^2-1}\,du = \frac{2}{\pi}\,R\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2m-1}\right). \tag{2.105}$$

При вычислении интеграла (2.105) была сделана замена переменных $\theta_{\pm}=\dfrac{\theta_1\pm\theta_2}{2}$ и использован известный интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\frac{dw}{(a+b\cos w)} = 2\pi(a^2-b^2)^{-1/2}$.

Приведем также ответы и для некоторых других узлов[3]:

$$R_{10}=\frac{1}{2}\,R,\ R_{11}=\frac{2}{\pi}\,R,\ R_{20}=\left(2-\frac{4}{\pi}\right)R,$$
$$R_{21}=\left(\frac{4}{\pi}-\frac{1}{2}\right)R,\ R_{30}=\left(\frac{17}{2}-\frac{24}{\pi}\right)R. \tag{2.106}$$

Обратим внимание на то, что все приведенные в (2.106) значения сопротивления равны $a+b/\pi$, где a и b — рациональные числа. Нетрудно показать, что это верно и для других узлов двумерной решетки.

[3] Ответ для R_{10} может быть также получен элементарным способом, с помощью принципа суперпозиции.

Глава 3
КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА ОДНОЙ ЧАСТИЦЫ

3.1. Теория возмущений и функция Грина

В этой главе мы рассмотрим задачи одночастичной нерелятивистской квантовой механики, решаемые методом теории возмущений. Наша цель — продемонстрировать связь квантовомеханической теории возмущений с функциями Грина и диаграммной техникой.

Динамика нерелятивистской частицы во внешнем поле описывается с помощью волновой функции, удовлетворяющей уравнению Шредингера:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r},t)+V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r},t). \tag{3.1}$$

В квантовой механике рассматривают два основных типа задач: отыскание спектра энергий системы и вычисление вероятностей переходов, вызванных рассеянием или зависящим от времени внешним полем.

Решение первой задачи требует отыскания собственных значений энергии для стационарного уравнения Шредингера:

$$\varepsilon\,\psi(\mathbf{r})=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(\mathbf{r})\right)\psi(\mathbf{r}). \tag{3.2}$$

Дискретный спектр соответствует связанным состояниям, а непрерывный — свободным. В задачах второго типа (для определенности будем говорить о рассеянии) требуется найти решение уравнения (3.2), описывающее падающую и рассеянную волны, и определить амплитуду рассеяния в данное конечное состояние.

Напомним, что процессу рассеяния плоской волны $e^{i\mathbf{kr}}$ на потенциале $V(\mathbf{r})$ отвечает волновая функция

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})=e^{i\mathbf{kr}}+\chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \tag{3.3}$$

причем $\chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ имеет асимптотически вид расходящейся сферической волны:

$$\chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})=f(\mathbf{k},\,k\mathbf{n})\,(e^{ik|\mathbf{r}|}/|\mathbf{r}|),\qquad |\mathbf{r}|\to\infty, \tag{3.4}$$

где $\mathbf{n}=\mathbf{r}/|\mathbf{r}|$. Функция $f(\mathbf{k},\mathbf{k}')$ называется *амплитудой рассеяния*.

Существует несколько методов решения задачи о рассеянии (и других подобных ей задач). Мы воспользуемся методом теории возмущений, поскольку в нем связь с диаграммной техникой проявляется лучше

всего. Запишем волновую функцию $\psi(\mathbf{r})$, являющуюся решением (3.2), в виде ряда по степеням потенциала $V(\mathbf{r})$:

$$\psi(\mathbf{r})=\psi^{(0)}(\mathbf{r})+\psi^{(1)}(\mathbf{r})+\psi^{(2)}(\mathbf{r})+\ldots \tag{3.5}$$

Нетрудно убедиться, что члены ряда (3.5) удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned}
&\left(\varepsilon+\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\right)\psi^{(0)}(\mathbf{r})=0;\\
&\left(\varepsilon+\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\right)\psi^{(1)}(\mathbf{r})=V(\mathbf{r})\psi^{(0)}(\mathbf{r});\\
&\left(\varepsilon+\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\right)\psi^{(2)}(\mathbf{r})=V(\mathbf{r})\psi^{(1)}(\mathbf{r});\\
&\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Решение свободного уравнения Шредингера обычно берется в виде плоской волны, $\psi^{(0)}(\mathbf{r})=\exp(i\mathbf{kr})$. Если потенциал $V(\mathbf{r})$ слабый, достаточно ограничиться несколькими первыми членами ряда (3.5). Скажем, амплитуда рассеяния в борновском приближении определяется функцией $\psi^{(1)}(\mathbf{r})$.

С формальной точки зрения, ряд (3.5) можно рассматривать даже в случае сильного потенциала, если выполнить аналитическое продолжение по ε из области больших энергий $|\varepsilon|\gg|V(\mathbf{r})|$, в которой ряд (3.5) сходится. Вообще говоря, таким способом можно найти амплитуду рассеяния при произвольной энергии, даже если потенциал не мал. Отметим, что обычно оказывается более удобным не выписывать члены ряда по-отдельности, а перейти от (3.5) к интегральному уравнению на амплитуду рассеяния (см. задачу 11, а также [2], гл. XVII, § 130).

Чтобы установить связь с диаграммной техникой, рассмотрим функцию Грина уравнения Шредингера:

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2-V(\mathbf{r})\right)G(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t')=\delta(t-t')\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{3.7}$$

При $V(\mathbf{r})=0$ движение свободное:

$$G_0(t-t',\mathbf{r}-\mathbf{r}')=\iint G_0(\varepsilon,\mathbf{p})\,e^{i\mathbf{p}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')-i\varepsilon(t-t')}\,\frac{d\varepsilon}{2\pi}\,\frac{d^3p}{(2\pi)^3}, \tag{3.8}$$

$$G_0(\varepsilon,\mathbf{p})=\frac{1}{\varepsilon-\mathbf{p}^2/2m+i\delta}. \tag{3.9}$$

Знак мнимой части $+i\delta$ выбран так, чтобы функция $G_0(\varepsilon,\mathbf{p})$ была регулярна в верхней полуплоскости комплексной ε. Это условие обеспечивает соблюдение причинности: $G_0(t-t')=0$ при $t<t'$.

В общем случае функцию Грина можно записать как оператор:

$$\widehat{G}=\left(i\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\widehat{\mathbf{p}}^2}{2m}-V(\mathbf{r})\right)^{-1}=\left(\widehat{G}_0^{-1}-\widehat{V}\right)^{-1}=\left(1-\widehat{V}\widehat{G}_0\right)^{-1}\widehat{G}_0. \tag{3.10}$$

При малом V выражение (3.10) можно разложить в ряд:

$$\widehat{G} = \widehat{G}_0 + \widehat{G}_0\widehat{V}\widehat{G}_0 + \widehat{G}_0\widehat{V}\widehat{G}_0\widehat{V}\widehat{G}_0 + \widehat{G}_0\widehat{V}\widehat{G}_0\widehat{V}\widehat{G}_0\widehat{V}\widehat{G}_0 + \dots , \tag{3.11}$$

причем произведения $\widehat{G}_0$ и $\widehat{V}$ следует понимать в операторном смысле (как свертку).

Для нас существенно, что между рядом (3.11) для функции Грина и рядом теории возмущений (3.5) имеется почленное взаимнооднозначное соответствие. Пользуясь этим соответствием, можно связать амплитуду рассеяния с функцией Грина (3.7). При этом оказывается, что интегральное уравнение Дайсона для собственно-энергетической части гриновской функции, с помощью которого обычно суммируют ряды типа (3.11), в точности соответствует интегральному уравнению для амплитуды рассеяния (см. задачу 11, а также гл. 4).

Функцию Грина можно использовать также и для отыскания спектра квантовомеханической системы. Известно, что амплитуда рассеяния, как функция энергии ε, имеет полюсы во всех точках дискретного спектра[1]. Таким же свойством обладает и функция Грина (3.7), непосредственно связанная с амплитудой рассеяния. Поэтому функции Грина могут с одинаковым успехом применяться как в задачах, касающихся связанных состояний, так и в задачах о рассеянии. Примеры такого рода приведены в задачах 12 и 13.

Литература: Метод решения уравнения Шредингера, использующий потенциальную энергию в качестве возмущения, изложен в [2], § 45. Определение квантовомеханической амплитуды рассеяния, а также доказательство теоремы унитарности и других полезных свойств можно найти в [2], § 123–126, 133. Интегральное уравнение для амплитуды рассеяния в импульсном представлении выведено в [2], § 130.

3.2. Задачи 11–15

Задача 11. (*Диаграммный ряд и интегральное уравнение для амплитуды рассеяния.*) Покажите, что рассеяние частицы в статическом внешнем поле $V(\mathbf{r})$ описывается суммой графиков (рис. 3.1):

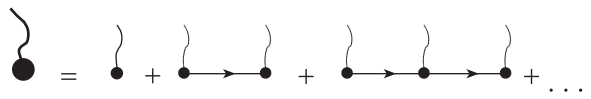

Рис. 3.1

Какие выражения надо сопоставлять графическим элементам? (Используйте импульсное представление.)

[1] См. [2], гл. XVII, § 128, 129.

Свяжите диаграммы на рис. 3.1 с амплитудой рассеяния $f(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$, определенной в (3.3), (3.4). Получите соотношение

$$f(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} F(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2), \tag{3.12}$$

где $F(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ удовлетворяет уравнению

$$F(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = V(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) + \int \frac{V(\mathbf{k}_2 - \mathbf{q})\, F(\mathbf{k}_1, \mathbf{q})}{\varepsilon - \hbar^2\mathbf{q}^2/2m + i\delta} \frac{d^3q}{(2\pi)^3}, \tag{3.13}$$

$\varepsilon = \hbar^2\mathbf{k}_1^2/(2m) = \hbar^2\mathbf{k}_2^2/(2m)$.

Определенную так амплитуду $F(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ называют *амплитудой рассеяния в энергетической нормировке*. Пользоваться ею часто бывает удобнее, чем обычной амплитудой рассеяния. Именно такая амплитуда рассеяния естественно возникает в диаграммной технике (см. другие задачи этой главы, а также задачи глав 9–11). По сравнению с обычной квантовомеханической амплитудой рассеяния $f(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$, она менее произвольна, поскольку никак не зависит от выбора нормировки плоских волн.

Задача 12. (*Слабо связанное состояние в мелкой яме.*) Мелкой называется потенциальная яма, глубина которой $U_0 \ll \hbar^2/2ma^2$, где a — радиус ямы. Размер связанного состояния в такой яме много больше ее радиуса, а энергия связи — много меньше глубины ямы U_0. Рассмотрим мелкую яму в пространстве произвольной размерности D, и выясним, в каких случаях в ней может образоваться связанное состояние.

Решите эту задачу, используя связь амплитуды рассеяния (3.13) со связанными состояниями: энергия каждого связанного состояния соответствует полюсу амплитуды $F(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ как функции энергии ε. Покажите, что связанное состояние в мелкой яме существует только при $D \leqslant 2$. Воспользуйтесь тем, что в пространстве размерности D амплитуда $F(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ удовлетворяет уравнению, получающемуся из (3.13) заменой $d^3q/(2\pi)^3 \to d^Dq/(2\pi)^D$. В (3.13) замените потенциал ямы на δ-функцию — при этом все интегрирования по импульсам станут независимыми. Сравните результаты, получающиеся при $D = 1, 2$, с известными квантовомеханическим выражениями (см. задачи в [2], § 45).

Задача 13. (*Двумерное рассеяние: логарифм и ренормгруппа.*) Рассмотрим подробнее рассеяние в размерности два на короткодействующем потенциале. Это может быть яма, причем не обязательно мелкая, или потенциал положительного знака. Определим зависимость амплитуды рассеяния F от энергии в низкоэнергетической области.

Нас интересует область энергий много меньших $\varepsilon_a = \hbar^2/2ma^2$, где a — радиус ямы. Ясно, что зависимость от энергии ε возникает, как и в задаче 12, от интегрирования по $|q| \ll a^{-1}$. Для правильного описания низкоэнергетической физики, как и при отыскании связанного состояния (задача 12), кажется достаточным заменить потенциал на δ-функцию. При этом интегралы по q начинают логарифмически

расходиться при $q \to \infty$, и их придется «обрезать руками» при $q \approx a^{-1}$. Такой «ремесленный» подход, хотя и приводит к качественно правильному ответу, является слишком грубым, так как полностью игнорирует, например, глубокие уровни в потенциале, если таковые есть.

Более рафинированный метод заключается в следующем. Вычислим производную $\partial F(\varepsilon)/\partial\varepsilon$. Дифференцируя диаграммы рис. 3.1 по ε и собирая члены, получим уравнение [2)]

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}F(\varepsilon) = \frac{m}{2\pi\hbar^2\varepsilon}F^2(\varepsilon), \tag{3.14}$$

справедливое при $|\varepsilon| \ll \varepsilon_a$. Решив это уравнение, можно связать обрезку логарифма и амплитуду F при большой энергии.

Задача 14. (*Поляризуемость связанного состояния.*) Заряженная частица находится в мелкой двумерной яме в основном состоянии. Определим поляризуемость системы в слабом внешнем поле [3)].

а. Используя результат задачи 13, запишите функцию Грина в импульсном представлении. Сформулируйте правило обхода полюсов, выражающее, что связанное состояние занято, а состояния непрерывного спектра свободны.

б. Выразите дипольный момент системы через точную функцию Грина в импульсном представлении (см. [1], с. 75 и далее).

в. Рассмотрите поправку к функции Грина, линейную по электрическому полю. Нарисуйте графики, определяющие поляризуемость. Какие из них обращаются в нуль при интегрировании по энергии или импульсам?

Задача 15. (*Теорема унитарности для амплитуды рассеяния.*) Амплитуда рассеяния $f(\mathbf{k},\mathbf{k}')$ частицы во внешнем поле удовлетворяет теореме унитарности (do'' — элемент интегрирования по направлениям $\mathbf{k}''$):

$$f(\mathbf{k},\mathbf{k}') - f^*(\mathbf{k}',\mathbf{k}) = \frac{ik}{2\pi}\int f(\mathbf{k},\mathbf{k}'')\, f^*(\mathbf{k}',\mathbf{k}'')\, do'', \tag{3.15}$$

(см. [2], §125). Мы видели, что $F(\mathbf{k},\mathbf{k}') = -(2\pi\hbar^2/m)\ f(\mathbf{k},\mathbf{k}')$ дается простой суммой графиков (задача 11). Поэтому полезно уметь получать (3.15) на графическом языке. Как это сделать? Рассмотрите диаграммы, изображенные на рис. 3.2, где

$$G^{R(A)}(\varepsilon,\mathbf{p}) = \frac{1}{\varepsilon - \mathbf{p}^2/2m \pm i\delta} \tag{3.16}$$

— запаздывающая и опережающая функции Грина. Получите левую и правую части (3.15), просуммировав эти графики двумя разными способами.

Аналогично получите соотношение унитарности в двумерном случае. Какова связь двумерной амплитуды рассеяния $f(\mathbf{k},\mathbf{k}')$ с $F(\mathbf{k},\mathbf{k}')$? Убедитесь, что амплитуда F, найденная в задаче 13, обладает свойством унитарности.

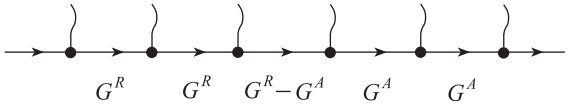

Рис. 3.2

Эта задача весьма важна для дальнейшего, поскольку в ней на простейшем примере показан прием, обобщающийся на более сложные случаи. Для любого процесса рассеяния, распада, перехода и т. д. имеется связь между его вероятностью и мнимой частью амплитуды. Эта связь описывается *теоремой унитарности*. В графическом представлении, мнимая часть какой-либо амплитуды может быть найдена путем разбиения соответствующих диаграмм каким–либо сечением, и заменой функций Грина по одну сторону сечения на комплексно-сопряженные функции. При этом следует просуммировать по всем возможным способам выбора сечения диаграммы. Состояния в сечении имеют смысл конечных состояний распада, рассеяния, и т. п.

3.3. Решения задач 11–15

11. Мы будем обращаться с функцией Грина несколько более вольно, чем это принято в учебниках по квантовой механике. Перед тем, как читать решение, полезно вспомнить стандартный вывод интегрального уравнения для амплитуды рассеяния, использующий уравнение Шредингера в импульсном представлении (см. [2], §130).

Чтобы найти состояние рассеяния (3.3), (3.4), запишем уравнение Шредингера для движения в потенциале $V(\mathbf{r})$ через функцию Грина:

$$\widehat{G}^{-1}\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{или} \quad \big(\widehat{G}_0^{-1} - \widehat{V}\big)\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = 0. \tag{3.17}$$

Будем искать решение в виде (3.3). На массовой поверхности, при $\varepsilon = k^2/2m$, получаем уравнение для $\chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$:

$$\big(\widehat{G}_0^{-1} - \widehat{V}\big)\ \chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = V|\mathbf{k}\rangle. \tag{3.18}$$

Записываем решение через функцию Грина, $\chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \langle\mathbf{r}|\widehat{G}\widehat{V}|\mathbf{k}\rangle$, и разлагаем $\widehat{G}$ в ряд по $\widehat{V}$:

$$\chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \langle\mathbf{r}|\widehat{G}_0\widehat{V} + \widehat{G}_0\widehat{V}\,\widehat{G}_0\widehat{V} + \ldots|\mathbf{k}\rangle. \tag{3.19}$$

Удобно переписать это выражение, введя оператор

$$\widehat{F} = \widehat{V} + \widehat{V}\widehat{G}_0\widehat{V} + \widehat{V}\widehat{G}_0\widehat{V}\widehat{G}_0\widehat{V} + \ldots \tag{3.20}$$

Имеем

$$\chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \langle\mathbf{r}|\widehat{G}_0\widehat{F}|\mathbf{k}\rangle. \tag{3.21}$$

Смысл этой записи в том, что $\widehat{F}$ описывает многократное рассеяние

[2)] Уравнение такого типа называется в теории поля и статистической физике уравнением ренормгруппы.

[3)] Задачи 11–13 можно решить и без диаграмм. А задачу 14? Попытайтесь ...

падающей волны на потенциале $V(\mathbf{r})$, а $\widehat{G}_0$ — свободное движение после последнего рассеяния.

В координатном представлении G_0 имеет вид

$$G_0(\varepsilon,\mathbf{r},\mathbf{r}') = \int \frac{e^{i\mathbf{p}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{\varepsilon - \mathbf{p}^2/2m + i\delta}\,\frac{d^3p}{(2\pi)^3} = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\,\frac{e^{i\varkappa|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \qquad (3.22)$$

где $\hbar\varkappa = \sqrt{2m\varepsilon}$. На массовой поверхности $\varkappa = k$.

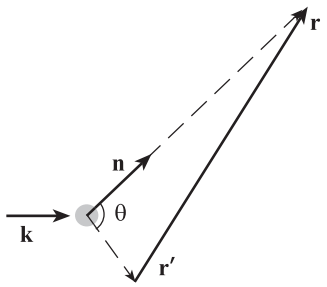

Рис. 3.3

Слагаемое $i\delta$ в знаменателе (3.22) введено для того, чтобы выбрать запаздывающее решение. С тем же успехом можно было бы выбрать знак $-i\delta$, что привело бы к ряду для $f^*(\mathbf{k}',\mathbf{k})$. Комплексно-сопряженная амплитуда соответствует опережающему решению задачи о рассеянии.

Нас интересует асимптотика $\chi(\mathbf{r})$, поэтому запишем $\mathbf{r} = R\mathbf{n}$ и будем считать R большим. Тогда $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = R - |\mathbf{r}'|\cos\theta + O(1/R)$, где θ — угол между $\mathbf{n}$ и $\mathbf{r}'$ (рис. 3.3).

Подставляем G_0 в виде (3.22) в (3.21) и разлагаем $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$:

$$\chi(\mathbf{r}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\,\frac{e^{i\varkappa R}}{R}\int e^{-i\varkappa|\mathbf{r}'|\cos\theta}\langle\mathbf{r}'|F|\mathbf{k}\rangle d^3r'. \qquad (3.23)$$

Сравнивая этот ответ с определением амплитуды рассеяния, получаем требуемое соотношение:

$$f(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\langle\mathbf{k}_2|\widehat{F}|\mathbf{k}_1\rangle, \quad \text{где} \quad \mathbf{k}_2 = |k_1|\mathbf{n}. \qquad (3.24)$$

Перейдем к выводу интегрального уравнения. Ряд для $\widehat{F}$ может быть представлен графически, как показано на рис. 3.1. Запишем сумму

$$F = \widehat{V} + \widehat{V}\widehat{G}_0\widehat{V} + \widehat{V}\widehat{G}_0\widehat{V}\widehat{G}_0\widehat{V} + \ldots \qquad (3.25)$$

в импульсном представлении:

$$\begin{gathered} F(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2) = F^{(1)}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2) + F^{(2)}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2) + \ldots\,, \\ F^{(1)}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2) = V(\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1), \\ F^{(2)}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2) = \int \frac{V(\mathbf{k}_2-\mathbf{q})\,V(\mathbf{q}-\mathbf{k}_1)\,(d^3q)}{\varepsilon - \mathbf{q}^2/(2m) + i\delta}, \qquad (3.26) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F^{(n)}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2) = \int\ldots\int \frac{V(\mathbf{k}_2-\mathbf{q}_{n-1})\ldots V(\mathbf{q}_1-\mathbf{k}_1)\,(d^3q_{n-1})\ \ldots\ (d^3q_1)}{\bigl(\varepsilon-\mathbf{q}_{n-1}^2/(2m)+i\delta\bigr)\ldots\bigl(\varepsilon-\mathbf{q}_1^2/(2m)+i\delta\bigr)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

где $(d^3q_i) = d^3q_i/(2\pi)^3$, $\varepsilon = \hbar^2\mathbf{k}_1^2/(2m)$.

Связь этих выражений с рядом на рис. 3.1 очевидна: волнистым линиям соответствуют матричные элементы потенциала, прямым линиям — функции Грина. По всем внутренним импульсам надо проинтегрировать, а входящий и выходящий импульсы взять на массовой поверхности. Получаем интегральное уравнение для $\widehat{F}$:

Рис. 3.4

$$\widehat{F} = \widehat{V} + \widehat{V}\widehat{G}_0\widehat{V} + \widehat{V}\widehat{G}_0\widehat{V}\widehat{G}_0\widehat{V} + \ldots = \widehat{V} + \widehat{V}\widehat{G}_0(\widehat{V} + \widehat{V}\widehat{G}_0\widehat{V} + \ldots) = \widehat{V} + \widehat{V}\widehat{G}_0\widehat{F}. \qquad (3.27)$$

Графически это можно изобразить, как показано на рис. 3.4.

В импульсном представлении интегральное уравнение принимает вид

$$F(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2) = V(\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1) + \frac{2m}{\hbar^2}\int \frac{V(\mathbf{k}_2-\mathbf{q})\,F(\mathbf{k}_1,\mathbf{q})}{k_1^2 - q^2 + i\delta}\,\frac{d^3q}{(2\pi)^3}. \qquad (3.28)$$

Решая это уравнение последовательными приближениями, вновь получаем ряд для $\widehat{F}$.

12. Полюсы функции Грина $\widehat{G}(\varepsilon)$ дают спектр системы. При этом, поскольку $\widehat{G}$ и $\widehat{F}$ связаны соотношением $\widehat{G} = \widehat{G}_0 + \widehat{G}_0\widehat{F}\widehat{G}_0$, каждому связанному состоянию отвечает полюс $\widehat{F}(\varepsilon)$.

Начнем со случая $D = 1$. Рассмотрим одномерную яму глубины U_0 и ширины a. Заменяя потенциал на δ-функцию $V(x) = -U_0 a\,\delta(x)$, получаем фурье-компоненту $V(q) = -U_0 a = \text{const}$. При этом уравнение для $F(k,k')$ принимает вид

$$F(k,k') = -U_0 a + U_0 a\int \frac{F(k,q)}{\varepsilon - q^2/(2m) + i\delta}\,\frac{dq}{2\pi}. \qquad (3.29)$$

Из (3.29) видно, что $F(k,k')$ не зависит от k'. Поэтому

$$F(k) = -U_0 a - \frac{U_0 a}{2\pi}F(k)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2m\,dq}{q^2 - k^2 - i\delta}, \qquad (3.30)$$

что дает $F^{-1} + (U_0 a)^{-1} = -im/k = -i\sqrt{m/2\varepsilon}$, где $\varepsilon = k^2/(2m)$. Отсюда получаем

$$F(\varepsilon) = -\frac{U_0 a\sqrt{2(\varepsilon+i\delta)/m}}{\sqrt{2(\varepsilon+i\delta)/m} + iU_0 a}. \qquad (3.31)$$

Амплитуда рассеяния $F(\varepsilon)$ имеет полюс при $\varepsilon_0 = -mU_0^2a^2/(2\hbar^2)$, что совпадает с известным ответом для одномерной δ-ямы.

Пусть теперь $D = 2$. Снова считаем фурье-компоненту потенциала независящей от k: $V(k) = -U_0 a^2$. Уравнение для F имеет вид

$$F(\varepsilon) = -U_0 a^2 + U_0 a^2 \frac{2m}{\hbar^2} \int F(\varepsilon)\, \frac{2\pi q}{q^2 - k^2 - i\delta}\, \frac{dq}{(2\pi)^2}, \tag{3.32}$$

где F снова есть функция только ε. Интеграл

$$\int_0^\infty \frac{dq^2}{q^2 - k^2 - i\delta} \tag{3.33}$$

логарифмически расходится на верхнем пределе. Но это не страшно: при $q \geqslant a^{-1}$ фурье-компонента $V(k)$ начинает быстро осциллировать, и интеграл с $V(k)$ сходится. Следовательно, можно пользоваться выражением (3.33), обрезав его «вручную» при $q \approx a^{-1}$:

$$\int_0^{a^{-2}} \frac{dq^2}{q^2 - k^2 - i\delta} = \pi i + \ln \frac{1}{a^2(k^2 + i\delta)}. \tag{3.34}$$

Итак,

$$F(\varepsilon) \approx -\frac{U_0 a^2}{1 + (2ma^2 U_0/4\pi\hbar^2)\ln(-k^2 a^2)} = \\ = -\frac{U_0 a^2}{1 + (mU_0 a^2/2\pi\hbar^2)\ln(-\varepsilon m a^2/\hbar^2)}. \tag{3.35}$$

Дискретный уровень

$$\varepsilon_0 \approx -\frac{\hbar^2}{ma^2} \exp\left(-\frac{2\pi\hbar^2}{ma^2 U_0}\right). \tag{3.36}$$

Обратим внимание, что из-за неизвестного множителя порядка единицы, появившегося при обрезании в аргументе логарифма, уровень ε_0 дается выражением (3.36) только по порядку величины.

В размерности $D > 2$ интеграл

$$\int_0^{a^{-1}} \frac{q^{D-1} dq}{q^2 - k^2 - i\delta} \tag{3.37}$$

остается конечным при $k \to 0$. Поэтому для слабого потенциала $F(\varepsilon)$ не имеет полюсов при $|k| \ll a^{-1}$, что означает отсутствие связанного состояния.

13. Производную $\partial F/\partial\varepsilon$ можно связать с F в общем виде, так, что получится выражение, справедливое при произвольном потенциале. Для этого надо продифференцировать ряд на рис. 3.1 почленно (рис. 3.5).

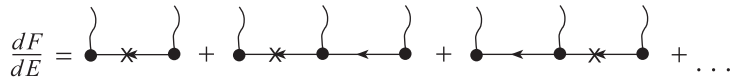

Рис. 3.5

Линия с крестиком обозначает:

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon} G_0 = -\frac{1}{[\varepsilon - p^2/(2m) + i\delta]^2} = -G_0^2. \tag{3.38}$$

Группируя члены графического ряда и пользуясь графическим представлением амплитуды F (см. рисунки 3.1, 3.4), находим $\dfrac{dF}{dE}$ (рис. 3.6):

Рис. 3.6

Отсюда:

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon} F_\varepsilon(k_1, k_2) = -\int \frac{F_\varepsilon(k_1, q) F_\varepsilon(q, k_2)}{(\varepsilon - q^2/2m + i\delta)^2}\, \frac{d^2 q}{(2\pi)^2}. \tag{3.39}$$

Еще раз обратим внимание на то, что (3.39) — точный результат, а не приближенный.

Чтобы применить соотношение (3.39) в низкоэнергетической области, заметим, что зависимость $F_\varepsilon(k_1, k_2)$ от k_1 и k_2 имеет характерный масштаб $k_{1,2} \approx a^{-1}$. Поэтому при малых энергиях $|\varepsilon| \ll \varepsilon_a = \hbar^2/(ma^2)$ интеграл по q в (3.39) сходится в области, где зависимость F от q несущественна. Вычисляя интеграл, получаем

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon} F = -\frac{m}{2\pi\hbar^2\varepsilon} F^2. \tag{3.40}$$

Решение этого уравнения есть:

$$F(\varepsilon) = \frac{2\pi\hbar^2}{m \ln((\varepsilon + i\delta)/\varepsilon_0)}, \tag{3.41}$$

где ε_0 — неизвестная константа. Точка ветвления логарифма при $\varepsilon = 0$ смещена в нижнюю полуплоскость, поскольку вместо ε стоит $\varepsilon + i\delta$. Константа ε_0 вещественна и отрицательна, поскольку при $\varepsilon < 0$ амплитуда F вещественна. (Чтобы в этом убедиться, можно записать члены ряда для F, показанные на рис. 3.1, в координатном представлении, где функция Грина имеет вид $G_\varepsilon(r) = -(m/2\pi r)\exp(-\varkappa r)$, $\varkappa^2 = 2m\varepsilon$. Это выражение вещественно при $\varepsilon < 0$.)

Если ε_0 находится в низкоэнергетической области, $|\varepsilon_0| \leqslant \varepsilon_a$, то полюс при $\varepsilon = \varepsilon_0$ имеет реальный смысл, и ему соответствует дискретный уровень. В противном случае полюс находится вне области энергий, где применимо сделанное приближение, и поэтому смысла не имеет. Такая ситуация возникает, например, для рассеяния на слабом отталкивающем потенциале, когда ε_0 дается выражением (3.36) с отрицательным U_0.

14 а. Согласно задаче 11 функция Грина есть $G = G_0 + G_0 F G_0$, где амплитуда F найдена в задаче 13. В импульсном представлении

$$G(\varepsilon, \mathbf{p}, \mathbf{p}') = (2\pi)^2 \frac{\delta^{(2)}(\mathbf{p}-\mathbf{p}')}{\varepsilon - p^2/(2m) + i\delta} + \\ + \frac{F(\varepsilon)}{[\varepsilon - p^2/(2m) + i\delta][\varepsilon - p'^2/(2m) + i\delta]}. \quad (3.42)$$

Положительный знак мнимой части $i\delta$ означает, что состояния непрерывного спектра пусты. При интегрировании по ε эти полюсы надо обходить сверху. Осталось выбрать обход полюса в $F(\varepsilon)$ при $\varepsilon = \varepsilon_0$. Это состояние заполнено, поэтому сдвигаем полюс вверх: $\varepsilon_0 \to \varepsilon_0 + i\delta$. Получаем $F(\varepsilon) = 2\pi\hbar^2/(m \ln(\varepsilon/\varepsilon_0))$, причем обход полюса $\varepsilon = \varepsilon_0$ и точки ветвления $\varepsilon = 0$ такой, как показано на рис. 3.7.

Рис. 3.7

14 б. Выражаем дипольный момент через функцию Грина:

$$\mathscr{P} = e\int \mathbf{r}\, n(\mathbf{r})\, d^2r = -ie\int \lim_{t\to -0} \mathbf{r}\, G(t, \mathbf{r}, \mathbf{r})\, d^2r = \\ = e\iint \left(\int \mathbf{r}\, e^{i(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)\mathbf{r}}\, d^2r\right)\left(\lim_{t\to -0}\int e^{-i\omega t}\, G(\omega, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)\frac{d\omega}{2\pi i}\right)\frac{d^2p_1 d^2p_2}{(2\pi)^4} = \\ = -ie\iint \nabla_1 \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \sum \operatorname*{Res}_{\omega} G(\omega, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)\frac{d^2p_1 d^2p_2}{(2\pi)^2}, \quad (3.43)$$

где сумма вычетов берется по всем полюсам ω функции G в верхней полуплоскости ε, что соответствует заполненным уровням. Интегрируя по частям, получаем

$$\mathscr{P} = ie\int \left[\nabla_{\mathbf{p}} \sum \operatorname*{Res}_{\omega} G(\omega, \mathbf{p}, \mathbf{p}')\right]\Big|_{\mathbf{p}'=\mathbf{p}} \frac{d^2p}{(2\pi)^2}. \quad (3.44)$$

Другую (эквивалентную) форму записи можно получить, если заменить $\nabla_{\mathbf{p}}$ на $\nabla_{\mathbf{p}'}$ и изменить знак.

14 в. Взаимодействие с электрическим полем $W = -eEx$ меняет функцию Грина:

$$\widehat{G}_W = \widehat{G} + \widehat{G}\widehat{W}\widehat{G} + \widehat{G}\widehat{W}\widehat{G}\widehat{W}\widehat{G} + \dots, \quad (3.45)$$

где $\widehat{G}$ — точная функция Грина при $E = 0$. Графически это можно представить, как показано на рис. 3.8.

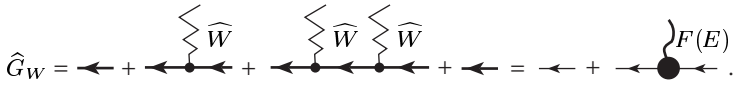

Рис. 3.8

В импульсном представлении взаимодействию W, линейному по координатам, соответствует производная δ-функции:

$$W(\mathbf{p}) = -\int eExe^{-i\mathbf{pr}}\, d^2r = -ie(2\pi)^2 E\frac{\partial}{\partial p_x}\delta^{(2)}(\mathbf{p}). \quad (3.46)$$

Для вычисления поляризуемости нужен линейный по полю член ряда (3.45). С учетом структуры G, согласно (3.42), имеем 4 слагаемых (рис. 3.9).

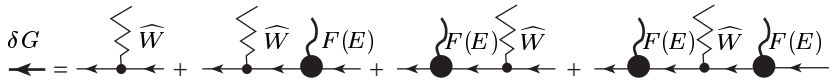

Рис. 3.9

Первое из них есть $G_0 W G_0$. Оно не имеет особенностей над контуром интегрирования по энергии и, поэтому, дает нулевой вклад. Вычислим остальные члены. Выражение $\widehat{G}_0\widehat{W}\widehat{G}_0\widehat{F}\widehat{G}_0(p, p')$, соответствующее второй диаграмме рис. 3.9, есть:

$$\int \frac{-ieE\,\partial/\partial p_x\,\delta^{(2)}(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)}{(\varepsilon - p^2/2m + i\delta)}\frac{F(\varepsilon)}{(\varepsilon - p_1^2/2m + i\delta)(\varepsilon - p'^2/2m + i\delta)}d^2\mathbf{p}_1 = \\ = \int \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p})\frac{\partial}{\partial p_{1x}}\frac{-ie\,E\,F(\varepsilon)}{(\varepsilon - p^2/2m + i\delta)} \times \\ \times \frac{1}{\left(\varepsilon - p_1^2/2m + i\delta\right)\left(\varepsilon - p'^2/2m + i\delta\right)}\, d^2\mathbf{p}_1 = \\ = -\frac{ieE}{m}F(\varepsilon)\frac{p_x}{(\varepsilon - p^2/2m + i\delta)^3(\varepsilon - p'^2/2m + i\delta)}. \quad (3.47)$$

Третье слагаемое получается из второго комплексным сопряжением и перестановкой p и p':

$$\widehat{G}_0\widehat{F}\widehat{G}_0\widehat{W}\widehat{G}_0(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \frac{ieEp'_xF(\varepsilon)/m}{(\varepsilon - p^2/2m + i\delta)(\varepsilon - p'^2/2m + i\delta)^3}. \quad (3.48)$$

Последний график $\widehat{G}_0\widehat{F}\widehat{G}_0\widehat{W}\widehat{G}_0\widehat{F}\widehat{G}_0(p, p')$ равен нулю:

$$ieEF^2(\varepsilon)\iint G_0(\varepsilon, \mathbf{p})G_0(\varepsilon, \mathbf{p}_2)G_0(\varepsilon, \mathbf{p}_1)G_0(\varepsilon, \mathbf{p}') \times \\ \times \nabla_{1x}\delta(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)\frac{d^2p_1\, d^2p_2}{(2\pi)^2} =$$

$$= -ieEF^2(\varepsilon)G_0(\varepsilon,p)G_0(\varepsilon,\mathbf{p}')\int\frac{p_{1,x}/m}{(\varepsilon-p_1^2/2m+i\delta)^3}\,\frac{d^2p_1}{(2\pi)^2}=0, \quad (3.49)$$

как интеграл от нечетной функции. Поэтому

$$\sum_\omega \operatorname{Res} G(\omega,\mathbf{p},\mathbf{p}') = \operatorname*{Res}_{\varepsilon_0} F(\varepsilon)\frac{ie}{m}E\times$$
$$\times\left[p_x' G_0(\varepsilon_0,\mathbf{p})G_0^3(\varepsilon_0,\mathbf{p}') - p_x G_0^3(\varepsilon_0,\mathbf{p})G_0(\varepsilon_0,\mathbf{p}')\right]. \quad (3.50)$$

Из-за отмеченной выше симметрии по отношению к перестановке $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ оба слагаемых дают одинаковый вклад в поляризуемость, поскольку и в выражение (3.44) для дипольного момента $\mathscr{P}$ импульсы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ входят симметрично. Следовательно, достаточно взять только первое слагаемое и удвоить ответ:

$$\mathscr{P}_x = -2\frac{e^2}{m^2}E\int\frac{p_x^2}{(\varepsilon_0-p^2/2m+i\delta)^5}\operatorname*{Res}_{\varepsilon_0}F(\varepsilon)\,\frac{d^2p}{(2\pi)^2}. \quad (3.51)$$

К такому выражению можно прийти несколько быстрее, если заметить, что вершина взаимодействия с электрическим полем устроена точно так же, как и выражение для дипольного момента (3.44). (В координатном представлении (3.50) есть свертка производной δ-функции с функцией Грина по ее аргументам.) Поэтому все вклады в поляризуемость можно представить графически, как показано на рис. 3.10. Здесь δG дается суммой четырех слагаемых, показанных на рис. 3.9, а трегольник обозначает $\nabla\delta(\mathbf{p})$ в импульсном представлении, или $\mathbf{r}$ — в координатном. Первый график на рис. 3.9 дает нуль при интегрировании по энергиям, а четвертый, из-за нечетности $\mathbf{r}$, — обращается в нуль при интегрировании по импульсам. Второй и третий графики отличны от нуля и равны в силу симметрии.

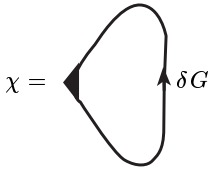

Рис. 3.10

Итак, поляризуемость

$$\chi_{\alpha\beta} = \frac{2e^2}{m^2}\int\frac{p_\alpha p_\beta(2m)^5}{(p^2+\varkappa^2)^5}\operatorname*{Res}_{\varepsilon_0}F(\varepsilon)\frac{d^2p}{(2\pi)^2}, \quad (3.52)$$

где $\varkappa^2 = 2m|\varepsilon_0|$.

Вычислим $\operatorname*{Res}_{\varepsilon_0} F(\varepsilon)$. Положив $\varepsilon = \varepsilon_0 + z$, разлагаем

$$F(\varepsilon) = \frac{2\pi}{m\ln(1+z/\varepsilon_0)} \approx \frac{2\pi\varepsilon_0}{mz},\ \text{откуда}\ \operatorname*{Res}_{\varepsilon_0} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{m}. \quad (3.53)$$

Находим

$$\chi_{\alpha\beta} = e^2m^2\varepsilon_0\int_0^{+\infty}\frac{2^6\pi\,\delta_{\alpha\beta}}{(p^2+\varkappa^2)^5}\,\frac{p^3\,dp}{2\pi} =$$
$$= \delta_{\alpha\beta}\frac{16e^2m^2\varepsilon_0}{(2m\varepsilon_0)^3}\int_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{(x+1)^5} = \frac{e^2\delta_{\alpha\beta}}{6m\varepsilon_0^2}. \quad (3.54)$$

Восстанавливая $\hbar$ по размерности, получаем $\chi = e^2\hbar^2/(6m\varepsilon_0^2)$.

15. Суммируем диаграммы, изображенные на рис. 3.2. С одной стороны, раскрывая по линейности и группируя члены, получаем разность $F(\mathbf{k},\mathbf{k}') - F^*(\mathbf{k}',\mathbf{k})$, поскольку все остальные члены, содержащие G^R и G^A одновременно, взаимно сокращаются. С другой стороны,

$$G^R - G^A = \frac{1}{\varepsilon-p^2/2m+i\delta} - \frac{1}{\varepsilon-p^2/2m-i\delta} = -2\pi i\delta\left(\varepsilon-p^2/2m\right). \quad (3.55)$$

Кроме того, при собирании всех графиков, слева от $G^R - G^A$ возникает выражение $F(\mathbf{k},\mathbf{k}')$, а справа — $F^*(\mathbf{k}',\mathbf{k})$:

$$-2\pi i\int F(\mathbf{k},\mathbf{q})\,F^*(\mathbf{k}',\mathbf{q})\,\delta\left(\varepsilon-\frac{q^2}{2m}\right)\frac{d^3q}{(2\pi)^3} =$$
$$= -2\pi i\int F(\mathbf{k},\mathbf{q})F^*(\mathbf{k}',\mathbf{q})\frac{m}{q}\,\delta(|\mathbf{q}|-|\mathbf{k}|)\,do\,\frac{q^2\,dq}{(2\pi)^3} =$$
$$= -\frac{imk}{(2\pi)^2}\int F(\mathbf{k},\mathbf{q})\,F^*(\mathbf{k}',\mathbf{q})\,do_q. \quad (3.56)$$

Сравнивая результаты, получаем теорему унитарности для амплитуды F:

$$F(\mathbf{k},\mathbf{k}') - F^*(\mathbf{k}',\mathbf{k}) = -\frac{imk}{(2\pi)^2}\int F(\mathbf{k},\mathbf{q})F^*(\mathbf{k}',\mathbf{q})\,d\theta_q. \quad (3.57)$$

Связь с квантовомеханической амплитудой рассеяния $F = -\dfrac{2\pi\hbar^2}{m}f$, была найдена в задаче 11. Выражая F через f, приходим к теореме унитарности (3.15).

Повторяя вывод в двумерном случае, получаем

$$F(\mathbf{k},\mathbf{k}') - F^*(\mathbf{k}',\mathbf{k}) = -\frac{im}{2\pi}\int F(\mathbf{k},\mathbf{q})F^*(\mathbf{k}',\mathbf{q})\,d\theta_q. \quad (3.58)$$

В размерности $D = 2$ связь F и квантовомеханической амплитуды f другая. Чтобы ее получить, поступим как в задаче 11. Возьмем выражение (3.21) для расходящейся волны, $\chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \langle\mathbf{r}|G_0F|\mathbf{k}\rangle$, верное в любой размерности, и найдем асимптотическое поведение функции G_0:

$$G_0(\varepsilon,\mathbf{r}) = \int\frac{e^{i\mathbf{pr}}}{\varepsilon-\hbar^2p^2/2m+i\delta}\,\frac{d^2p}{(2\pi)^2} \approx -\frac{m}{\hbar^2\sqrt{2\pi\,k|\mathbf{r}|}}e^{ik|\mathbf{r}|+i\pi/4} \quad (3.59)$$

при $k|\mathbf{r}|\to\infty$ (см. задачу 6 к §126 [2]). Поэтому при $D = 2$ амплитуда $f = -(m/\hbar^2\sqrt{2\pi k})\,F$.

Поэтому теорема унитарности при $D = 2$ гласит:

$$f(\mathbf{k},\mathbf{k}') - f^*(\mathbf{k}',\mathbf{k}) = i\sqrt{\frac{k}{2\pi}}\int f(\mathbf{k},\mathbf{q})\,f^*(\mathbf{k}',\mathbf{q})\,d\theta_q. \quad (3.60)$$

Отметим, что в размерности $D = 2$ более удобно включать множитель $e^{i\pi/4}$ в определение расходящейся волны, как это сделано выше, а не в амплитуду рассеяния, как в [2]. При таком определении f, соотношение унитарности принимает наиболее простой вид. Поскольку амплитуда f есть коэффициент при расходящейся волне, включать фазовый множитель в определение f или в выражение для расходящейся волны — дело вкуса.

Воспользуемся случаем, чтобы еще раз отметить существенную разницу между обычной амплитудой f и амплитудой рассеяния в энергетической нормировке F («ужирненной вершиной»). Определение амплитуды F не допускает никакого произвола, поскольку не зависит от выбора выражения для расходящейся волны.

Глава 4
ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИЕ ЧАСТИЦЫ

4.1. Правила построения диаграмм

Функции Грина дают полную информацию об основном состоянии системы и спектре ее возбуждений. Кроме того, важнейшим свойством причинных функций Грина (2.8) является то, что с их помощью можно построить теорию возмущений, согласующуюся с интуитивными представлениями. Функция Грина $G(x_2, x_1) = -i\langle \mathrm{T}\psi(x_2)\psi^+(x_1)\rangle$ в координатном представлении есть амплитуда вероятности перехода из точки x_1 пространства–времени в точку x_2. Естественно сопоставить ей линию со стрелкой, ведущую из x_1 в x_2 (рис. 4.1).

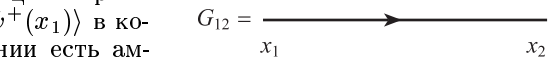

Рис. 4.1

Для невзаимодействующих ферми-частиц функция Грина в импульсном представлении дается простой формулой:

$$G_0(\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{1}{\varepsilon - \xi(\mathbf{p}) + i\delta(\mathbf{p})}. \tag{4.1}$$

Здесь $\xi(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2m - E_F$ — закон дисперсии частиц, а знак мнимой части зависит от заполнения состояния с импульсом $\mathbf{p}$:

$$\delta(\mathbf{p}) = 0\,\mathrm{sgn}(\xi(\mathbf{p})) = \begin{cases} +0, & \text{если состояние не заполнено;} \\ -0, & \text{если состояние заполнено.} \end{cases} \tag{4.2}$$

Ряд теории возмущений для функции Грина допускает удобное графическое представление в виде диаграмм. Вывод правил диаграммной техники читатель может найти в гл. 2 [1]. Мы же приведем здесь лишь краткую их сводку для случая двухчастичного взаимодействия

$$U(x - x') = U(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t'). \tag{4.3}$$

Взаимодействие, вообще говоря, может быть запаздывающим.

1. Все диаграммы строятся из двух элементов: простых линий, описывающих распространение частиц, и волнистых, описывающих взаимодействие между ними.

2. Две простые линии и одна волнистая соединяются в *вершинах*.

3. n-у порядку теории возмущений соответствуют диаграммы с $2n$ вершинами. Если речь идет о вычислении функции Грина, то диаграмма должна иметь ровно два внешних конца.

4. Все диаграммы должны быть *связными*, т. е. не должны распадаться на отдельные части, не соединенные между собой ни одной линией.

5. Каждой простой линии соответствует множитель $G_0(x-x')$, где x — начальная точка, x' — конечная. Каждой волнистой линии сопоставляется множитель $U(x-x')$.

6. Выражение, соответствующее данной диаграмме, следует проинтегрировать по координатам ее вершин.

7. После этого ответ следует умножить на $i^n\,(-1)^F$, где n — число волнистых линий, а F — число замкнутых петель, отвечающих фермичастицам.

Примеры диаграмм показаны на рис. 4.2.

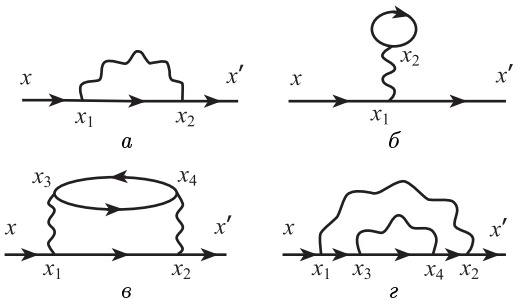

Рис. 4.2

Этим диаграммам соответствуют такие выражения:

$$\delta G_a = i\int G(x_1-x)\,G(x_2-x_1)\,G(x'-x_2)\,U(x_2-x_1)\,d^4x_1\,d^4x_2,$$

$$\delta G_б = -i\int G(x_1-x)\,G(0)\,G(x'-x_1)\,U(x_2-x_1)\,d^4x_1\,d^4x_2,$$

$$\delta G_в = \int G(x_3-x_4)\,G(x_4-x_3)G(x_2-x_1)\,G(x'-x_2)\,G(x_1-x)\times$$
$$\times\,U(x_3-x_1)\,U(x_4-x_2)\,d^4x_1\,d^4x_2\,d^4x_3\,d^4x_4,$$

$$\delta G_г = -\int G(x_3-x_2)\,G(x_4-x_3)G(x_2-x_1)\,G(x'-x_4)\,G(x_1-x)\times$$
$$\times\,U(x_4-x_1)\,U(x_3-x_2)\,d^4x_1\,d^4x_2\,d^4x_3\,d^4x_4.$$

Довольно часто удобным оказывается не координатное представление, а импульсное. Правила диаграммной техники в импульсном представлении оказываются почти такими же, как в координатном. Вместо функций Грина и потенциалов взаимодействия надо использовать их фурье-образы. При этом каждой вершине сопоставляется множитель $(2\pi)^4\delta(p_1+k-p_2)$, определяющий связь между 4-импульсами p_1 и p_2 функций Грина частиц, и 4-импульсом k линии взаимодействия. По всем независимым 4-импульсам производится интегрирование.

Различные диаграммы удобно представлять себе как вклады в амплитуду перехода частиц между точками x и x'. Например, переход, при котором не происходит взаимодействия с другими частицами системы, изображается свободной функцией Грина, а переходам с рассеянием на других частицах соответствуют диаграммы, подобные *б* и *в* на рис. 4.2. Диаграммная техника позволяет думать о многочастичных задачах на «одночастичном языке».

Два основных вида взаимодействия между электронами, имеющих значение в физике твердого тела, — это кулоновское взаимодействие и взаимодействие за счет обмена фононами. Кулоновское взаимодействие в среде выражается через диэлектрическую проницаемость $\varepsilon(\omega)$. В импульсном представлении

$$U(\omega,\mathbf{k}) = \frac{4\pi e^2}{\varepsilon(\omega)|\mathbf{k}|^2}, \quad |\mathbf{k}| \gg \omega/c. \tag{4.4}$$

Частотная дисперсия $\varepsilon(\omega)$ делает взаимодействие запаздывающим:

$$U(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t') = \frac{e^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\int \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\varepsilon(\omega)}\frac{d\omega}{2\pi}. \tag{4.5}$$

Это «квазистатическое» выражение справедливо при условии: $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \ll c|t-t'|$. Запаздывание взаимодействия приводит к таким физическим эффектам, как перенормировка массы связанного состояния (см. задачу 19).

Взаимодействие, возникающее вследствие испускания и поглощения фононов, зависит от типа фононов, а также от характера электрон–фононного взаимодействия в системе (подробнее см. гл. 6). В качестве простейшей, но в то же время реалистичной модели мы рассмотрим акустические фононы, взаимодействующие с электронами посредством деформационного потенциала. В этом случае взаимодействие принимает вид

$$U(\omega,\mathbf{k}) = g^2 D(\omega,\mathbf{k}), \tag{4.6}$$

где g — константа электрон-фононного взаимодействия, а

$$D(\omega,\mathbf{k}) = \frac{\omega_0^2(\mathbf{k})}{\omega^2-\omega_0^2(\mathbf{k})+i0} \tag{4.7}$$

— функция Грина фононов. Для акустических фононов $\omega_0(\mathbf{k}) = c|\mathbf{k}|$, где c — скорость звука (подробнее о фононах и электрон–фононном взаимодействии — см. разд. 6.1).

Акустические фононы принято описывать с помощью так называемой модели Дебая, в которой волновой вектор фонона пробегает сферическую область $|\mathbf{k}| < k_D$, объем которой равен числу колебательных степеней свободы, приходящихся на единицу объема: $(4\pi/3)k_D^3 = (2\pi)^3/v_0$, где v_0 — объем элементарной ячейки кристалла.

4.1.1. Блочное суммирование. В диаграммной технике можно не только выписывать вклад данного порядка теории возмущений, но и суммировать некоторые последовательности членов ряда. При этом оказывается достаточным вычислить относительно небольшое количество диаграмм (*блоков*), после чего можно суммировать образованные из них последовательности, подставлять их в другие диаграммы и т. д.

Техника блочного суммирования опирается на классификацию диаграмм на *приводимые* и *неприводимые*. Неприводимой называется собственно-энергетическая часть, которая не распадается при перерезании ни одной из линий частиц. В противном случае диаграмма называется *приводимой*.

Блочное суммирование для одночастичной функции Грина выполняется так. Рассмотрим произвольную диаграмму для функции Грина $G(\varepsilon, \mathbf{p})$. Она либо приводима, либо нет. Если она приводима, то разделим ее на две части, соединенные одной линией. Каждая из этих частей либо приводима, либо нет. Будем дробить таким способом приводимые диаграммы до тех пор, пока процесс не закончится. Любая диаграмма для функции Грина может быть схематически представлена как одна из диаграмм на рис. 4.3:

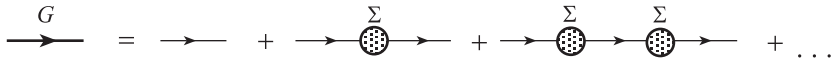

Рис. 4.3

Кружки на рис. 4.3 могут изображать любые неприводимые диаграммы, показанные на рис. 4.4. Сумма последовательности всех неприводимых диаграмм называется *собственно-энергетической частью* и обозначается через $\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})$ [1].

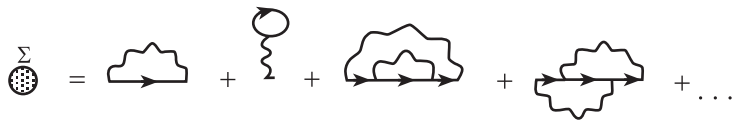

Рис. 4.4

Просуммируем теперь все диаграммы для функции Грина. Содержимое каждого кружка при этом превращается в $\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})$. В результате ряд для $G(\varepsilon, \mathbf{p})$ запишется так:

$$G = G_0 + G_0\Sigma G_0 + G_0\Sigma G_0\Sigma G_0 + \ldots \tag{4.8}$$

Как нетрудно видеть, сумма этого ряда удовлетворяет уравнению

$$G = G_0 + G_0\Sigma G, \tag{4.9}$$

[1] В теории поля $\Sigma(\varepsilon, p)$ иногда называется *массовым оператором*.

называемому уравнением Дайсона. Его решение выглядит так:

$$G^{-1}(\varepsilon, \mathbf{p}) = G_0^{-1}(\varepsilon, \mathbf{p}) - \Sigma(\varepsilon, \mathbf{p}). \tag{4.10}$$

Уравнение Дайсона дает точную связь между $G(\varepsilon, \mathbf{p})$ и $\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})$, т. е. между суммами всех приводимых и всех неприводимых диаграмм.

Конечно, найти $\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})$ в явном виде, как правило, не удается. Однако, вычислив, скажем, первую из диаграмм на рис. 4.4, мы можем сразу просуммировать целую последовательность диаграмм для $G(\varepsilon, \mathbf{p})$ (рис. 4.5):

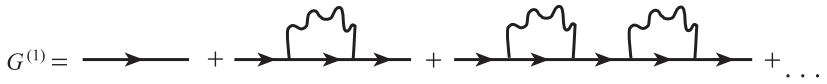

Рис. 4.5

Далее можно подставлять полученное выражение для $G(\varepsilon, \mathbf{p})$ в другие диаграммы вместо $G_0(\varepsilon, \mathbf{p})$. Графически это изображают, рисуя вместо светлой линии жирную.

Может возникнуть вопрос, зачем вообще суммировать последовательность диаграмм из разных порядков теории возмущений. Дело в том, что функция Грина $G(\varepsilon, \mathbf{p})$ обычно представляет интерес вблизи своего полюса (см. (4.12)). В этой области различные диаграммы на рис. 4.5 на самом деле оказываются одного порядка. А собственно энергетическая часть, в отличие от функции Грина, имеет, как правило, не очень сингулярное поведение. Поэтому ее можно изучать с помощью одного или нескольких первых членов ряда теории возмущений.

4.2. Полюсы функции Грина — спектр квазичастиц

Мы описали формализм диаграммной техники, не уточняя, о какой задаче идет речь — одночастичной или многочастичной. Функции Грина позволяют легко переходить от одной задачи к другой. Разница между этими двумя случаями заключается в структуре затравочной функции Грина (4.1). Для ферми-газа мнимая часть

$$i\delta(\mathbf{p}) = i0\,\mathrm{sgn}(|\mathbf{p}| - p_0), \tag{4.11}$$

где p_0 — импульс Ферми (этим выражается то, что все состояния с $|\mathbf{p}| < p_0$ заполнены, а остальные пусты). Такая функция Грина учитывает то обстоятельство, что при $|\mathbf{p}| > p_0$ возбуждениями являются частицы, а при $|\mathbf{p}| < p_0$ — дырки.

Если же речь идет об одночастичной задаче, то следует считать $\delta(\mathbf{p}) > 0$ для всех $\mathbf{p}$, поскольку все состояния пусты. В этом случае диаграммный ряд сильно упрощается. Дело в том, что в этом случае все диаграммы с замкнутыми электронными петлями оказываются равны нулю. Формально это происходит потому, что интеграл по частоте в любой петле обращается в нуль, поскольку полюсы всех функций Грина

находятся в одной и той же полуплоскости комплексной частоты. Физическую причину обращения петель в нуль можно пояснить, заметив, что в ферми-газе замкнутые петли описывают рождение электронно-дырочных пар. В одночастичной же системе рождение пар невозможно.

Функция Грина (4.10) имеет полюс, если ε и $\mathbf{p}$ удовлетворяют уравнению

$$G_0^{-1}(\varepsilon, \mathbf{p}) = \Sigma(\varepsilon, \mathbf{p}). \tag{4.12}$$

В одночастичной задаче полюсы функции Грина определяют весь спектр системы. В многочастичной же задаче оказывается, что полюсы $G(\varepsilon, \mathbf{p})$ определяют не весь спектр, а только так называемые *одночастичные* возбуждения.

В точной функции Грина

$$G(\varepsilon,\, \mathbf{p}) = -i \int \langle \mathrm{T}\, \psi(\mathbf{r},\, t)\, \psi^+(0,0)\rangle\, e^{i\varepsilon t - i\mathbf{pr}}\, d^3r\, dt\,, \tag{4.13}$$

вычисленной с учетом взаимодействия, обычно выделяют вклад *элементарных возбуждений* или *квазичастиц* — полюсы в комплексной плоскости ε, расположенные недалеко от вещественной оси:

$$G(\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{a}{\varepsilon - \xi(\mathbf{p}) + i\gamma(\mathbf{p})} \;+\; G_{\mathrm{reg}}(\varepsilon, \mathbf{p}). \tag{4.14}$$

(в выражении (4.14) выделен вклад $G_{\mathrm{reg}}(\varepsilon, \mathbf{p})$, регулярный вблизи $\varepsilon = \xi(\mathbf{p}) - i\gamma(\mathbf{p})$).

Спектр квазичастицы, соответствующей полюсу в (4.14), дается функцией $\xi(\mathbf{p})$, а затухание $\gamma(\mathbf{p})$ можно записать как $(2\tau_{\mathbf{p}})^{-1}$, где $\tau_{\mathbf{p}}$ — время жизни квазичастицы. Вычет a называют амплитудой квазичастичной функции Грина. Дисперсионное соотношение $\varepsilon = \xi(\mathbf{p})$ определяет в 4-мерном пространстве $(\varepsilon, \mathbf{p})$ так называемую *массовую поверхность* квазичастицы ([1], §7, п. 3; [4], гл. 5, §1).

Вообще говоря, понятие квазичастицы имеет смысл только если время жизни велико: $\gamma(\mathbf{p}) \ll \xi(\mathbf{p})$. Если оно мало, говорят о «затухающем возбуждении». В ядерной физике терминология несколько иная: вместо «квазичастицы» говорят о «резонансе».

Остановимся на физическом смысле собственно энергетической части $\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})$. Из дисперсионного уравнения (4.10) видно, что именно собственно энергетическая часть определяет спектр квазичастиц. Рассматривая по отдельности вещественную и мнимую части (4.10) и сравнивая с (4.14), находим

$$\xi(\mathbf{p}) = \xi_0(\mathbf{p}) + \mathrm{Re}\;\Sigma(\,\xi(\mathbf{p}),\, \mathbf{p}\,), \quad \gamma(\mathbf{p}) = \mathrm{Im}\,\Sigma(\,\xi(\mathbf{p}),\, \mathbf{p}\,). \tag{4.15}$$

Как видно из (4.15), вещественная часть $\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})$ характеризует перенормировку закона дисперсии квазичастиц. В частности, $\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})$ описывает такой эффект, как изменение массы частицы, возникающее в результате взаимодействия. Причина изменения массы в том, что частица во взаимодействующей системе окружает себя «поляризационным облаком», движущимся вместе с частицей. Инерция такой «одетой» частицы описывается так называемой *эффективной* массой. Пример, демонстрирующий возникновение эффективной массы в случае электрон–фононного взаимодействия, будет рассмотрен в задаче 16 (см. также задачи 19, 21 и 33).

Что касается мнимой части $\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})$, то она характеризует затухание квазичастиц. Величина $\tau_{\mathbf{p}} = (2\gamma(\mathbf{p}))^{-1}$ есть время жизни частицы в состоянии с данным импульсом $\mathbf{p}$. Например, электрон, взаимодействующий с фононами, если он движется достаточно быстро, может излучать фононы. В результате движение такого электрона замедлится, что формально проявится в появлении конечной мнимой части у $\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})$ (см. задачу 17). Разумеется, конечное затухание $\gamma = \mathrm{Im}\,\Sigma(\varepsilon,\, \mathbf{p})$ не означает, что сам электрон распадается. Правильная интерпретация затухания заключается в том, что с вероятностью $P(t) = |\langle\psi(t)|\psi(0)\rangle|^2 = \exp(-2\gamma t)$ состояние электрона за время t не изменяется.

Интересно, что в силу причинности $\mathrm{Re}\,\Sigma$ и $\mathrm{Im}\,\Sigma$ связаны между собой соотношениями, аналогичными соотношениям Крамерса-Кронига. Таким образом, зная $\mathrm{Re}\,\Sigma$, можно найти $\mathrm{Im}\,\Sigma$, и наоборот.

4.2.1. Двухчастичная функция Грина. Из функции Грина $G(\varepsilon, \mathbf{p})$, описывающей распространение одной частицы, невозможно получить информацию о связанных состояниях частиц. Поэтому вводится так называемая *двухчастичная функция Грина*

$$K_{ab}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \pm\, \langle \mathrm{T}\, \psi_a(x_1)\, \psi_b(x_2)\, \psi_a^+(x_3)\, \psi_b^+(x_4)\rangle. \tag{4.16}$$

Знак «+» соответствует бозонам, а знак «−» — фермионам. Индексы a и b нумеруют частицы (здесь речь идет о различимых частицах).

В невзаимодействующей системе функция $K_{ab}(x_1, \ldots, x_4)$ распадается на произведение одночастичных функций Грина частиц a и b:

$$K_{ab}(x_1, x_2, x_3, x_4) = G_a(x_1 - x_3)\, G_b(x_2 - x_4) \tag{4.17}$$

(если частицы тождественны, то нужно в зависимости от типа статистики прибавить или вычесть произведение функций Грина с переставленными аргументами).

Теория возмущений для функции K_{ab} строится точно так же, как для одночастичной функции Грина. Первые несколько диаграмм таковы (рис. 4.6):

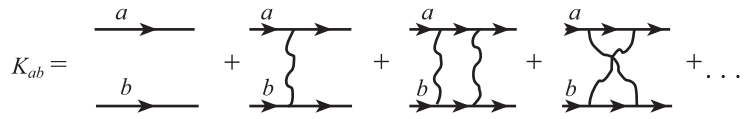

Рис. 4.6

Предполагается, что функции Грина в этих диаграммах — точные (т. е. все линии частиц — жирные).

Принято исключать из $K_{ab}(x_1,x_2,x_3,x_4)$ тривиальные слагаемые, вводя *вершинную часть* $\Gamma_{ab}(x_1,x_2;x_3,x_4)$:

$$K_{ab}(x_1,x_2,x_3,x_4) = G_a(x_1-x_3)\,G_b(x_2-x_4) + \\ + i\int G_a(x_1-x_1')\,G_a(x_3'-x_3)G_b(x_2-x_2')\,G_b(x_4'-x_4)\;\times \\ \times\,\Gamma_{ab}(x_1',x_2';x_3',x_4')\,d^4x_1'\,d^4x_2'\,d^4x_3'\,d^4x_4'. \quad (4.18)$$

Величина Γ_{ab} описывает взаимодействие частиц, ее иногда называют *двухчастичной амплитудой рассеяния.*

В импульсном представлении величина Γ_{ab} имеет вид

$$\Gamma_{ab}(p_1,p_2,p_3,p_4) = \\ = \int \Gamma_{ab}(x_1,x_2;x_3,x_4)\,e^{-i(p_1x_1+\ldots+p_4x_4)}\,d^4x_1\ldots d^4x_4, \quad (4.19)$$

где p_i — 4–импульсы. Диаграммы для Γ_{ab} выглядят так (рис. 4.7):

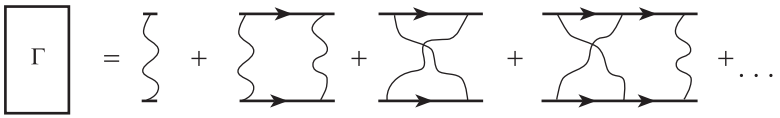

Рис. 4.7

Сумма 4–импульсов p_i сохраняется: $p_1+p_2=p_3+p_4$. Графическим элементам соответствуют обычные аналитические выражения: функции Грина $G(p)$, линии взаимодействия $U(p)$, интегрирование по каждому внутреннему импульсу.

Для двухчастичных функций Грина, как и для одночастичных, оказывается возможным суммирование бесконечных последовательностей диаграмм. Назовем диаграмму *двухчастично-неприводимой*, если она не распадается при разрезании любой пары линий $G(p)$. Сумма всех двухчастично–неприводимых диаграмм определяет так называемую *неприводимую вершинную часть* Γ^0 (рис. 4.8):

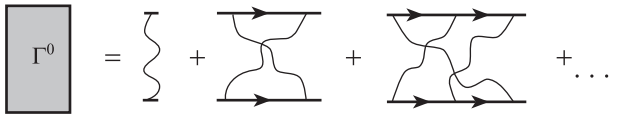

Рис. 4.8

Пользуясь этим определением, представим любую диаграмму для Γ_{ab} как последовательность неприводимых частей, соединенных двумя линиями $G(p)$. Классифицируя диаграммы по количеству двухчастичных

сечений, можно убедиться, что амплитуда $\Gamma_{ab}(p_i)$ удовлетворяет *уравнению Бете–Солпитера*:

$$\Gamma_{ab}(p_i) = \Gamma^0_{ab}(p_i) + i\int \Gamma^0_{ab}(p_i')G_a^{(1)}(p_{1+})G_b^{(2)}(p_{2-})\,\Gamma_{ab}(p_i'')\frac{d^4k}{(2\pi)^4}, \quad (4.20)$$

где $p_i=\{p_1,p_2,p_3,p_4\}$, $p_i'=\{p_1,p_2,p_{1+},p_{2-}\}$, $p_i''=\{p_{1+},p_{2-},p_3,p_4\}$, а $p_{i\pm}=p_i\pm k$. Уравнение Бете–Солпитера (4.20) графически изображают так (рис. 4.9):

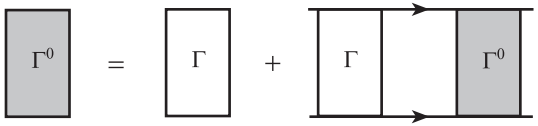

Рис. 4.9

Имея в виду такое графическое представление, неприводимую вершинную часть $\Gamma^0(p_i)$ в (4.20) часто называют также «неразрезаемый кирпич».

Как и одночастичные функции Грина, двухчастичная амплитуда рассеяния может иметь полюсы. Эти полюсы соответствуют связанным состояниям пары частиц (см. задачи 18, 19, а также гл. 3).

Литература: Доказательство правил построения диаграмм приведено в [1], §8, 9 и в [6], §13. О суммировании диграммного ряда для функции Грина с помощью собственно-энергетической части и уравнения Дайсона можно прочитать в [1], §10 и в [6], §14. Двухчастичная функция Грина, ее связь с амплитудой рассеяния, а также уравнение Бете–Солпитера рассмотрены в [6], §15, 16. Хорошее изложение основ теории полярона, включая применение функций Грина в случае слабой связи и вариационного принципа в случае сильной связи можно найти в [3], гл. 8.

4.3. Задачи 16–21

Задача 16. (*Полярон в приближении слабой связи.*) Электроны в зоне проводимости полупроводника образуют сильно разреженный газ. При малой концентрации электронов их взаимодействием друг с другом можно пренебречь. В то же время, каждый отдельный электрон, двигаясь в кристаллической решетке, поляризует среду вокруг себя и вызывает сопутствующую ему деформацию. Такой окруженный фононами электрон называется *поляроном.*

Закон дисперсии полярона $\varepsilon(\mathbf{p})$ — не такой, как у электрона. При скорости движения, малой по сравнению со скоростью звука, полярон характеризуется энергией связи ε_0 и эффективной массой m^*:

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon_0 + \mathbf{p}^2/2m^*.$$

Найдите собственно-энергетическую часть $\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})$ в низшем порядке по электрон-фононному взаимодействию (4.6), (4.7). Соответствующий график изображен на рис. 4.10.

Рис. 4.10

Электронная функция Грина на рис. 4.10 имеет вид

$$G(\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{1}{\varepsilon - \mathbf{p}^2/2m + i\delta}. \qquad (4.21)$$

Положительный знак мнимой части δ говорит об отсутствии электронов в зоне проводимости полупроводника.

Рассмотрите $\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})$ вблизи массовой поверхности $\varepsilon = \mathbf{p}^2/2m$ и при $|\mathbf{p}| \ll mc$. Получите разложение:

$$\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p}) = \varepsilon_0 - \alpha_1 \left(\varepsilon - \frac{\mathbf{p}^2}{2m}\right) - \alpha_2 \frac{\mathbf{p}^2}{2m}. \qquad (4.22)$$

Покажите, что величина α_2 определяет перенормировку массы m, величина α_1 — перенормировку амплитуды Z функции Грина (4.14), а ε_0 дает энергию связи. Найдите эффективную массу полярона.

Задача 17. (*Черенковское излучение звука.*) Величина $\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})$, найденная в задаче 16, имеет отличную от нуля мнимую часть при $v = p/m > c$, поскольку сверхзвуковой электрон может испускать фононы.

а. Запишите $\operatorname{Im}\Sigma$ как $\int W(\theta) d\theta$, где θ — угол между направлением вылета фонона и импульсом $\mathbf{p}$. Найдите угловое распределение излучаемого звука.

б. Эту же задачу решите с помощью теории возмущений. Найдите вероятность излучения фонона в единицу времени под углом θ, используя «золотое правило» для вероятности перехода в непрерывный спектр:

$$dW_{\mathrm{i}\to\mathrm{f}} = \frac{2\pi}{\hbar} \left|\langle \mathrm{f}|\mathscr{H}_{\mathrm{int}}|\mathrm{i}\rangle\right|^2 \delta(E_{\mathrm{f}} - E_{\mathrm{i}})\, d\nu_{\mathrm{f}} \qquad (4.23)$$

(см. [2], § 43, формула (43.1); [3], гл. 8).

Сравните результаты. Обратите внимание, что при записи вероятности излучения как $\operatorname{Im}\Sigma$, не нужно заботиться о нормировке состояний и о правильной размерности — все уже предусмотрено определением функций Грина.

Задача 18. (*Связанное состояние двух частиц.*) Пусть две частицы с массами m_1 и m_2 взаимодействуют по закону $U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, t_1 - t_2)$, т. е. взаимодействие запаздывающее. Предположим, что запаздывание мало. Ситуации, в которых взаимодействие оказывается слабо запаздывающим, могут быть самыми различными. Например, экситон в полупроводнике — водородоподобное связанное состояние электрона и дырки. Или, скажем, дейтрон — слабо связанное состояние протона и нейтрона, взаимодействующих посредством ядерных сил.

Общая задача о связанном состоянии двух взаимодействующих частиц решается с помощью уравнения Бете–Солпитера для двухчастичной амплитуды рассеяния (4.20). Рассмотрим, какие упрощения возникают, если запаздывание взаимодействия отсутствует, или если оно невелико.

а. *Мгновенное взаимодействие: задача сводится к одночастичной.* Пусть запаздывания нет: $U_{12} = U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\,\delta(t_1 - t_2)$. Покажите, что в этом случае все диаграммы с пересекающимися линиями дают нуль при интегрировании по частотам, а следовательно $\Gamma^0_{p_1,p_2,p_1+q,p_2-q} = U(q)$.

Выполнив интегрирование в уравнении Бете–Солпитера (4.20), перейдите к импульсам относительно центра масс:

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4, \qquad (4.24)$$

$$\mathbf{k} = \frac{m_2\mathbf{p}_1 - m_1\mathbf{p}_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{k}' = \frac{m_2\mathbf{p}_3 - m_1\mathbf{p}_4}{m_1 + m_2}, \qquad (4.25)$$

и приведите (4.20) к виду

$$\Gamma_P(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = U(\mathbf{k} - \mathbf{k}') + \int \frac{U(\mathbf{k} - \mathbf{q})\Gamma_P(\mathbf{q}, \mathbf{k}')}{\Omega_0 - q^2/2\mu + i0} \frac{d^3q}{(2\pi)^3}. \qquad (4.26)$$

Здесь приведенная масса $\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2)$, частота $\Omega_0 = \Omega - P^2/2M$ (полная масса $M = m_1 + m_2$ и $\Omega = \omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4$). Обратите внимание, что на массовой поверхности относительного движения, где $\Omega_0 = k^2/2\mu = k'^2/2\mu$, уравнение (4.26) совпадает с уравнением для амплитуды рассеяния F (3.13) с точностью до замены массы на приведенную (см. [1], § 25, пп. 3, 4).

б. *Слабое запаздывание.* Пусть взаимодействие запаздывающее:

$$U_{12} = U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\, e^{-|t_1 - t_2|/\tau}/(2\tau), \qquad (4.27)$$

но τ много меньше всех других характерных времен. Тогда диаграммы, входящие в неприводимую часть Γ^0, будут тем меньше по параметру τ, чем больше в них пересекающихся линий.

Покажите, что степень τ, которой пропорциональна каждая диаграмма, определяется только числом линий взаимодействия. Верно ли это для диаграмм, дающих полную амплитуду Γ?

Задача 19*. (*Эффективная масса связанного состояния.*) Из задачи 18 а следует, что, если составная частица массы M является связанным состоянием двух частиц массы m, взаимодействующих без запаздывания, то $M = 2m$. (Почему?)

Пусть теперь взаимодействие обладает небольшим запаздыванием, и дается выражением (4.27) задачи 18 б. Покажите, что масса составной частицы в этом случае есть:

$$M = 2m - \frac{2\tau^2}{3} \int \psi_0^2(\mathbf{r})\, \nabla^2 U(\mathbf{r})\, d^3r\ , \qquad (4.28)$$

где $\psi_0(r)$ — основное состояние частицы массы $m/2$, движущейся в потенциале $U(r)$. Можно ли понять качественно, почему поправка отрицательна?

Для решения задачи перейдите в систему центра масс, движущуюся со скоростью $\mathbf{v} = \mathbf{P}/2m$. Покажите, что взаимодействие в этой системе имеет вид

$$U_{12}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{U(\mathbf{q})}{1 + \tau^2(\omega - \mathbf{vq})^2}. \tag{4.29}$$

В области $\omega\tau \ll 1$ можно положить $\omega = 0$, т. е. считать взаимодействие мгновенным, и воспользоваться результатом задачи 18 а.

Примером реальной системы, к которой применим изложенный метод, является экситон в полупроводнике, диэлектрическая проницаемость которого обладает частотной дисперсией $\varepsilon(\omega)$. Из-за частотной дисперсии кулоновское взаимодействие (4.4), (4.5) между образующими экситон электроном и дыркой становится запаздывающим, что приводит к уменьшению эффективной массы экситона.

Формула (4.29) подразумевает, что переносящие взаимодействие частицы — *нерелятивистские*, т. е. подчиняются преобразованию Галилея, а не Лоренца. В релятивистской динамике инертная масса, определяемая с помощью $\mathbf{p} = M\mathbf{v}$, тождественна массе покоя $M = 2m - \Delta E/c^2$, где ΔE — энергия связи.

Интересно отметить, что знак перенормировки массы связанного состояния, даваемой нашим нерелятивистским вычислением, согласуется с ответом для релятивистского взаимодействия. (Скажем, масса дейтрона $m_d = m_p + m_n - \Delta_d/c^2$, где Δ_d — энергия связи дейтрона.) Но, конечно же, рассматриваемый нами эффект не имеет никакого отношения к теории относительности. В частности, изменение массы за счет запаздывания взаимодействия как правило оказывается заметно больше, чем релятивистский дефект массы $\Delta E/c^2$.

Задача 20. (*Функции Грина для фермионной цепочки.*) Спектр квазичастиц $\varepsilon(p)$ дается полюсами функции Грина $G(\varepsilon, p)$. Используя этот факт, решим задачу 2 другим способом. Представим гамильтониан (1.20) в виде суммы «невозмущенного гамильтониана» и «возмущения», $\mathscr{H} = \mathscr{H}_0 + \mathscr{H}_{\text{int}}$, где

$$\mathscr{H}_0 = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(J_1 a_i^+ a_{i+1} + J_1 a_{i+1}^+ a_i - 2B a_i^+ a_i \right), \tag{4.30}$$

$$\mathscr{H}_{\text{int}} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(J_2 a_i a_{i+1} + J_2 a_{i+1}^+ a_i^+ \right). \tag{4.31}$$

Найдите функцию Грина $G_0(\varepsilon, p)$ для задачи, описываемой гамильтонианом $\mathscr{H}_0$. Нарисуйте графики, сумма которых даёт точную функцию Грина. Обратите внимание, что только четные порядки теории возмущений по $\mathscr{H}_{\text{int}}$ дают вклад. Вычислите каждую из диаграмм, как функцию ε и p, и просуммируйте ряд.

Задача 21*. (*Тяжелая частица в ферми-газе.*) Рассмотрим атом массы M, движущийся в ферми-газе и взаимодействующий с ферми-частицами. В условиях, когда масса атома M много больше массы фермионов m, рассеяние легких фермионов на тяжелой частице квазиупругое, поскольку при максимально возможном переданном при столкновении импульсе $\Delta p = 2p_0$ величина переданной энергии $\varepsilon_M = \Delta p^2/2M \ll E_F$.

В отсутствие рассеяния функция Грина частицы дается обычным выражением:

$$G(\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{1}{\varepsilon - p^2/2M + i0}. \tag{4.32}$$

Чтобы выяснить, как взаимодействие с фермионами влияет на динамику частицы, найдем функцию Грина частицы в присутствии слабого контактного взаимодействия $U(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \lambda\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$.

а. Поскольку фермионы движутся намного быстрее частицы, естественно воспользоваться «адиабатическим» приближением, в котором динамика фермионов исключена и заменена эффективным запаздывающим взаимодействием частицы самой с собой. Покажите, что эффективное взаимодействие возникает во втором порядке по взаимодействию с фермионами λ и представляет собой не что иное, как коррелятор плотность-плотность ферми-газа.

б. Найдите собственно-энергетическую часть частицы в первом порядке по эффективному взаимодействию. Изучите результат при энергии частицы $\varepsilon \ll \varepsilon_M$ и $\varepsilon \gg \varepsilon_M$. Покажите, что при не слишком малом λ и $\varepsilon \approx \varepsilon_M$ перенормировка функции Грина может быть логарифмически велика. Пользуясь теорией возмущений, просуммируйте все логарифмически большие вклады и покажите, что в области энергий $\varepsilon_M \ll \varepsilon \ll E_F$ функция Грина имеет степенной вид

$$G(\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{a_0}{\left(\varepsilon - p^2/2M + i0\right)^{1+\alpha}}, \tag{4.33}$$

где показатель степени α зависит от силы взаимодействия λ.

4.4. Решения задач 16–21

16. Вычисляем собственно-энергетическую часть

$$\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p}) = ig^2 \int G_0(\varepsilon - \omega, \mathbf{p} - \mathbf{k})\, D_0(\omega, \mathbf{k})\, \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \frac{d\omega}{2\pi}, \tag{4.34}$$

где

$$G_0(\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{1}{\varepsilon - \mathbf{p}^2/2m + i\delta}, \quad D_0(\omega, \mathbf{k}) = \frac{c^2\mathbf{k}^2}{\omega^2 - c^2\mathbf{k}^2 + i\delta}. \tag{4.35}$$

Интеграл по ω берем, замыкая контур в нижней полуплоскости:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\widetilde{\varepsilon}-\omega+i0}\ \frac{c^2k^2}{\omega^2-c^2k^2+i0}\ \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{i}{2}\,\frac{ck}{ck-\widetilde{\varepsilon}-i0}, \tag{4.36}$$

где $\widetilde{\varepsilon}=\varepsilon-(\mathbf{p}-\mathbf{k})^2/2m,\ k=|\mathbf{k}|$. Получаем

$$\Sigma(\varepsilon,\mathbf{p}) = \frac{g^2}{2}\int \frac{\mathrm{c}k}{\varepsilon-ck-(\mathbf{p}-\mathbf{k})^2/2m+i0}\ \frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \tag{4.37}$$

Часть интегрирования по d^3k можно выполнить точно, если воспользоваться известной заменой переменных ([1], §21, п. 3) и перейти к интегрированию по $|\mathbf{k}|$ и $q=|\mathbf{p}-\mathbf{k}|$. Обозначим через x косинус угла между векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{p}$, тогда $d^3k=2\pi k^2\,dk\,dx$, а $q^2=|\mathbf{p}-\mathbf{k}|^2=p^2+k^2-2pkx$, и потому $q\,dq=-pk\,dx$. Получаем

$$\int f\big(|\mathbf{k}|,|\mathbf{p}-\mathbf{k}|\big)\,\frac{d^3k}{(2\pi)^3} \equiv \frac{1}{(2\pi)^2p}\int k\,dk\int\limits_{|p-k|}^{p+k} f(k,q)\,q\,dq. \tag{4.38}$$

Это дает

$$\Sigma = \frac{g^2}{2(2\pi)^2p}\int\limits_0^{k_D} k\,dk\int\limits_{|p-k|}^{p+k}\frac{ck\,q\,dq}{\varepsilon-q^2/2m-ck+i0}. \tag{4.39}$$

Интегрируем по $x=q^2$:

$$\Sigma = \frac{g^2mc}{8\pi^2p}\int\limits_0^{k_D}\ln\left|\frac{\varepsilon-(p-k)^2/2m-ck}{\varepsilon-(p+k)^2/2m-ck}\right|\,k^2\,dk - \\ - i\,\frac{g^2mc}{8\pi p}\int\limits_0^{k_D}k^2\,dk\int\limits_{(p-k)^2}^{(p+k)^2}\delta\big(x-2m(\varepsilon-ck)\big)\,dx. \tag{4.40}$$

При $p<mc$ собственно энергетическая часть Σ вещественна, т. е. полярон стабилен. Эффекты, связанные с распадом полярона при $p>mc$, мы рассмотрим в следующей задаче.

Нас интересует Σ вблизи массовой поверхности $\varepsilon=p^2/2m$ и при малых p. При $p\ll mc$ вычисляем Σ, раскладывая по малым параметрам $\Delta=\varepsilon-p^2/2m$ и $v=p/m$:

$$\Sigma = \frac{g^2mc}{8\pi^2p}\int\limits_0^{k_D}\ln\left|\frac{k^2/2m+(c-v)k-\Delta}{k^2/2m+(c+v)k-\Delta}\right|\,k^2\,dk = \frac{g^2mc}{8\pi^2p}\times \\ \times\int\limits_0^{k_D}\left(-\frac{2vk}{ck+k^2/2m}-\frac{4\Delta vk}{2(ck+k^2/2m)^2}-\frac{2v^3k^3}{3(ck+k^2/2m)^3}+\ldots\right)k^2dk. \tag{4.41}$$

Три члена в скобках дают искомое разложение $\Sigma=\varepsilon_0-\alpha_1\Delta-\alpha_2\,p^2/2m$, причем интегралы по k легко вычисляются, так как $c\ll k_D/m$, и поэтому ck в знаменателях пренебрежимо мало по сравнению с $k^2/2m$ почти во всей области интегрирования. Получаем

$$\varepsilon_0 = -\frac{g^2c}{4\pi^2}\int\limits_0^{k_D}\frac{k^3\,dk}{ck+k^2/2m} = -\frac{g^2mck_D^2}{4\pi^2} \tag{4.42}$$

и, с логарифмической точностью,

$$\alpha_1 = \frac{g^2m^2c}{\pi^2}\int\limits_0^{k_D}\frac{k^3\,dk}{(k^2+2mck)^2} = \frac{g^2m^2c}{\pi^2}\ln\frac{k_D}{mc}, \tag{4.43}$$

$$\alpha_2 = \frac{2g^2m^3c}{3\pi^2}\,\frac{2}{m}\int\limits_0^{k_D}\frac{k^5\,dk}{(k^2+2mck)^3} = \frac{4g^2m^2c}{3\pi^2}\ln\frac{k_D}{mc} = \frac{4}{3}\alpha_1. \tag{4.44}$$

Дисперсионное соотношение дается уравнением $G_0^{-1}-\Sigma=0$. Получаем перенормировку массы

$$\frac{m_*}{m} = \frac{1}{1-\alpha_2} > 1. \tag{4.45}$$

Обратим внимание на то, что электрон действительно «одевается», а не «раздевается» — поправка к массе положительна.

17 а. (*Первое решение.*) Рассмотрим мнимую часть $\operatorname{Im}\Sigma$ — второе слагаемое в (4.40). Аргумент δ-функции попадает в область интегрирования, если

$$(p-k)^2 < 2m\left(\frac{p^2}{2m}-ck\right) < (p+k)^2, \quad k,\,p>0. \tag{4.46}$$

Это эквивалентно $0 < k < 2(p - mc)$, и поэтому мнимая часть отлична от нуля при $v = p/m > c$. Полная вероятность излучения фонона в единицу времени есть

$$2\gamma = -2\,\mathrm{Im}\,\Sigma = 2\,\frac{g^2 mc}{8\pi p}\int\limits_0^{2m(v-c)} k^2\,dk = \frac{2g^2m^3}{3\pi}\,\frac{c}{v}\,(v-c)^3. \qquad (4.47)$$

Из ответа (4.47) видно, что излучение фонона происходит при $v > c$. Вероятность излучения уменьшается при $v \to c$ и оказывается равной нулю при $v < c$.

Теперь найдем распределение по углам. Рассмотрим выражение (4.47) и, вместо того, чтобы брать интеграл по k, выразим k через угол вылета фонона θ. Конечный импульс электрона $\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{k}$, а значит $q^2 = k^2 + p^2 - 2pk\cos\theta$. Исключим q, пользуясь законом сохранения энергии $q^2/2m + ck = p^2/2m$. Находим

$$\cos\theta = (k + 2mc)/2p. \qquad (4.48)$$

Перейдем от интегрирования по k к интегрированию по θ:

$$\mathrm{Im}\,\Sigma = -\frac{g^2 mc}{8\pi p}\int\limits_0^{2m(v-c)} k^2\,dk = \frac{g^2mc}{4\pi}\int\limits_0^{\theta}[2p\cos\theta - 2mc]^2\,d|\cos\theta| =$$

$$= \frac{g^2(mc)^3}{\pi}\int\limits_0^{\theta}\left(\frac{v}{c}\cos\theta - 1\right)^2 \sin\theta\,d\theta, \qquad (4.49)$$

где $\theta = \arccos(c/v)$ — предельное значение угла вылета фонона. Выражение в интеграле (4.49) дает угловое распределение интенсивности излучаемого звука внутри конуса с углом раствора θ.

17а. (*Второе решение.*) Воспользуемся случаем, чтобы проиллюстрировать один весьма общий метод, следующий из теоремы унитарности. Он позволяет достаточно быстро находить мнимую часть любого заданного графика. В нашем случае распределение фононов по углам можно получить с помощью этого метода вообще без единого интегрирования.

Физический смысл $\mathrm{Im}\,\Sigma$ — обратное время распада на электрон и фонон. Продукты распада — реальные частицы, энергия и импульс каждой из них связаны дисперсионным соотношением. Поэтому для нахождения $\mathrm{Im}\,\Sigma$, достаточно в выражении (4.10) выделить вклад от массовой поверхности промежуточных частиц. Это достигается заменой:

$$G_0(\varepsilon, \mathbf{p}) \longrightarrow \mathrm{Im}\,G_0(\varepsilon, \mathbf{p}) = -i\pi\,\delta(\varepsilon - \mathbf{p}^2/2m); \qquad (4.50)$$

$$D_0(\omega, \mathbf{k}) \longrightarrow \mathrm{Im}\,D_0(\omega, \mathbf{k}) = -i\frac{\pi}{2}\,\omega_0(\mathbf{k})\,(\delta(\omega - \omega_0(\mathbf{k})) + \delta(\omega + \omega_0(\mathbf{k}))). \qquad (4.51)$$

Иначе говоря, распаду соответствует ситуация, когда промежуточные частицы не виртуальные, а реальные. Поэтому сразу пишем

$$\mathrm{Im}\,\Sigma = g^2\int \mathrm{Im}\,G_0(\varepsilon - \omega, \mathbf{p} - \mathbf{k})\;\mathrm{Im}\,D_0(\omega, \mathbf{k})\,\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{d\omega}{2\pi}. \qquad (4.52)$$

Слагаемое $\delta(\omega + \omega_0(\mathbf{k}))$ в $\mathrm{Im}\,D_0$ опускаем, поскольку оно отвечает поглощению фонона, а не испусканию. Получаем

$$-\frac{\pi^2}{2}\,g^2\int \omega_0(\mathbf{k})\,\delta\left(\varepsilon - \omega - \frac{(\mathbf{p}-\mathbf{k})^2}{2m}\right)\delta(\omega - \omega_0(\mathbf{k}))\,\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{d\omega}{2\pi}. \qquad (4.53)$$

Одна δ-функция устраняет интеграл по ω:

$$\mathrm{Im}\,\Sigma = -\frac{\pi}{4}\,g^2\int \omega_0(k)\,\delta\left(\varepsilon - \omega_0(k) - \frac{(\mathbf{p}-\mathbf{k})^2}{2m}\right)\frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \qquad (4.54)$$

Берем ε на массовой поверхности:

$$\mathrm{Im}\,\Sigma = -\frac{\pi}{4}g^2c\int \delta\left(\frac{k}{2m} + c - \frac{p}{m}\cos\theta\right)\frac{k^2dk}{(2\pi)^2}\,\sin\theta\,d\theta. \qquad (4.55)$$

Вторая δ-функция устраняет интеграл по k, и мы вновь приходим к распределению (4.49).

17б. Чтобы найти матричный элемент перехода, рассмотрим гамильтониан взаимодействия электрона с акустическими фононами:

$$\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{int}} = g\sum_{\mathbf{k}}\sqrt{ck/2V}\,\left[b_{\mathbf{k}}e^{i(\mathbf{kr}-\omega_0(\mathbf{k})t)} + b^+_{\mathbf{k}}e^{-i(\mathbf{kr}-\omega_0(\mathbf{k})t)}\right] \qquad (4.56)$$

(см. (6.6)). Здесь $\omega_0(\mathbf{k}) = c|\mathbf{k}|$, $\mathbf{r}$ — координата электрона, V — объем системы, а сумма по $\mathbf{k}$, в соответствии с моделью Дебая, ограничена $|\mathbf{k}| < k_D$. Находим вероятность распада, пользуясь «золотым правилом»:

$$dW_{\mathrm{i}\to\mathrm{f}} = \left(\frac{2\pi}{\hbar}\right)\,|\langle\mathrm{f}|\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{int}}|\mathrm{i}\rangle|^2\,\delta(E_{\mathrm{f}} - E_{\mathrm{i}})\,d\nu_{\mathrm{f}}. \qquad (4.57)$$

В начальном состоянии импульс электрона $\mathbf{p}$, в конечном же состоянии имеются электрон и фонон с импульсами $\mathbf{q}$ и $\mathbf{k}$ соответственно. Находим матричный элемент

$$\langle\mathrm{f}|\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{int}}|\mathrm{i}\rangle = \sqrt{ck/2V}\;\;\delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q} - \mathbf{k}). \qquad (4.58)$$

Возводя его в квадрат, учтем что, согласно известному правилу, квадрат δ-функции записывается так:

$$\left(\delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q} - \mathbf{k})\right)^2 = (2\pi)^3 V\,\delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q} - \mathbf{k}). \qquad (4.59)$$

Вероятность перехода $dW_{\mathrm{i}\to\mathrm{f}}$ есть:

$$(2\pi)^3 V\,\delta^{(3)}(\mathbf{k}+\mathbf{q}-\mathbf{p})\,\frac{g^2ck}{2V}\cdot 2\pi\,\delta\left(ck+\frac{q^2}{2m}-\frac{p^2}{2m}\right)\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\,\frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \tag{4.60}$$

Интегрируем по q и переходим к новым переменным: длине вектора k и углу θ. Получается

$$dW_{\mathrm{i}\to\mathrm{f}}=\frac{g^2ck}{8\pi^2}\,\delta\left(ck+\frac{(p-k)^2}{2m}-\frac{p^2}{2m}\right)d^3k=$$
$$=\frac{mg^2ck^2}{2\pi}\,\delta\left(k-2m(v\cos\theta-c)\right)\,d(\cos\theta)\,dk. \tag{4.61}$$

Интегрируем по k:

$$dW_{\mathrm{i}\to\mathrm{f}}=\frac{2}{\pi}g^2m^3(v\cos\theta-c)^2\,\sin\theta\,d\theta. \tag{4.62}$$

Это выражение отличается от (4.49) множителем 2, что в точности соответствует связи времени жизни τ с затуханием γ: $\tau^{-1}=2\gamma$.

18. Диаграммы для запаздывающего взаимодействия двух частиц нетрудно получить из S-матрицы:

$$\mathrm{T}_1\mathrm{T}_2\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\iint\psi^+(x_1)\,\psi(x_1)\,U(x_1-x_2)\,\psi^+(x_2)\,\psi(x_2)\right]d^4x_1\,d^4x_2, \tag{4.63}$$

где $x=(t,\mathbf{r})$. Хронологическое упорядочение мы обозначили через $\mathrm{T}_1\mathrm{T}_2$, чтобы лишний раз подчеркнуть, что частицы различны. В импульсном представлении взаимодействие имеет вид

$$(2\pi)^4\int\psi^+_{p_1}\psi_{p_3}\psi^+_{p_2}\psi_{p_4}\,U(k)\,\delta(p_1-p_3+k)\,\delta(p_2-p_4-k)\,d^4k. \tag{4.64}$$

Вершину Γ определяем, как обычно, через двухчастичную функцию Грина:

$$K_{12,34}=(2\pi)^8\delta_{p_1,p_3}\delta_{p_2,p_4}G_0^{(1)}(p_1)G_0^{(2)}(p_2)+G_0^{(1)}(p_1)G_0^{(2)}(p_2)\times$$
$$\times\,G_0^{(1)}(p_3)G_0^{(2)}(p_4)i\,\Gamma_{p_1,p_2,p_3,p_4}(2\pi)^4\delta_{p_1+p_2,p_3+p_4}. \tag{4.65}$$

Разлагая S-матрицу в ряд, получаем графики для Γ, показанные на рис. 4.7. Переставляем члены ряда, выделяя сумму графиков, дающую неприводимую вершинную часть Γ^0. Затем действуем точно так же,

как при выводе интегрального уравнения для амплитуды рассеяния F в задаче 11. Получаем уравнение Бете–Солпитера:

$$\Gamma_{1,2,3,4}=\Gamma^0_{1,2,3,4}+i\int\Gamma^0_{1,2,1+,2-}G_0(p_{1+})\,G_0(p_{2-})\Gamma_{1+,2-,3,4}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}. \tag{4.66}$$

а. Если нет запаздывания, линия взаимодействия не зависит от переданной частоты: $U(\omega,\mathbf{k})=U(\mathbf{k})$. Рассмотрим поправки к Γ второго порядка (рис. 4.11).

В первом графике интеграл по частотам дает нуль:

$$\int G_0^{(1)}(\varepsilon_1-\omega)G_0^{(2)}(\varepsilon_2-\omega)\,d\omega=\int\frac{d\omega}{(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2)}=0, \tag{4.67}$$

поскольку оба полюса подынтегрального выражения:

$$\omega_1=\varepsilon_1-\frac{p_{1+}^2}{2m_1}+i\delta,\quad \omega_2=\varepsilon_2-\frac{p_{2-}^2}{2m_2}+i\delta, \tag{4.68}$$

лежат в верхней полуплоскости. Нетрудно видеть, что по этой же причине обращается в нуль любой график более высокого порядка с пересекающимися линиями взаимодействия.

Отсутствие вклада графиков с пересекающимися линиями взаимодействия становится еще более очевидным во временном представлении, поскольку $G_0(t,\mathbf{r})=0$ при $t<0$ в силу причинности. Например, первому графику на рис. 4.11 соответствует выражение:

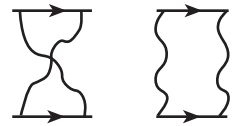

Рис. 4.11

$$\iint U(\mathbf{r}_{12})U(\mathbf{r}_{34})G_0^{(1)}(t_2-t_1,\mathbf{r}_{42})G_0^{(2)}(t_1-t_2,\mathbf{r}_{31})\,dt_2\,d^3r_4, \tag{4.69}$$

тождественно равное нулю при всех t_1, t_2 (обозначение: $\mathbf{r}_{ab}=\mathbf{r}_a-\mathbf{r}_b$).

Второй график отличен от нуля, поскольку входящие в него функции Грина имеют полюсы по разные стороны от вещественной оси. Однако этот график не входит в Γ^0, поскольку он приводим: вертикальной линией его можно разрезать на два графика первого порядка.

Итак,

$$\Gamma^0_{p_1,p_2,p_1+q,p_2-q}=U(\mathbf{q}). \tag{4.70}$$

Подставив это выражение в уравнение Бете–Солпитера, замечаем, что если Γ^0 не зависит от переданной частоты, то и Γ обладает тем же свойством. Следовательно, вся зависимость от частоты определяется функциями Грина промежуточных состояний $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$, а поэтому

интегрирование по частоте точно такое же, как для второго графика на рис. 4.11:

$$i\int G_0^{(1)}(\varepsilon_1-\omega)G_0^{(2)}(\varepsilon_2+\omega)\frac{d\omega}{2\pi}=\frac{1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2-p_{1+}^2/2m_1-p_{2-}^2/2m_2+i0}, \tag{4.71}$$

где $p_{i\pm}=p_i\pm k$. Преобразуем знаменатель, разделив кинетическую энергию на энергию центра масс и энергию относительного движения:

$$\frac{\mathbf{p}^2}{2m_1}+\frac{\mathbf{p}'^2}{2m_2}=\frac{\mathbf{P}^2}{2M}+\frac{\mathbf{p}^2}{2\mu},\quad \mathbf{P}=\mathbf{p}+\mathbf{p}',\quad \mathbf{p}=\frac{m_2\mathbf{p}-m_1\mathbf{p}'}{m_1+m_2}. \tag{4.72}$$

Для $\mathbf{p}=\mathbf{p}_{1+}=\mathbf{p}_1+\mathbf{q}$, $\mathbf{p}'=\mathbf{p}_{2-}=\mathbf{p}_2-\mathbf{q}$ эти тождества дают

$$\frac{\mathbf{p}_{1+}^2}{2m_1}+\frac{\mathbf{p}_{2-}^2}{2m_2}=\frac{\mathbf{P}^2}{2M}+\frac{\mathbf{q}^2}{2\mu}, \tag{4.73}$$

и мы получаем ядро интегрального уравнения (4.26).

б. Порядок графика по τ проще всего найти во временном представлении. Рассмотрим вклад в Γ^0, содержащий N пересекающихся линий взаимодействия. Интегрирование по временам производится по $(2N-1)$-мерной области в координатах

$$\tau_1=t_2-t_1,\ \tau_2=t_3-t_1,\ \ldots,\ \tau_{2N-1}=t_{2N}-t_1. \tag{4.74}$$

По последней ($(2N-1)$-й) временной координате нет необходимости интегрировать в силу трансляционной симметрии во времени. При этом величина области интегрирования по каждому из $(2N-1)$ времен порядка τ.

Следовательно, степень τ можно оценить как $\tau^{(2N-1)+(-N)}=\tau^{N-1}$. Первое слагаемое в степени возникает от $(2N-1)$-кратного интегрирования, а второе — из-за нормировки потенциала. Получается, что степень по τ вклада N-го порядка в Γ^0 определяется *только* количеством линий взаимодействия и не зависит от того, как именно они пересекаются.

Подчеркнем, что данная оценка эффективной величины области интегрирования по времени верна только в случае, когда никаким сечением график нельзя разбить на два вклада в Γ^0 более низкого порядка. Поэтому оценка τ^{N-1} для величины вклада N-го порядка в Γ^0 подразумевает неприводимость диаграммы.

Распространим полученный результат на графики, дающие полную амплитуду рассеяния Γ. Степень τ для таких графиков зависит не только от числа линий взаимодействия N, но и от количества двухчастичных сечений M. Модифицируя оценки, приведенные выше, находим τ^{N-M-1}.

19. Найдем закон преобразования фурье-компоненты взаимодействия при переходе в движущуюся систему отсчета. Будем считать, что частицы, передающие взаимодействие, — нерелятивистские, и значит, можно пользоваться преобразованием Галилея $\mathbf{r}'=\mathbf{r}-\mathbf{v}t$, $t'=t$. Переходя в систему отсчета, движущуюся со скоростью v вдоль оси x, получаем

$$U_v(\mathbf{q},\omega)=\int e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}+i\omega t}U(\mathbf{r}-\mathbf{v}t,t)\,d^3r\,dt=U(\mathbf{q},\omega-vq_x). \tag{4.75}$$

Для взаимодействия $U(r,t)=\big(U(r)/2\tau\big)\,e^{-|t|/\tau}$ находим

$$U_v(q,\omega)=\frac{U(q)}{1+\tau^2(\omega-vq_x)^2}. \tag{4.76}$$

При рассмотрении сдвига энергии, вызванного движением, порядок действий будет следующим. Сначала мы перейдем в систему центра масс, движущуюся со скоростью $v=P/M$, а затем положим $\omega=0$, что соответствует пределу взаимодействия без запаздывания. Преобразование (4.75) даст поправку к потенциалу, возникающую из-за движения. Зная ее, можно найти сдвиг энергии основного состояния для относительного движения. А этот сдвиг, в свою очередь, и определяет поправку к массе. Как мы увидим, такой метод является корректным, если $\tau\ll\hbar/\varepsilon_0$, где ε_0 — энергия связи.

Может показаться, что пренебрегать в (4.76) зависимостью от ω, сохраняя при этом зависимость от v, не вполне правильно, поскольку и та и другая зависимости имеют одинаковую малость по τ. На самом деле наши действия оправданы, и проще всего в этом убедиться можно следующим способом. Запишем формально скорость как $v=\lambda/\tau$, и будем считать параметром разложения λ, а не v. При этом в выражении (4.76) уже можно перейти к пределу $\tau=0$, не нарушив при этом зависимости от λ:

$$U_v(\mathbf{q},\omega)=\frac{U(\mathbf{q})}{1+(\tau\omega-\lambda q_x)^2}\approx U(\mathbf{q})-\lambda^2q_x^2U(\mathbf{q})+O(\lambda^4). \tag{4.77}$$

Пренебрежение $\omega\tau$ оправдано, поскольку частота ω в уравнении Бете–Солпитера (4.20) оказывается порядка энергии связи ε_0, а с другой стороны, $\tau\ll\hbar/\varepsilon_0$.

Полученное в результате приближения (4.77) взаимодействие не зависит от частоты, и, согласно задаче 18 а, уравнение для вершинной части принимает вид

$$\widehat{\Gamma}_P=\widehat{U}+\widehat{U}\widehat{G}_0\widehat{\Gamma}_P. \tag{4.78}$$

Здесь $\widehat{\Gamma}_P$, $\widehat{U}$ и $\widehat{G}_0$ — операторы, действующие на состояние частицы массы $m/2$ в поле U, а функция Грина $\widehat{G}_0=1/(\Omega_0-q^2/m+i0)$. Полная функция Грина, записанная в операторном виде, есть

$$\widehat{G}=\widehat{G}_0+\widehat{G}_0\widehat{\Gamma}_P\widehat{G}_0=\frac{1}{\Omega_0-\big(\widehat{q}^2/m+\widehat{U}_v\big)+i0}. \tag{4.79}$$

Взяв основное состояние $|0_v\rangle$ уравнения Шредингера с потенциалом U_v (4.77) и массой $m/2$, находим закон дисперсии:

$$\Omega_0 = \langle 0_v | \frac{\widehat{q}^2}{m} + \widehat{U}_v |0_v\rangle. \tag{4.80}$$

Для первой поправки к уровню энергии достаточно взять матричный элемент по невозмущенному состоянию $|0_v\rangle_{v=0}$. Подставляя $\Omega_0 = \Omega - P^2/4m$, а вместо U_v — фурье-образ выражения (4.77), получаем

$$\Omega = \varepsilon_0 + \frac{P^2}{2M} - \tau^2 v^2 \langle 0| q_x^2 U(q)|0\rangle. \tag{4.81}$$

Для центрально-симметричного взаимодействия $U(\mathbf{q}) = U(|\mathbf{q}|)$ основное состояние тоже симметрично, и можно усреднить q_x^2 по направлениям:

$$\langle q_x^2\rangle = q^2/3. \tag{4.82}$$

Заменяем v на $P/2m$ и q^2 на $-\nabla^2$:

$$\Omega = \varepsilon_0 + P^2\left(\frac{1}{4m} + \frac{\tau^2}{12m^2}\langle 0|\nabla^2 U|0\rangle_0\right). \tag{4.83}$$

Таким образом, эффективная масса есть

$$M = \left(\frac{1}{2m} + \frac{\tau^2}{6m^2}\langle 0|\nabla^2 U|0\rangle_0\right)^{-1} \approx 2m - \frac{2\tau^2}{3}\langle 0|\nabla^2 U|0\rangle_0. \tag{4.84}$$

То что запаздывание приводит к уменьшению эффективной массы, можно понять так. В движущейся системе взаимодействие «отстает» от частиц, и эффективно уменьшается. Потенциальная яма становится более мелкой и уровень выталкивается вверх. Поэтому оба эффекта, возникающих вследствие движения, — кинетическая энергия центра масс и выталкивание уровня из-за ослабления потенциала, имеют одинаковый знак.

В действительности, задачу можно решить вообще без диаграмм. Из-за запаздывания частица «видит» вторую частицу не в точке $\mathbf{r}$, а в точке $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t$. Поэтому эффективный потенциал, действующий на нее, несколько отличается от $U(r)$. Поправку к потенциалу, малую при $v\tau \ll r_0$, где r_0 — размер волновой функции связанного состояния, нетрудно найти, разлагая $U(|\mathbf{r} - \mathbf{v}t|)$ в ряд по малому t. При этом вклад от члена разложения первого порядка сокращается при интегрировании по углам, и необходимо рассмотреть второй член разложения:

$$\delta U(r) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} v_\alpha v_\beta t^2. \tag{4.85}$$

Усредняя это выражение по t (по распределению $(2\tau)^{-1}\exp(-|t|/\tau)$) и по $\mathbf{r}$ (по распределению $|\psi(r)|^2$), снова получаем (4.83).

Интересно сравнить результат (4.83) с массой полярона, которая всегда больше массы электрона. В обоих случаях изменение массы происходит благодаря запаздыванию взаимодействия. Разные знаки поправки к массе отвечают разной физике. В случае полярона, состояние, о массе которого идет речь, существует и без взаимодействия. Связанное же состояние двух частиц само возникает благодаря тому самому взаимодействию, которое перенормирует массу.

20. Перейдем в фурье-представление и, согласно (1.38), запишем гамильтониан в виде $\widehat{\mathscr{H}} = \widehat{\mathscr{H}}_0 + \widehat{\mathscr{H}}_{\text{int}}$, где

$$\widehat{\mathscr{H}}_0 = \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon_q\, a_q^+ a_q \,\frac{dq}{2\pi}, \quad \widehat{\mathscr{H}}_{\text{int}} = \int_{-\pi}^{\pi} iJ_2 \sin q\,(a_{-q}a_q + a_{-q}^+ a_q^+)\,\frac{dq}{2\pi}, \tag{4.86}$$

где $\varepsilon_q = 2(J_1\cos q - B)$. Функция Грина «невозмущенной» задачи:

$$G_0(\varepsilon, q) = (\varepsilon - \varepsilon_q + i\delta\,\mathrm{sgn}\,\varepsilon)^{-1}. \tag{4.87}$$

В соответствии со структурой $\widehat{\mathscr{H}}_{\text{int}}$, в диаграммной технике есть две вершины «взаимодействия», сопряженные друг другу (рис. 4.12):

Рис. 4.12

Этим двум вершинам соответствуют выражения $2iJ_2\,\sin q$ и $-2iJ_2\,\sin q$ соответственно. Поправки к функции Грина, вычисленные по теории возмущений, имеют вид (рис. 4.13)

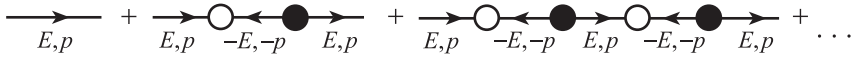

Рис. 4.13

Обратим внимание на то, что знаки ε чередуются. Так получается потому, что по правилу сохранения 4-импульса в вершине, сумма ε_α всех входящих линий равна сумме $\varepsilon_{\alpha'}$ выходящих линий, если они есть, или нулю, если выходящих линий нет. То же самое справедливо для импульсов.

Из-за чередования знаков отличны от нуля только поправки четного порядка, причем в каждом порядке $2n$ имеется всего один график. Этому графику соответствует выражение

$$(-4J_2^2\sin^2 q)^n\, G_0^{n+1}(\varepsilon, q) G_0^n(-\varepsilon, -q). \tag{4.88}$$

Сумма по n представляет собой геометрическую прогрессию. Получаем

$$G(\varepsilon,q)=\frac{G_0(\varepsilon,q)}{1+4J_2^2\sin^2 qG_0(\varepsilon,q)G_0(-\varepsilon,-q)}= \\ =\frac{\varepsilon+2(J_1\cos q-B)}{\varepsilon^2-4((J_1\cos q-B)^2+J_2^2\sin^2 q)+i\delta}. \quad (4.89)$$

Спектр определяется полюсами: $\varepsilon=\pm 2\sqrt{(J_1\cos q-B)^2+J_2^2\sin^2 q}$. Знак мнимой части $i\delta$ в (4.89) указывает, что верхняя ветвь соответствует пустым состояниям, а нижняя — заполненным.

21 а. Эффективное взаимодействие может быть выражено через двухчастичную функцию Грина фермионов:

$$\Pi(\omega,\mathbf{r})=2i\int G(\varepsilon_+,\mathbf{r})G(\varepsilon_-,\mathbf{r})\frac{d\varepsilon}{2\pi},\quad \varepsilon_\pm=\varepsilon\pm\omega/2. \quad (4.90)$$

Функция Грина в координатно-частотном представлении,

$$G(\varepsilon,\mathbf{r})=-\frac{m}{2\pi|\mathbf{r}|}e^{i\operatorname{sgn}\varepsilon\,\varkappa(\varepsilon)|\mathbf{r}|},\quad \varkappa(\varepsilon)=(p_0^2+2m\varepsilon)^{1/2} \quad (4.91)$$

была найдена в решении задачи 22 (см. (5.25)), а множитель 2 в (4.90) возникает из-за спинового вырождения.

Выражение (4.90) есть не что иное как поляризационный оператор ферми-газа $\Pi(\omega,\mathbf{k})$ в координатно-частотном представлении. Поляризационный оператор $\Pi(\omega,\mathbf{k})$ будет найден в задаче 24 а при $\omega\ll E_F$ и $|\mathbf{k}|\ll p_0$ (см. выражение (5.39)). Однако, хотя характерная энергия отдачи при рассеянии тяжелой частицы на фермионах оказывается много меньше E_F, характерный переданный импульс может оказаться порядка p_0. Поэтому нам потребуется более общее выражение для $\Pi(\omega,\mathbf{k})$, справедливое при $\omega\ll E_F$ и произвольных $\mathbf{k}$.

В принципе для отыскания $\Pi(\omega,\mathbf{r})$ можно было бы воспользоваться точным выражением (8.53) для $\Pi(\omega,\mathbf{k})$, которое будет получено в задаче 44, однако оказывается более удобным перейти к пределу $\omega\ll E_F$ непосредственно в выражении (4.90).

Чтобы установить связь между эффективным взаимодействием $V_{\text{эф}}(\omega,\mathbf{r})$ и поляризационным оператором, обратим внимание на роль частотной дисперсии $V_{\text{эф}}(\omega,\mathbf{r})$. Как было выяснено в задаче 18, в отсутствие частотной дисперсии (т. е. для мгновенного взаимодействия) все диаграммы с замкнутыми петлями обращаются в нуль в силу аналитических свойств функции Грина частицы, выражающих принцип причинности. Поэтому в отсутствие частотной дисперсии все поправки к функции Грина частицы тождественно равны нулю. Принимая во внимание это обстоятельство, а также то, что нас интересуют малые переданные частоты $\omega\ll E_F$, оказывается удобным явно выделить зависящую от ω часть поляризационного

оператора (4.90). В результате эффективное взаимодействие может быть записано следующим образом:

$$V_{\text{эф}}(\omega,\mathbf{r})=\lambda^2\left(\Pi(\omega,\mathbf{r})-\Pi(\omega=0,\mathbf{r})\right). \quad (4.92)$$

Величина $\varkappa(\varepsilon)$ в интересующей нас области $|\varepsilon|\ll E_F$ практически постоянна, поэтому заменим $\varkappa(\varepsilon)$ в (4.91) на $\varkappa(\varepsilon=0)=p_0$. Интеграл по ε в (4.90) после этого вычисляется элементарно:

$$V_{\text{эф}}(\omega,\mathbf{r})=2i\lambda^2\int\frac{m^2\sin^2 p_0|\mathbf{r}|\,(\operatorname{sgn}\varepsilon_+\,\operatorname{sgn}\varepsilon_--1)}{(2\pi)^2\mathbf{r}^2}\,\frac{d\varepsilon}{2\pi}=-i|\omega|F(\mathbf{r}), \quad (4.93)$$

$$F(\mathbf{r})=\frac{\lambda^2m^2}{2\pi^3\mathbf{r}^2}\sin^2(p_0|\mathbf{r}|). \quad (4.94)$$

Обратим внимание на то, что найденное выражение для $V_{\text{эф}}(\omega,\mathbf{k})$ есть произведение функций ω и $\mathbf{r}$. Такая факторизация справедлива лишь в пределе $|\omega|\ll E_F$ и не имеет места для точного поляризационного оператора (8.53).

Перейдем в импульсное представление:

$$V_{\text{эф}}(\omega,\mathbf{k})=-i|\omega|\int F(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{kr}}d^3\mathbf{r}=-i|\omega|\widetilde{F}(\mathbf{k}). \quad (4.95)$$

Интеграл по $d^3\mathbf{r}$ нетрудно вычислить [2] в полярных координатах:

$$\widetilde{F}(\mathbf{k})=\frac{8\pi\lambda^2m^2}{2\pi^3|\mathbf{k}|}\int_0^\infty\sin^2(p_0r)\sin(|\mathbf{k}|r)\frac{dr}{r}= \\ =\frac{1}{\pi}\lambda^2m^2\begin{cases}|\mathbf{k}|^{-1} & \text{при } |\mathbf{k}|\leqslant 2p_0,\\ 0 & \text{при } |\mathbf{k}|>2p_0.\end{cases} \quad (4.96)$$

Отсечка при $|\mathbf{k}|=2p_0$ в полученном выражении (4.96) означает, что при рассеянии с малой передачей энергии переданный импульс не может быть больше диаметра ферми-сферы $2p_0$.

21 б. Рассмотрим собственно-энергетическую часть функции Грина тяжелой частицы:

$$\Sigma(\varepsilon,\mathbf{p})=i\int G_0(\varepsilon-\omega,\mathbf{p}-\mathbf{k})\,V_{\text{эф}}(\omega,\mathbf{k})\,\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{d\omega}{2\pi}, \quad (4.98)$$

[2] При интегрировании по $r=|\mathbf{r}|$ в (4.96) использован интеграл

$$\int_0^\infty\sin^2(\alpha r)\sin(\beta r)\frac{dr}{r}=\frac{\pi}{8}\left(2\operatorname{sgn}\beta-\operatorname{sgn}(\beta+2\alpha)-\operatorname{sgn}(\beta-2\alpha)\right) \quad (4.97)$$

где

$$G_0(\varepsilon,\mathbf{p})=\frac{1}{\varepsilon-\mathbf{p}^2/2M+i\delta},\quad V_{\text{эф}}(\omega,\mathbf{k})=-i|\omega|\widetilde{F}(\mathbf{k}). \tag{4.99}$$

Поскольку $V_{\text{эф}}(\omega,\mathbf{k})\propto|\omega|$, интеграл по ω в (4.98) формально расходится. Эта расходимость есть следствие приближенного характера нашего выражения (4.95) для $V_{\text{эф}}$, справедливого лишь при $|\omega|\ll$ $\ll E_F$. Регуляризуем интеграл по ω, улучшив его сходимость за пределами области $-\omega_0<\omega<\omega_0$, где $\omega_0\approx E_F$. Такая регуляризация требует некоторой осторожности, поскольку взаимодействие $V_{\text{эф}}(\omega,\mathbf{k})$ должно удовлетворять общим требованиям аналитичности по ω. Так, при аналитическом продолжении с полуоси $\omega>0$ должно получаться запаздывающее взаимодействие (аналитичное в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\omega>0$), а при продолжении с полуоси $\omega<0$ — опережающее взаимодействие (аналитичное в нижней полуплоскости $\operatorname{Im}\omega<0$). Требуемым условиям аналитичности можно удовлетворить, например, регуляризовав выражение для $V_{\text{эф}}(\omega,\mathbf{k})$ следующим образом:

$$V_{\text{эф}}(\omega,\mathbf{k})=-i|\omega|\left(\frac{i\omega_0}{i\omega_0+|\omega|}\right)^n\widetilde{F}(\mathbf{k}), \tag{4.100}$$

где n — достаточно большое положительное число.

Теперь проинтегрируем выражение (4.98) по ω. Заметим, что если бы функция $V_{\text{эф}}(\omega,\mathbf{k})$ была аналитична в полуплоскости $\operatorname{Im}\omega<0$, то интеграл был бы равен нулю по теореме Коши. Поэтому удобно вычесть из интеграла (4.98) такое же выражение, в котором функция $V_{\text{эф}}(\omega,\mathbf{k})$ при $\omega>0$ заменена на результат аналитического продолжения с полуоси $\omega<0$. Действуя таким образом, получаем

$$\Sigma(\varepsilon,\mathbf{p})=\int A(\varepsilon,\mathbf{p}-\mathbf{k})\widetilde{F}(\mathbf{k})\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}, \tag{4.101}$$

где

$$A(\varepsilon,\mathbf{p})=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_0}\frac{\omega d\omega}{T_{\varepsilon,\mathbf{p}}+\omega}=\frac{T_{\varepsilon,\mathbf{p}}}{\pi}\ln\left(\frac{\omega_0+T_{\varepsilon,\mathbf{p}}}{T_{\varepsilon,\mathbf{p}}}\right)-\frac{\omega_0}{\pi},$$
$$T_{\varepsilon,\mathbf{p}}=\frac{\mathbf{p}^2}{2M}-\varepsilon-i\delta. \tag{4.102}$$

(При интегрировании по $\omega>0$ мы обрезали интеграл на $\omega=\omega_0$, воспользовавшись быстрым убыванием подинтегрального выражения в (4.100) при $\omega\gg\omega_0$.) Заметим, что вторым слагаемым $-\omega_0/\pi$ в выражении (4.102) для $A(\varepsilon,\mathbf{p})$ можно пренебречь, поскольку его вклад в $\Sigma(\varepsilon,\mathbf{p})$ сводится к константе, дающей поправку к химическому потенциалу частицы из-за взаимодействия с ферми-газом. Кроме того, под знаком логарифма в (4.102) можно пренебречь $T_{\varepsilon,\mathbf{p}}$ по сравнению с ω_0.

Интеграл по $d^3\mathbf{k}$ в выражении (4.101) можно вычислить следующим образом. Перейдем к переменным $k=|\mathbf{k}|$ и $q=|\mathbf{p}-\mathbf{k}|$ по формуле (4.38):

$$\Sigma(\varepsilon,\mathbf{p})=\frac{1}{(2\pi)^2p}\int_0^\infty kdk\int_{|p-k|}^{p+k}\widetilde{F}(k)\frac{T_{\varepsilon,q}}{\pi}\ln\left(\frac{\omega_0}{T_{\varepsilon,q}}\right)qdq. \tag{4.103}$$

Интегрирование по области $|p-k|<q<p+k$ дает

$$B_{\varepsilon,p}(k)=\frac{M}{4\pi}x^2\left[1+2\ln\frac{\omega_0}{x}\right]\Big|_{x_-}^{x_+},\quad x_\pm=\frac{(p\pm k)^2}{2M}-\varepsilon-i\delta. \tag{4.104}$$

С учетом (4.96) получается следующее выражение:

$$\Sigma(\varepsilon,\mathbf{p})=\frac{1}{(2\pi)^2p}\int_0^\infty B_{\varepsilon,p}(k)\widetilde{F}(k)kdk=\frac{\lambda^2m^2}{\pi(2\pi)^2p}\int_0^{2p_0}B_{\varepsilon,p}(k)dk \tag{4.105}$$

Интегрирование в (4.105) элементарно. Однако получающееся выражение весьма громоздко и мы не будем его выписывать.

Рассмотрим собственно-энергетическую часть $\Sigma(\varepsilon,\mathbf{p})$ отдельно при энергиях частицы ε больших и малых по сравнению с $\varepsilon_M=2p_0^2/M$. Для нахождения асимптотик явное выражение (4.105) оказывается не очень удобным. Более простой путь — вернуться к выражениям (4.101), (4.102) и выполнить разложение:

$$A(\varepsilon,\mathbf{p}-\mathbf{k})=\frac{1}{\pi}T_{\varepsilon,\mathbf{p}}\begin{cases}\ln\left(2M\omega_0/\mathbf{k}^2\right)+1 & \text{при } |\mathbf{p}|\ll|\mathbf{k}|,\\ \ln\left(\omega_0/T_{\varepsilon,\mathbf{p}}\right) & \text{при } |\mathbf{p}|\gg|\mathbf{k}|,\end{cases} \tag{4.106}$$

где во всех случаях подразумевается, что $\varepsilon\approx\mathbf{p}^2/2M$, поскольку нас интересует окрестность массовой поверхности частицы. В разложении (4.106) мы опустили независящие от ε и $\mathbf{p}$ члены, поскольку они дают лишь несущественный сдвиг химического потенциала частицы, а также члены пропорциональные $\mathbf{pk}$, поскольку они обращаются в нуль при интегрировании в (4.101).

Нас интересует область не слишком больших энергий $\varepsilon\ll\omega_0\approx E_F$. В этой области логарифм в выражении (4.106) оказывается большим, и поэтому собственно-энергетическую часть (4.101) достаточно вычислить с логарифмической точностью:

$$\Sigma(\varepsilon,\mathbf{p})=\alpha T_{\varepsilon,\mathbf{p}}\begin{cases}\ln\left(\omega_0/\varepsilon_M\right) & \text{при } \varepsilon\ll\varepsilon_M,\\ \ln\left(\omega_0/T_{\varepsilon,\mathbf{p}}\right) & \text{при } \varepsilon_M\ll\varepsilon\ll\omega_0,\end{cases} \tag{4.107}$$

где $\alpha=\dfrac{1}{\pi}F_{\mathbf{r}=0}=\dfrac{\lambda^2m^2p_0^2}{2\pi^4}$. Поскольку $T_{\varepsilon,\mathbf{p}}=-G^{-1}(\varepsilon,\mathbf{p})$, перенормированная функция Грина

$$\widetilde{G}(\varepsilon,\mathbf{p})=\frac{1}{\varepsilon-\mathbf{p}^2/2M-\Sigma(\varepsilon,\mathbf{p})} \tag{4.108}$$

имеет полюс при $\varepsilon = \mathbf{p}^2/2M$. Получается, что взаимодействие с фермигазом никак не влияет на закон дисперсии тяжелой частицы. Иными словами, найденная собственно энергетическая часть дает только перенормировку вычета a в разложении $G(\varepsilon, \mathbf{p}) = a/(\varepsilon - \mathbf{p}^2/2M + i\delta)$ вблизи полюса.

Обсудим перенормировку вычета a более подробно. Как следует из (4.107), поправка к вычету имеет порядок величины $\alpha \ln(\omega_0/\varepsilon_M)$. А поскольку $\varepsilon_M \ll \omega_0$, то даже при малом α эта перенормировка может быть весьма большой. Представляет интерес рассмотреть задачу при

$$\alpha \ll 1, \quad \alpha \ln(\omega_0/\varepsilon_M) \gg 1. \tag{4.109}$$

В этой области, с одной стороны, все еще можно пользоваться теорией возмущений по малому α, а с другой стороны — перенормировка функции Грина оказывается весьма сильной.

Чтобы найти функцию Грина, воспользуемся приемом, носящим название *метода ренормгруппы* (см. задачу 13). Рассмотрим как функция Грина $G(\varepsilon, \mathbf{p})$ зависит от параметра ультрафиолетовой обрезки ω_0. Зная эту зависимость, можно восстановить зависимость G от ε и $\mathbf{p}$, поскольку вся зависимость от ω_0 может быть выражена через безразмерный параметр $\omega_0/T_{\varepsilon,\mathbf{p}}$. Чтобы получить зависимость от ω_0 полезно рассмотреть производную $\partial G/\partial\omega_0$ и вычислить ее, дифференцируя по отдельности члены диаграммного ряда для G. (Ход рассуждений при этом напоминает решение задачи 13.) В низшем порядке по константе связи λ уравнение ренормгруппы имеет следующий вид:

$$\frac{\partial G(\varepsilon, \mathbf{p})}{\partial\omega_0} = G^2(\varepsilon, \mathbf{p}) \frac{\partial\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})}{\partial\omega_0} = \frac{\alpha}{\omega_0} G(\varepsilon, \mathbf{p}). \tag{4.110}$$

В уравнении (4.110) мы использовали выражение (4.107) в области $\varepsilon_M \ll \varepsilon \ll \omega_0$. Решая уравнение $\partial \ln G/\partial\omega_0 = \alpha/\omega_0$, получаем степенную зависимость $G \propto \omega_0^\alpha$. Отсюда получаем, что зависимость функции Грина от ε и $\mathbf{p}$ имеет степенную форму (4.33), причем коэффициент a_0 в (4.33) есть ω_0^α.

Ренормгруппу в задачах такого типа, вообще говоря, следует применять более аккуратно, учитывая наряду с поправками к функции Грина также и поправки к вершине взаимодействия. Приведем для знатоков соответствующее вычисление.

Затравочные функция Грина и вершина взаимодействия есть $G_0(\varepsilon, \mathbf{p}) = 1/(\varepsilon - \mathbf{p}^2/2M + i\delta)$ и $\Gamma^0 = \lambda$. Запишем перенормированные величины в виде

$$G(\varepsilon, \mathbf{p}) = Z(\xi)\, G_0(\varepsilon, \mathbf{p}), \quad \Gamma(\xi) = g(\xi)\, \lambda, \tag{4.111}$$

где функции Z и g, зависящие от $\xi = \ln(\omega_0/\varepsilon)$, описывают ренормировку в результате интегрирования по степеням свободы с энергиями $\varepsilon < E < \omega_0$. При этом уравнение (4.110) перепишется так:

$$\frac{\partial Z}{\partial\xi} = \alpha Z^3 g^2 \tag{4.112}$$

($\alpha = \lambda^2 m^2 p_0^2/2\pi^4$, как и выше). Теперь необходимо замкнуть систему уравнений, добавив уравнение ренормгруппы для $g(\xi)$. Поправка к вершине $\Gamma^0 = \lambda$ в низшем порядке по взаимодействию дается диаграммой, показанной на рис. 6.2. Эта диаграмма содержит логарифмическую расходимость:

$$\delta\Gamma = -\alpha\lambda \ln \frac{\omega_0}{\varepsilon}, \quad (\varepsilon \gg \varepsilon_M). \tag{4.113}$$

С учетом вида перенормированных величин (4.111) получаем уравнение ренормгруппы для взаимодействия:

$$\frac{\partial g}{\partial\xi} = -\alpha Z^2 g^3. \tag{4.114}$$

Решим теперь систему уравнений (4.112), (4.114) с начальным условием $Z(0) = g(0) = 1$. Нетрудно проверить, что эти уравнения оставляют инвариантной величину Zg. Поэтому $g = 1/Z$ при всех ξ.

Это позволяет переписать уравнение для Z в виде $\partial Z/\partial\xi = \alpha Z$, что дает $Z(\xi) = \xi^\alpha$. Таким образом, более аккуратное рассмотрение приводит к той же самой степенной зависимости (4.33). При этом выясняется, что ослабление взаимодействия вследствие перенормировок тоже описывается степенной зависимостью: $\Gamma(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon/\omega_0)^\alpha$.