# Глава 9
# ЭЛЕКТРОНЫ В СЛУЧАЙНОМ ПОТЕНЦИАЛЕ

## 9.1. Усреднение функций Грина по беспорядку

Рассмотрим еще один вид задач, решаемых с помощью диаграммной техники — задачи о *невзаимодействующих* электронах, упруго рассеивающихся на примесях. Традиционно такие задачи описываются кинетическим уравнением Больцмана для функции распределения вероятности в фазовом пространстве $n(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$. Кинетическое уравнение принимает наиболее простой вид в так называемом $\tau$-приближении, предполагающем изотропное рассеяние на примесях:

$$(\partial_t + \mathbf{v}\nabla_\mathbf{r} + \mathbf{F}\nabla_\mathbf{p})\, n(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\tau}\Big(n(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) - \overline{n}(|\mathbf{p}|, \mathbf{r}, t)\Big). \tag{9.1}$$

Здесь $\mathbf{F} = e\mathbf{E} + (e/c)\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ — сила, действующая на электроны, $\overline{n}(|\mathbf{p}|, \mathbf{r}, t)$ — среднее от функции распределения по направлениям импульса $\mathbf{p}$, а $1/\tau$ — частота столкновений с примесями[1].

Применение кинетического уравнения (9.1) в квантовых задачах подразумевает квазиклассическое описание, поскольку кинетическое уравнение определяет эволюцию функции распределения $n(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$ в фазовом пространстве. Кинетическое уравнение учитывает только те квантовые эффекты, которые относятся к статистике частиц. Диаграммная техника позволяет выяснить границы применимости кинетического уравнения, обосновать $\tau$-приближение, а также предсказать интересные квантовые эффекты в кинетике металлов, которые не описываются кинетическим уравнением.

Модель невзаимодействующих электронов представляют не только чисто методический интерес. Как известно, при рассмотрении динамики квазичастиц в ферми-жидкости роль взаимодействия сводится, главным образом, к переопределению различных констант ферми-газа (см. гл. 8). Поэтому в теории электронного транспорта в металлах пренебрежение электрон-электронным взаимодействием, в качестве первого приближения, вполне оправдано.

Рассмотрим, как формулируется диаграммная техника для задачи о рассеянии на примесях. Введем потенциал примесей в гамильтониан электронного газа. В простейшей модели потенциальное поле $U(\mathbf{r})$,

[1] Обобщение интеграла столкновений в правой части (9.1) на случай более общего неизотропного рассеяния достигается введением своего времени релаксации для каждой сферической гармоники функции распределения.



в котором движутся электроны, создается рассеивающими центрами, расположенными в точках $\mathbf{r}_i$:

$$\widehat{\mathscr{H}}_{\text{int}} = \int U(\mathbf{r})\psi^+(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})d^3\mathbf{r}, \quad U(\mathbf{r}) = \sum_i u(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i). \tag{9.2}$$

Положения примесей $\mathbf{r}_i$ будем считать случайными, а их концентрацию $n$ — малой по сравнению с плотностью электронов $n_\text{e} = 4\pi(p_0/2\pi\hbar)^3/3$ (слабый беспорядок). Для упрощения вычислений мы примем, что потенциал примесей короткодействующий, $u(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = u_0\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$, — иными словами, пренебрежем зависимостью амплитуды рассеяния от энергии и угла рассеяния. Помимо этого мы будем считать амплитуду рассеивающего потенциала $u_0$ малой, что позволит рассмотреть рассеяние на одной примеси в рамках борновской теории возмущений для амплитуды рассеяния.


Рис. 9.1

Функция Грина электрона, движущегося в потенциале (9.2), дается суммой диаграмм, показанных на рис. 9.1. Здесь волнистые линия обозначают потенциал примесей $U(\mathbf{r})$ (см. рис. 3.1). Функция Грина в случайном внешнем поле (9.2), вообще говоря, не является трансляционно инвариантной. Однако практический интерес обычно представляют величины, усредненные по расположению примесей. Такие величины являются трансляционно инвариантными.

Выполним усреднение функции Грина по беспорядку. Для этого заметим, что потенциал $U(\mathbf{r})$ в (9.2) есть сумма потенциалов отдельных примесей. Поэтому каждой вершине на рис. 9.1 может быть приписан номер примеси, по которому затем надо просуммировать (рис. 9.2):

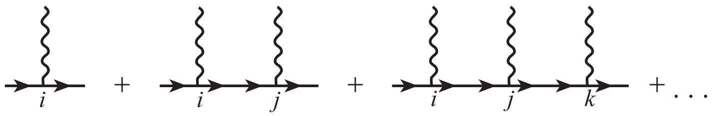


Рис. 9.2

Вначале рассмотрим диаграммы, в которых все номера примесей разные. Это означает, что рассеяние на каждой примеси рассматривается в первом борновском приближении и что все вершины в диаграмме статистически независимы. После усреднения по положениям примесей мы получим, что все такие диаграммы приводят к сдвигу химического потенциала на величину $\delta\mu = nu_0$. Это естественно: средний потенциал примесей, равномерно размазанных по объему, равен именно этой величине.

Существенно однако то, что при рассмотрении рассеяния на одной примеси мы не можем ограничиться первым борновским приближением, ибо оно дает лишь тривиальный сдвиг химического потенциала, описанный выше. Нас интересует мнимая часть амплитуды рассеяния $\operatorname{Im} f$, которая появляется лишь во втором борновском приближении по амплитуде рассеивающего потенциала $u_0$. Поскольку мнимая часть амплитуды рассеяния $\operatorname{Im} f$ возникает во втором порядке теории возмущений по $u_0$, она оказывается много меньше вещественной части $\operatorname{Re} f$. Однако, согласно теореме унитарности (см. задачу 11, гл. 3), именно $\operatorname{Im} f$ определяет полное сечение рассеяния на потенциале примеси.

Поэтому нам необходимо изучить диаграммы, в которые одна и та же примесь входит два раза. Чтобы отметить этот факт, соединим штриховой линией вершины, отвечающие совпадающим примесям (рис. 9.3):

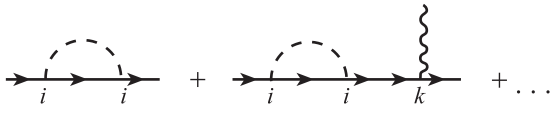


Рис. 9.3

Как и раньше, несвязанные штриховой линией вершины, с точки зрения усреднения по положениям примесей, являются статистически независимыми. Вершины же, соединенные штриховой линией, соответствуют одной и той же примеси. Мы будем рассматривать такую штриховую линию как новый элемент диаграммной техники. Усреднение по примесям дает для нее такое выражение:

$$\sum_i \langle u(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)u(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_i)\rangle = nu_0^2\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{9.3}$$

Статический характер потенциала примесей $U(\mathbf{r})$ выражается математически отсутствием какой–либо зависимости выражения (9.3) от моментов времени $t$ и $t'$, в которые происходит первое и второе рассеяние.

Далее можно было бы учесть высшие порядки теории возмущений для рассеяния на одной примеси. Однако оказывается, что это эквивалентно замене амплитуды и сечения борновского рассеяния на соответствующие точные выражения (см. гл. 3), что, очевидно, не приводит к качественно новым эффектам. Поэтому разумно пренебречь такими поправками и принять, что рассеивающий потенциал слабый.

Подведем итог. На каждой примеси электрон рассеивается либо один, либо два раза. Однократные рассеяния просто сдвигают химический потенциал и потому могут вообще не учитываться. Вклад же двукратного рассеяния можно получить, вычисляя диаграммы вида, представленного на рис. 9.4. При этом штриховой линии соответствует выражение $nu_0^2\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$.



В результате получается диаграммная техника *усреднения по беспорядку*[2]. Формально она напоминает диаграммную технику для электрон–фононного взаимодействия (с заменой функции Грина фононов на примесную штриховую линию). Однако имеются два существенных отличия:

1) передача энергии по штриховой линии равна нулю (упругое рассеяние);

2) отсутствуют поляризационные петли, одевающие штриховые линии, подобно диаграммам на рис. 6.1.

Первое отличие очевидно, а в справедливости второго легко убедиться, взглянув на диаграммы, показанные на рис. 9.1. Еще до усреднения по беспорядку в этих диаграммах отсутствуют замкнутые электронные петли.

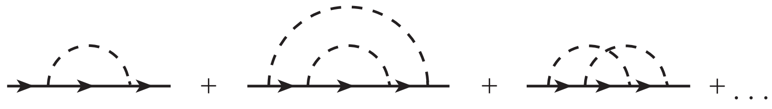


Рис. 9.4

Физически замкнутые петли отсутствуют из-за того, что потенциал примесей, как говорят, «вмороженный», т. е. статический. Дело в том, что динамические величины, такие, например, как смещение атомов решетки, могут подстраиваться под заданную электронную плотность (и именно этот эффект и описывается поляризационными петлями в диаграммах на рис. 6.1). Статический же потенциал примесей не меняет свою реализацию с течением времени. Усреднение по нему происходит принципиально иным образом, чем по динамическим степеням свободы.

Напомним как определяется усреднение в системе электронов, взаимодействующих с фононами. В электрон-фононной диаграммной технике электронная функция Грина есть

$$G(x,x') = -i\,\frac{\langle \mathrm{T}\psi^+(x)\psi(x')\widehat{S}\rangle_0}{\langle\widehat{S}\rangle_0}, \tag{9.4}$$

где среднее $\langle\ldots\rangle_0$ берется и по колебаниям решетки, и по основному состоянию ферми-газа. Обратим внимание, что усреднение происходит по-отдельности в числителе и в знаменателе.

Усреднение же по «вмороженному» беспорядку происходит иначе: вначале вычисляется функция Грина при заданной реализации беспорядка, и только потом происходит усреднение. Иными словами, по беспорядку усредняется сразу вся дробь (9.4):

$$\Big\langle G(x,x')\Big\rangle_{\text{бесп}} = -i\left\langle \frac{\langle \mathrm{T}\psi^+(x)\psi(x')\widehat{S}\rangle_0}{\langle\widehat{S}\rangle_0}\right\rangle_{\text{бесп}}, \tag{9.5}$$

[2] По традиции ее также называют *крестовой диаграммной техникой*.

где среднее $\langle \ldots \rangle_0$ берется по основному состоянию ферми-газа. Усреднение функции Грина по беспорядку будет рассмотрено более подробно в задаче 50.

При оценке различных диаграмм, возникающих при усреднении по беспорядку, полезно иметь в виду их интерпретацию в координатном представлении. Выражение $\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ в правой части (9.3) описывает возврат электрона на ту же примесь. Интересно, что в координатном представлении среднее от функции Грина принимает весьма простой вид (см. задачу 50 б):

$$\langle G(\varepsilon, \mathbf{r})\rangle = G_0(\varepsilon, \mathbf{r})\, e^{-|\mathbf{r}|/2l}, \tag{9.6}$$

где $G_0(\varepsilon, \mathbf{r})$ — неусредненная функция Грина, а $l = v_F\tau$ — длина свободного пробега. Экспоненциальный множитель $e^{-|\mathbf{r}|/2l}$ означает, что вероятность пролета электроном пути $|\mathbf{r}|$ без столкновений с примесями равна $e^{-|\mathbf{r}|/l}$ (вероятность есть квадрат амплитуды, т. е. квадрат модуля функции Грина). Такая же вероятность получается из кинетического уравнения (9.1).

В задачах, рассматриваемых в настоящей главе, электроны считаются невзаимодействующими, а рассеяние на примесях — упругим. Поэтому все обсуждаемые явления — одночастичные. Это означает, что, в принципе, можно было бы изучать поведение не ферми-системы, а одной частицы с заданной энергией $E$, найти ее вклад в кинетические величины, а затем просуммировать результат по всем занятым состояниям. Вместо этого мы будем пользоваться гриновскими функциями ферми-газа.

Естественно, при отсутствии взаимодействия эти два подхода, одночастичный и использующий ферми-газ, приводят к тождественным результатам. При одночастичном вычислении с последующим усреднением по фермиевскому распределению начальных состояний, вклады всех состояний, расположенных глубоко под ферми-поверхностью $E = E_F$, сократятся, поскольку в этой области энергий *все* состояния заполнены («дираковский вакуум»). Поэтому основной вклад всегда будет даваться только состояниями с энергиями в относительно узком интервале вокруг $E_F$, определяемом температурным размытием фермиевской ступеньки, частотой внешнего поля, и т. п. Сокращение вкладов состояний с энергиями, далеко отстоящими от $E_F$, означает, что при рассмотрении динамики в ферми-системе мы эффективно все равно имеем дело лишь с одной частицей на ферми-поверхности.

Кроме того (и это главное), использование функций Грина ферми-газа становится полностью оправданным, когда речь идет о взаимодействующих электронах. Хотя ситуации такого рода нам встретятся только в последующих главах (см. задачи 64, 65, 66, 67, 71), оказывается весьма полезным иметь некоторую преемственность.

Одночастичный характер рассматриваемых процессов упрощает физическую интерпретацию выражений, поскольку любой график, хотя формально и состоит из функций Грина ферми-газа, на самом деле описывает динамику всего одной частицы. Имея это в виду, можно считать электронную функцию Грина амплитудой перехода частицы из одной точки в другую, а дырочную — комплексно-сопряженной амплитудой той же самой частицы.



## 9.2. Усреднение функций отклика

Рассмотрим функции отклика ферми-газа в присутствии беспорядка. Вообще говоря, функции отклика в неупорядоченной системе зависят от конкретной реализации беспорядка. Однако физический интерес в основном представляют функции отклика, усредненные по распределению всех возможных реализаций. Ниже мы обсудим, как выполняется такое усреднение.

Рассмотрим, например, линейный отклик плотности частиц $\widehat{n}(\mathbf{r}, t) = \psi^+(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}, t)$ на слабое переменное внешнее поле $V(\mathbf{r}, t)$, взаимодействующее с плотностью:

$$\widehat{\mathscr{H}}_{\text{int}} = -\int \widehat{n}(\mathbf{r}, t) V(\mathbf{r}, t)\, d^3\mathbf{r}. \tag{9.7}$$

Функция отклика плотности после перехода в представление Фурье по времени определяется соотношением:

$$\langle \widehat{n}(\mathbf{r}_1, \omega)\rangle = \int K_{\text{точн}}(\omega, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) V(\mathbf{r}_2, \omega) d^3\mathbf{r}_2. \tag{9.8}$$

Ядро $K_{\text{точн}}(\omega, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ проще всего вычислять по мацубаровской технике, рассматривая отклик при дискретной мнимой частоте внешнего поля, который затем аналитически продолжается на вещественные частоты. Поскольку электрон-электронное взаимодействие в рассматриваемой задаче отсутствует, мацубаровский коррелятор плотность-плотность можно записать через точную функцию Грина электрона, движущегося в случайном потенциале:

$$K_{\text{точн}}(i\omega_n, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = T\sum_{\varepsilon_k} G^M(i\varepsilon_k, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) G^M(i\varepsilon_k + i\omega_n, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \tag{9.9}$$

В графическом представлении этот коррелятор выглядит как показано на рис. 9.5. Жирная линия обозначает точную функцию Грина, т. е. сумму диаграмм, изображенных на рис. 9.1.

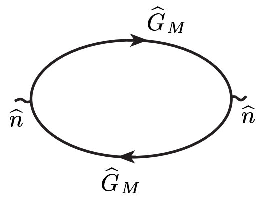


Рис. 9.5

Коррелятор $K_{\text{точн}}(i\omega_n, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ зависит от расположения примесей и поэтому зависит от обеих координат $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, а не только от их разности. Однако система «в среднем» трансляционно инвариантна, поэтому усредненный по беспорядку коррелятор должен зависеть только от разности $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$:

$$K(\omega, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \langle K_{\text{точн}}(\omega, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\rangle_{\text{бесп}}. \tag{9.10}$$

Чтобы вычислить $K(\omega, \mathbf{r})$, нужно усреднить произведение двух функций Грина в (9.9) по беспорядку. Как и при усреднении одной функции Грина, нужно попарно связать примеси штриховыми линиями. Штриховые линии, начинающиеся и заканчивающиеся на одной электронной функции Грина, можно просуммировать, получив усредненную функцию Грина (см. задачу 50). Линии же, связывающие различные электронные функции, описывают отличие среднего произведения функций Грина в (9.9) от произведения средних. Таким образом, для вычисления среднего коррелятора в (9.10) надо просуммировать такую последовательность диаграмм (рис. 9.6):

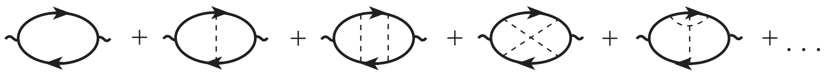

Рис. 9.6

Оказывается, однако, что не все диаграммы в этом ряду одинаково важны. В соответствии с основным принципом техники усреднения по беспорядку (см. разд. 9.6), основной вклад дается диаграммами, в которых примесные линии не пересекаются. Такая последовательность диаграмм называется *лестничным рядом* (рис. 9.7):

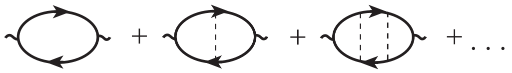

Рис. 9.7

При этом все функции Грина надо считать уже усредненными по беспорядку. Суммирование этой последовательности диаграмм будет выполнено в задаче 52.

Вычисление функции отклика тока $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ производится аналогично. В этом случае, однако, надо учитывать следующее обстоятельство. Оператор тока

$$\widehat{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, t) = \frac{e\hbar}{2m}\,\left(-i\psi^+(\mathbf{r}, t)\nabla\psi(\mathbf{r}, t) + \text{h.c.}\right) - \frac{e^2}{mc}\,\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)\,\psi^+(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}, t) \tag{9.11}$$

содержит векторный потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ в явном виде. Поэтому при добавлении в гамильтониан системы внешнего поля,

$$\widehat{\mathscr{H}}_{\text{кин}} = \int \frac{1}{2m}\psi^+(\mathbf{r})\left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)\right)^2\psi(\mathbf{r})d^3\mathbf{r}, \tag{9.12}$$

изменяется не только среднее значение оператора тока (как в случае с функцией отклика плотности), но и само выражение для этого оператора. Этот эффект не учитывается формулой Кубо, поэтому в нее необходимо добавить соответствующий вклад (второе слагаемое в (9.11)).

Таким образом, в операторе тока (9.11) имеется два вклада: градиентный и диамагнитный. Поэтому проводимость дается суммой выражений существенно разной природы. Во-первых, среднее от диамаг-



нитного тока по основному состоянию есть $\langle \mathbf{j}^{(1)}\rangle = -(ne^2/mc)\mathbf{A}$, где $n$ — электронная плотность. Во–вторых, находя мацубаровский отклик градиентной части тока на переменное поле, мы получаем

$$\langle j^{(2)}_\alpha(\mathbf{r})\rangle = -\frac{1}{c}\int \Pi^{(M)}_{\alpha\beta}(i\omega_n, \mathbf{r}-\mathbf{r}')A^\beta(\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}', \tag{9.13}$$

где $\Pi^{(M)}_{\alpha\beta}(i\omega_n, \mathbf{r}-\mathbf{r}')$ есть мацубаровский коррелятор ток–ток:

$$\Pi^{(M)}_{\alpha\beta}(i\omega_n, \mathbf{r}-\mathbf{r}') = -\frac{1}{2}\int\limits_{-\beta}^{\beta}\left\langle \mathrm{T}_\tau\,\widehat{j}_\alpha(\tau, \mathbf{r})\,\widehat{j}_\beta(0, \mathbf{r}')\right\rangle e^{i\omega_n\tau}\,d\tau \tag{9.14}$$

(здесь $\tau$ — мацубаровское время, $\widehat{j}_\alpha$ — компоненты градиентной части оператора тока). Поэтому полная мацубаровская корреляционная функция токов дается суммой двух слагаемых:

$$K^{jj\,(M)}_{\alpha\beta}(i\omega_n) = \Pi^{(M)}_{\alpha\beta}(i\omega_n, \mathbf{r}-\mathbf{r}') + \frac{ne^2}{m}\,\delta_{\alpha\beta}\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{9.15}$$

Отклик на вещественной частоте получается из (9.15) аналитическим продолжением $i\omega_n \to \omega$ $(n > 0)$.

Хотя, на первый взгляд, два члена в (9.15) имеют совершенно различную природу, на самом деле между ними имеется определенное соотношение. Действительно, в пределе низкой частоты проводимость должна быть конечной. Иными словами, однородный в пространстве и времени вектор–потенциал, не создающий электромагнитного поля, не должен создавать и ток. Поэтому должно выполняться тождество:

$$\Pi_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k})|_{\mathbf{k}=0,\omega\to 0} = -\frac{ne^2}{m}\,\delta_{\alpha\beta}, \tag{9.16}$$

где $\Pi_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) = \int \Pi_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{r})e^{-i\mathbf{kr}}d^3\mathbf{r}$ — поляризационный оператор (9.14) в частотно-импульсном представлении. Соотношение (9.16) аналогично известному из теории поля тождеству Уорда, гарантирующему калибровочную инвариантность поляризационного оператора. Подобно тождеству Уорда, в нашем случае равенство $\Pi(0) = -ne^2/m$ обеспечивает калибровочную инвариантность проводимости.

В нормальном металле из-за калибровочной инвариантности запрещено соотношение между током и векторным потенциалом вида $\mathbf{j} = \text{const}\,\mathbf{A}$. Сокращение вкладов такого типа и обеспечивается тождеством (9.16). А вот в сверхпроводниках, из-за того, что калибровочная инвариантность нарушена, соотношение указанного вида справедливо (оно называется «уравнением Лондонов» и будет рассмотрено в задачах 63 и 65). В сверхпроводниках тождество (9.16) не имеет места.

Таким образом, хотя в токовой функции отклика (9.15) и появляется дополнительный диамагнитный член, «неправильно» ведущий себя на малых частотах, обычно он сокращается аналогичным вкладом из градиентной части функции отклика (9.14). Сама же градиентная часть вычисляется так же, как и функция отклика плотности. Она точно также описывается суммой диаграмм на рис. 9.7, только теперь на концах диаграмм стоят токовые вершины. Основной принцип, разумеется, работает и в этом случае, поэтому функция отклика тока тоже определяется лестничным рядом. В простейшем случае суммирование этого ряда проведено в задаче 51.

*Литература*: Техника усреднения функций Грина по беспорядку рассмотрена в [1], § 39, п. 2, а также в обзоре: *P. A. Lee, T. V. Ramakrishnan*// Rev. Mod. Phys. 1985. V. 57. P. 287.

## 9.3. Задачи 50–54

**Задача 50.** (*Функция Грина, усредненная по беспорядку.*) Основной «принцип» техники усреднения по беспорядку состоит в том, что при усреднении какой-либо величины по беспорядку основной вклад дают графики, в которых примесные линии не пересекаются. Параметр, по которому графики с пересекающимися линиями оказываются малыми по сравнению с графиками, в которых линии не пересекаются, есть $(p_0 l)^{-1}$ — отношение фермиевской длины волны к длине свободного пробега $l = v_F\tau$. Обоснование этого «принципа» мы обсудим ниже, в разд. 9.6.

**а.** Усредните функцию Грина по беспорядку, рассматривая только графики с непересекающимися линиями. Получите среднее функции Грина в импульсном представлении:

$$\langle G(\varepsilon,\mathbf{p})\rangle = \frac{1}{\varepsilon-\xi(\mathbf{p})+\dfrac{i}{2\tau}\operatorname{sgn}\varepsilon}, \qquad \frac{1}{2\tau} = \nu_0 n u_0^2, \tag{9.17}$$

где $u_0 = \int u(\mathbf{r})d^3\mathbf{r}$, а $\nu_0 = mp_0/\left(2\pi^2\hbar^3\right)$ — плотность состояний на уровне Ферми с одной проекцией спина.

**б.** Найдите $\langle G(\varepsilon,\mathbf{r})\rangle$ в координатном представлении при $|\mathbf{r}|p_0 \gg 1$. Выведите формулу (9.6). Покажите, что в случае усреднения функции Грина по беспорядку аналог квазиклассического выражения (5.23) принимает такой вид:

$$G(\varepsilon,\mathbf{r}) = -\frac{m}{2\pi|\mathbf{r}|}\exp\left[\left(ip_\varepsilon\operatorname{sgn}\varepsilon - \frac{1}{2l}\right)|\mathbf{r}|\right], \qquad p_\varepsilon = p_0 + \frac{\varepsilon}{v_F}. \tag{9.18}$$

Это выражение справедливо при $|\varepsilon| \ll \varepsilon_F$ и $|\mathbf{r}|p_0 \gg 1$.

**Задача 51.** (*Проводимость электронного газа*[3].) Проводимость газа электронов, рассеивающихся на примесях, дается хорошо известной формулой Друде:

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1-i\omega\tau}, \qquad \sigma_0 = ne^2\,\frac{\tau}{m}. \tag{9.19}$$

Здесь $\sigma_0$ — статическая проводимость, $n$ — концентрация электронов, $\tau$ — время свободного пробега. Нашей задачей будет получить

[3] См. *S. F. Edwards*// Phil. Mag. 1958. Ser. 8. V. 3. P. 1020; *А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков*// ЖЭТФ. 1958. Т. 35. С. 1158; ЖЭТФ. 1959. Т. 36. С. 319.



соотношение (9.19) с помощью техники усреднения по беспорядку. Такой вывод представляет большой методический интерес, поскольку он позволяет проследить связь между диаграммной техникой и теорией кинетического уравнения.

Разумеется, наиболее простой вывод (9.19) использует кинетическое уравнение (9.1). Напомним, как это делается. В однородном электрическом поле $e^{-i\omega t}\,\mathbf{E}$ функция распределения, возмущенная полем, не имеет явной зависимости от координат. Поэтому кинетическое уравнение (9.1), разложенное до членов, линейных по полю $\mathbf{E}$, принимает вид

$$-i\omega\delta n(\mathbf{p}) + e\mathbf{E}\nabla_{\mathbf{p}}n_0(\mathbf{p}) = -\frac{1}{\tau}\delta n(\mathbf{p}). \tag{9.20}$$

Здесь $\delta n(\mathbf{p})$ — поправка к равновесной функции распределения $n_0(\mathbf{p})$, линейная по полю $\mathbf{E}$. Решая уравнение (9.20), получаем $\delta n(\mathbf{p}) = (e\mathbf{E}\nabla_{\mathbf{p}}n_0(\mathbf{p}))/(i\omega-\tau^{-1})$ и находим ток:

$$\mathbf{j} = \int e\mathbf{v}\delta n(\mathbf{p})\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} = \frac{e^2 n\mathbf{E}}{m(\tau^{-1}-i\omega)} \tag{9.21}$$

Напомним также, что в случае рассеяния более общего вида классическая проводимость определяется транспортным временем $\tau_{\text{тр}}$, вообще говоря не совпадающим со временем свободного пробега $\tau$. Однако для точечных примесей, рассеивающих изотропно, т. е. только в $S$-канале, эти два времени равны: $\tau_{\text{тр}} = \tau$.

Для вычисления проводимости с помощью диаграмм необходимо воспользоваться соотношением (9.15), связывающим функцию отклика с мацубаровским коррелятором ток–ток. Упростите мацубаровский коррелятор (9.14), предварительно записав его в форме

$$\Pi_{\alpha\beta}(i\omega_n) = T\sum_{\varepsilon_m=(2m+1)\pi T}\operatorname{Tr}\left(\widehat{G}^M(i\varepsilon_m+i\omega_n)\widehat{j}_\alpha\widehat{G}^M(i\varepsilon_m)\widehat{j}_\beta\right), \tag{9.22}$$

справедливой для невзаимодействующих частиц (см. п. 7.2.1). Выполните усреднение по беспорядку, рассматривая только диаграммы с непересекающимися линиями. С помощью соотношения (9.15) найдите проводимость.

**Задача 52.** (*Уравнение диффузии.*) Выведите уравнение диффузии, рассматривая отклик плотности частиц на слабое переменное внешнее поле (9.7). Для этого просуммируйте лестничный ряд на рис. 9.7 (его в этой связи часто называют *диффузионной лестницей* или *диффузоном*). Покажите, что при $|\mathbf{q}|l \ll 1$ и $\omega_n\tau \ll 1$ усредненный коррелятор плотность–плотность есть

$$\mathcal{K}(i\omega_n,\mathbf{q}) = -\frac{\nu D\mathbf{q}^2}{|\omega_n|+D\mathbf{q}^2}, \qquad D = \frac{1}{3}v_F l, \tag{9.23}$$

где $\nu = 2\nu_0$ — плотность состояний на уровне Ферми для обеих проекций спина.

Рассмотрите графики, изображенные на рис. 9.7, в координатном представлении и объясните, почему они соответствуют процессу диффузии.

Выражение (9.23), аналитически продолженное с $i\omega_n$ на верхней мнимой полуоси, согласуется с ответом, получающимся из классического уравнения диффузии. Действительно, уравнение диффузии в присутствии внешней силы $F = -\nabla V$ записывается так:

$$\partial_t n = D\nabla^2 n - \eta\nabla(Fn), \tag{9.24}$$

где $\eta = \nu D/n_0$ — подвижность. Поэтому, переходя к фурье–компонентам, имеем $\mathcal{K}(\omega, \mathbf{q}) = -\nu D\mathbf{q}^2/(-i\omega + D\mathbf{q}^2)$.

Обратим внимание на то, что коэффициент диффузии $D$ и проводимость, найденная в задаче 51, удовлетворяют соотношению Эйнштейна,

$$\sigma = e^2\nu D, \tag{9.25}$$

как и должно быть.

**Задача 53.** (*Интерференционное удвоение вероятности возврата.*) Рассмотрим вероятность $p(t)$ того, что электрон после рассеяния на примесях возвращается в момент времени $t$ в ту же точку, откуда он вышел при $t = 0$. В предыдущей задаче мы вывели уравнение диффузии, функция Грина которого, как известно, есть

$$\mathscr{D}(r, t) = \left(2\pi Dt\right)^{-n/2} e^{-r^2/2Dt}, \tag{9.26}$$

где $n$ — размерность пространства. Для вероятности возврата это дает $p(t) = (2\pi Dt)^{-n/2}$.

Оказывается, благодаря эффектам интерференции рассеяния на разных примесях, которыми мы пренебрегли при выводе уравнения диффузии, вероятность возврата $p(t)$ *удваивается*. Поясним физическое происхождение этого эффекта иллюстрацией из оптики. Пусть внутри большого ящика со случайно расположенными рассеивателями (примесями) находится монохроматический источник. Найдем интенсивность излучения, рассеянного точно обратно в источник. Интенсивность есть квадрат амплитуды, а амплитуда есть сумма амплитуд всех процессов многократного рассеяния на примесях: $A_{\text{полн}} = \sum_\alpha A_\alpha$. Если примеси точечные, то вклады многократного рассеяния удобно характеризовать последовательностью примесей, пройденных излучением. Скажем, рассеявшись сначала на примеси 1, свет попадает на примесь 2, которая затем рассеивает его обратно в исходную точку. В общем случае

$$A_\alpha = A_{0\to m}A_{m\to n}\ldots A_{s\to 0}. \tag{9.27}$$

Поскольку расположение примесей случайно, фазы амплитуд $A_{i\to j}$, соответствующих различным последовательностям прохождения примесей, не скоррелированны. Поэтому интерференцией почти всех вкладов можно пренебречь — за одним единственным исключением, когда одна и та же (случайная!) последовательность примесей проходится один раз в прямом, а другой — в обратном порядке. Каждые две такие амплитуды $A_\alpha$ и $A_{\alpha'}$ в точности равны друг другу и полностью интерферируют. Теперь заметим, что если бы интерференции вообще не было, интенсивность подчинялась бы уравнению диффузии, а из-за интерференции пар путей, проходящих по одной и той же траектории в противоположных направлениях, она оказалась бы в два раза больше:



$$\left|\sum A_\alpha\right|^2 = \sum{}'\left|A_\alpha + A_{\alpha'}\right|^2 = 2\sum\left|A_\alpha\right|^2. \tag{9.28}$$

(В сумме, помеченной штрихом, суммирование идет по последовательностям примесей без учета направления обхода.) Интерференционный вклад крайне чувствителен к положению конечной точки: уже на расстоянии нескольких длин волн от источника интенсивность рассеянного излучения уменьшается до «классического» значения, т. е. падает в два раза. Происходит это потому, что, как легко убедиться, для несовпадающих начальной и конечной точек одна и та же последовательность примесей при прохождении в противоположных направлениях дает разные набеги фаз.

Рассмотрим интерференционную часть коррелятора плотность–плотность электронов, соответствующую описанной картине. Покажите, что эта так называемая «квантовая поправка» дается *веерными* графиками вида[4])

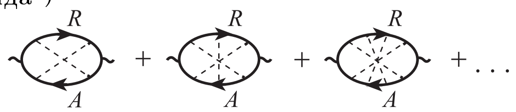


Рис. 9.8

**а.** (*Рассеяние точно назад.*) Нарисуйте веерные графики в координатном представлении. Пусть начальная и конечная точки совпадают. Покажите, что каждый вклад с фиксированным числом линий в веере на рис. 9.8 равен соответствующему вкладу из диффузионной лестницы, рассмотренной в задаче 52 (см. рис. 9.7), и значит вероятность возврата в два раза больше классического значения.

Обратим внимание на то, что почленное соответствие между веерным и лестничным рядами неполное, поскольку первым двум членам диффузионной лестницы в веерных графиках сопоставить нечего. Однако на больших временах $t \gg \tau$, когда справедливо диффузионное приближение, каждое слагаемое диффузионной лестницы много меньше их суммы (см. решение задачи 52). Поэтому поправка, возникающая из-за несоответствия первых двух членов диффузионного и веерного рядов, оказывается малой и не влияет на удвоение вероятности возврата.

**б.** (*Координатная зависимость.*) Теперь рассмотрим случай, когда начальная и конечная точки находятся на расстоянии $r$. Найдите зависимость квантовой поправки от $r$. Вычисление удобно проводить в координатном представлении, пользуясь функцией Грина, найденной

4) Веерные графики для проводимости были впервые рассмотрены в работе: *J. L. Langer*, *T. Neal*// Phys. Rev. Lett. 1966. V. 16. P. 984. Интерпретация роли соответствующего вклада в динамику электронов как интерференции при рассеянии назад принадлежит *Д. Е. Хмельницкому*.

в задаче 22. Покажите, что интерференционная поправка ослабляется при $p_0 r \approx 1$, и определите характер ее убывания при $p_0 r \gg 1$.

**Задача 54.** (*Квантовая поправка к проводимости*[5].) Рассмотрим статическую проводимость $\sigma_0$ двумерного электронного газа. Хотя в задаче 51 речь формально шла о трехмерной системе, все ее результаты, как нетрудно видеть, переносятся без каких-либо существенных изменений на случай произвольной размерности. Поэтому проводимость двумерной системы в главном порядке по параметру $(p_0 l)^{-1}$ дается формулой Друде.

В этой задаче нас будет интересовать следующий член в формальном разложении проводимости по степеням $(p_0 l)^{-1}$. Для того чтобы его найти, нужно рассмотреть всевозможные способы усреднения петлевой диаграммы для коррелятора ток–ток (см. рис. 9.13), при которых примесные линии пересекаются, но делают это «минимальным образом».

Покажите, что при этом получаются веерные графики, подобные изображенным на рис. 9.8 и что ими исчерпываются все минимально пересекающиеся диаграммы. Эти графики определяют главную квантовую поправку в любой размерности, но наиболее интересной оказывается двумерная ситуация.

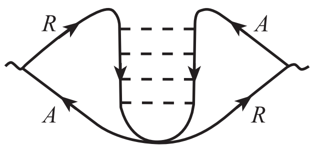


Рис. 9.9

Просуммируйте последовательность графиков на рис. 9.8 при $D = 2$, перерисовав их в виде, показанном на рис. 9.9, и обращаясь с получившейся лестницей так же, как с диффузионной лестницей в задаче 51. Получите поправку к проводимости

$$\delta\sigma(\omega) = -\frac{1}{\pi}\,\frac{e^2}{h}\,\ln\frac{1}{\omega\tau}, \tag{9.29}$$

где $\omega$ — частота внешнего поля. Поправка *расходится* при $\omega \to 0$. Формально это означает, что теория кинетического уравнения неприменима на больших временах $t \geqslant \tau \exp(p_0 l)$, поскольку в этой области $\delta\sigma$ сравнивается с $\sigma_0$. Поправка отрицательна и растет по абсолютной величине когда $\omega \to 0$, что указывает на отсутствие проводимости в двумерной системе при $T = 0$ и локализацию электронных состояний.

## 9.4. Задачи повышенной сложности 55–57 (слабая локализация и мезоскопика)

В задачах 53 и 54 было показано, что интерференция амплитуд геометрически тождественных путей, пройденных частицей в противо-

[5] Явление слабой локализации в двумерной системе, которое приводит к особенностям в квантовой поправке к проводимости, было впервые рассмотрено в работе: *Л. П. Горьков, А. И. Ларкин, Д. Е. Хмельницкий*// Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 30. С. 248.



положных направлениях, приводит к особому, квантовомеханическому по своему характеру, вкладу в проводимость. В этой поправке к проводимости, отрицательной по величине, проявляется тенденция к локализации квантовых состояний в случайном потенциале (см. п. 9.7.1). Величина квантовой поправки (порядка $e^2/h$) может быть много меньше классической друдевской проводимости $\sigma \approx (e^2/h)\, p_0 l$. Тем не менее, интерференционный характер этого вклада в проводимость приводит к целому ряду ярких эффектов.

Возникновение совершенно нового круга явлений, связанных с квантовой когерентностью омической проводимости, обусловлено весьма большим размером наиболее существенных интерферирующих траекторий по сравнению с длиной свободного пробега. Длины траекторий, определяющих «слаболокализационную» поправку к проводимости, оказываются большими, поскольку характерные времена диффузии, в течение которых имеет место фазовая когерентность, велики по сравнению со временем свободного пробега между соударениями с примесями. Наличие же большого временного масштаба приводит к сильной чувствительности этой поправки к внешним полям и другим факторам, влияющим на когерентность распространения электронных волн.

Уточним это утверждение. Интереференция имеет место для траекторий, время движения по которым не превосходит некоторого характерного *времени сбоя фазы* $\tau_\varphi$. Величина $\tau_\varphi$ представляет собой новый временной масштаб, не имеющий аналога в классической кинетике. Это время, характеризующее скорость потери фазовой когерентности из-за неупругих процессов, зависит от характера взаимодействия в системе и от температуры. (В отсутствие электрон-электронного и электрон-фононного взаимодействий динамика была бы чисто упругой и сбоя фазы не было бы.) При низких температурах время $\tau_\varphi$ обычно имеет степенную температурную зависимость, $\tau_\varphi \sim T^{-\alpha}$, где величина $\alpha$ положительна и зависит от вида доминирующего взаимодействия[6].

Введем в рассмотрение внешнее магнитное поле. Интерференция траекторий размера $L$ подавляется полем $B \approx \Phi_0/L^2$, где $\Phi_0 = hc/e$ — квант потока. Однако в отсутствие магнитного поля, если имеет место сбой фазы, в квантовую поправку к проводимости вклад дают траектории, время движения по которым не превосходит $\tau_\varphi$. Поэтому, для подавления квантовой поправки достаточно приложить такое поле, чтобы $t_B = L^2/D = \Phi_0/(DB)$ стало меньше $\tau_\varphi$. Этот критерий определяет характерное поле $B_c = \Phi_0/D\tau_\varphi$, величина которого достаточна, чтобы подавить квантовую поправку. Поле $B_c$ оказывается заметно

[6] Вопрос о температурной зависимости времени сбоя фазы и о влиянии неупругих процессов на слабую локализацию рассматривался в работах: *B. L. Altshuler, A. G. Aronov, D. E. Khmelnitskii*// Solid State Comm. 1981. V. 39. P. 619; J. Phys. C. 1982. V. 15. P. 7367; см. также обзоры: *B. L. Altshuler, A. G. Aronov*. Electron-Electron Interactions in Disordered Systems.— Amsterdam: North-Holland, 1985; *P. A. Lee, T. V. Ramakrishnan*// Rev. Mod. Phys. 1985. V. 57. P. 287.

меньше полей, необходимых для подавления классической проводимости. Вследствие этого, в условиях слабой локализации возникает большое по величине и отрицательное по знаку магнитосопротивление в классически слабых полях: $\delta\sigma(B) \approx -(e^2/h)(B/B_c)^2$ (см. задачу 55). Это так называемое «аномальное магнитосопротивление» является характерным признаком слабой локализации.

Наиболее красивым явлением, возникающим в режиме слабой локализации, является эффект Ааронова–Бома (задача 56). Он проявляется в периодической зависимости проводимости неодносвязного образца (цилиндра или кольца) от величины пропущенного через него магнитного потока. Проводимость зависит от магнитного потока даже когда поле непосредственно внутри проводника пренебрежимо мало, что подчеркивает интерференционный характер слабой локализации.

Другое важное явление, наблюдающееся в тех же условиях, что и слабая локализация, — несамоусредняемость проводимости [7]. Оказывается, проводимость может флуктуировать при изменении реализации беспорядка или внешнего поля на величину порядка $e^2/h$. Величина этих флуктуаций не зависит от размера системы, если он меньше длины сбоя фазы $L_\varphi = (D\tau_\varphi)^{1/2}$. В системах же бо́льшего размера, при $L > L_\varphi$, флуктуации проводимости убывают в соответствии с центральной предельной теоремой, как $(L_\varphi/L)^{3/2}e^2/h$ (в размерности 3).

Интересно, что физические свойства несамоусредняющейся части проводимости могут заметно отличаться от свойств средней проводимости. В частности, как мы убедимся в задаче 57, в условиях эффекта Ааронова–Бома эти два вклада в проводимость осциллируют как функция магнитного потока *с различными периодами* — $\Phi_0$ и $\Phi_0/2$.

Подведем итог. При достаточно низкой температуре, транспортные свойства систем с размерами много больше атомных оказываются существенно квантовыми. Для этого требуется лишь, чтобы выполнялось условие $L \lesssim L_\varphi$. Раздел физики твердого тела, изучающий свойства таких систем, называется *мезоскопикой*, поскольку размеры системы должны быть достаточно велики, чтобы их можно было описывать макроскопически (и проводить измерения!), но одновременно достаточно малы, чтобы можно было наблюдать квантовые эффекты [8].

**Задача 55*.** (*Аномальное магнитосопротивление* [9].) Слабая локализация подавляется магнитным полем, что приводит к так называемому *отрицательному магнитосопротивлению*. Чувствительность по отношению к магнитному полю качественно объясняется следующим образом. В присутствии поля интерференция амплитуд прохождения электроном одного и того же (случайного) пути в противоположных направлениях ослабляется, поскольку поле делает фазу волновой функции зависящей от направления прохождения траектории, подавляя тем самым интерференцию. Величина эффекта определяется тем, насколько велик вклад в проводимость от траекторий большого размера $L$. Магнитное поле $B$ как бы исключает вклады траекторий с $BL^2 \geqslant \Phi_0$, охватывающих больше одного кванта потока $\Phi_0 = hc/e$.

Найдите зависимость квантовой поправки к проводимости от магнитного поля в размерности $D = 2, 3$. Считайте поле классически слабым; используйте выражение (9.95) для слаболокализационной проводимости через куперон, введя в него время сбоя фазы $\tau_\varphi$. Поскольку время диффузионного движения по траектории размера $L$ есть $t = L^2/D$, в магнитном поле $B$ «работают» только траектории, время движения по которым меньше $t_B = \Phi_0/(BD)$. Соответственно, следует ожидать зависимости слаболокализационной проводимости от магнитного поля при $t_B \approx \tau_\varphi$, т. е. при $B \approx \Phi_0/(D\tau_\varphi)$.

Для сравнения оценим величину магнитного поля, подавляющего классическую проводимость Друде–Лоренца

$$\sigma_{xx} = \frac{ne^2\tau}{m(1+\omega_c^2\tau^2)}, \tag{9.30}$$

где $\omega_0 = eB/mc$ — циклотронная частота, $\tau$ — время свободного пробега. Согласно (9.30) подавление начинается с полей $B_*$, при которых $\omega_0 \approx 1/\tau$. Сравнивая с характерным полем $B_c$, подавляющим квантовую поправку, видим, что $B_*$ и $B_c$ отличаются примерно в $E_F\tau_\varphi/\hbar \gg 1$ раз. Поэтому квантовая поправка подавляется полностью уже в классически слабых полях. Кроме того, классический и квантовый эффекты имеют противоположные знаки.

Подавление магнитным полем квантовой поправки, отрицательной по знаку, приводит к отрицательному магнитосопротивлению, наблюдаемому в области весьма слабых полей. Классическое же магнитосопротивление положительно.

**Задача 56*.** (*Эффект Аронова–Бома* [10].) В задаче 55 было показано, что подавление слабой локализации магнитным полем приводит к аномальному магнитосопротивлению. Но этот эффект накладывается на классическое магнитосопротивление. Нельзя ли сделать так, чтобы эффект классического магнитосопротивления исключался автоматически? Оказывается, можно. Для этого необходимо сделать так, чтобы магнитное поле в образце вообще отсутствовало, но вектор-потенциал был бы отличен от нуля. Поскольку в уравнение для куперона, полученное в задаче 55, входит именно вектор-потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ слаболокализационная проводимость будет «чувствовать» такое поле.

[7] Самоусредняемость — близость случайной величины к своему среднему значению, в классических задачах обычно возникающая вследствие центральной предельной теоремы.

[8] Читатель, желающий узнать побольше об этой активно развивающейся области, может обратиться к популярной статье: *B. L. Altshuler, P. A. Lee*// Physics Today. 1988. V. 41 (12). P. 37.

[9] См. работу: *B. L. Altshuler, D. E. Khmelnitskii, A. I. Larkin, P. A. Lee*// Phys. Rev. B. 1980. V. 20. P. 5142.

[10] См. работу: *Б. Л. Альтшулер, А. Г. Аронов, Б. З. Спивак*// Письма в ЖЭТФ. 1981. Т. 33. С. 101.

Конечно, поскольку проводимость калибровочно инвариантна, интересующий нас вектор-потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ не должен сводиться к чистой калибровке.

Учитывая эти соображения, рассмотрим неодносвязный образец, а именно, металлический цилиндр, через который пропущен магнитный поток $\Phi$. Представим себе, что магнитное поле отлично от нуля только в полости цилиндра. Тогда на поверхности цилиндра имеется отличный от нуля вектор-потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, такой, что

$$\oint \mathbf{A}\, d\mathbf{r} = \Phi, \tag{9.31}$$

где интеграл берется по любому контуру, охватывающему полость. Такой вектор-потенциал меняет фазы волновых функций электронов и влияет на интерференционные явления (это влияние называется *эффектом Аронова–Бома*).

Найдите зависимость проводимости цилиндра, усредненной по беспорядку, от магнитного потока $\Phi$. Покажите, что эффект Ааронова–Бома приводит к осциллирующей зависимости проводимости от $\Phi$ с периодом $\Phi_0/2 = hc/2e$.

**Задача 57*.** (*Мезоскопическая проводимость*[11].) Найденные в задаче 56 осцилляции проводимости цилиндра, как функции магнитного потока, с периодом $\Phi_0/2$ выглядят несколько подозрительно. Ведь и энергия, и волновая функция каждого электрона системы периодичны по магнитному потоку с периодом $\Phi_0$. Например, для электрона, двигающегося по кольцу без примесей, уровни энергии есть $E_m = \hbar^2/(2m_e R^2)\,(m - \Phi/\Phi_0)^2$, где $m_e$ — масса электрона, а $m$ — его магнитное квантовое число. При $\Phi = \Phi_0/2$ система совершенно не похожа на систему с нулевым потоком. Электрон, обходя цилиндр, меняет при $\Phi = \Phi_0/2$ знак своей волновой функции, т. е. эффект магнитного потока оказывается наиболее сильным. Каким же образом период осцилляций проводимости оказывается равным $\Phi_0/2$?

Ответ состоит в том, что это есть результат усреднения по беспорядку. Действительно, вычисляя слаболокализационную поправку, мы учитываем только интерференцию двух траекторий, возвращающихся в исходную точку. Иными словами, мы вычисляем интерференционный вклад в вероятность «застревания» электрона в какой-то точке образца. Однако имеется также интерференционный вклад в вероятность перемещения электрона из одной точки в другую, и он устроен иначе. Этот вклад определяется траекториями, соединяющими две различные точки $A$ и $B$ и обходящими полость цилиндра с разных сторон. Разность фаз между такими траекториями равна $2\pi\Phi/\Phi_0$. Таким образом, интерференция между ними приводит к осцилляциям с периодом $\Phi_0$. Однако вклад этих траекторий содержит также большую фазу порядка

[11] См. работы: *P. A. Lee*, *A. D. Stone*// Phys. Rev. Lett. 1985. V. 55. P. 1622; *Б. Л. Альтшулер*// Письма в ЖЭТФ. 1985. Т. 51. С. 530.



$\theta = p_F L$, где $L$ — длина траектории. Эта фаза зависит от формы траектории, т. е. от реализации беспорядка. Если мы теперь усредним проводимость по беспорядку, то этот вклад исчезнет из-за усреднения по фазе $\theta$. Если же по беспорядку не усреднять, а рассматривать образец с конкретной реализацией беспорядка, то его проводимость должна иметь период $\Phi_0$.

При этом возникает необычная ситуация: неусредненная по беспорядку проводимость, зависящая от конкретной реализации случайного потенциала, осциллирует как функция $\Phi$ с периодом $\Phi_0$, в два раза бо́льшим, чем период $\Phi_0/2$ осцилляций усредненной проводимости. Чтобы проверить справедливость этой качественной картины, нужно вычислить величину, в которой вклад с периодом $\Phi_0$ не выпадает при усреднении по беспорядку. Рассмотрим произведение проводимостей при разных значениях потока и усредним его по беспорядку:

$$K_{\Phi,\Phi'} = \langle \sigma_{\alpha\beta}(\Phi)\sigma_{\mu\nu}(\Phi')\rangle_{\text{бесп}} - \langle \sigma_{\alpha\beta}(\Phi)\rangle_{\text{бесп}}\langle \sigma_{\mu\nu}(\Phi')\rangle_{\text{бесп}}. \tag{9.32}$$

Каждая из проводимостей в этом выражении дается до усреднения по беспорядку диаграммой на рис. 9.5, в которой жирная линия обозначает точную функцию Грина, изображенную на рис. 9.1. При усреднении по беспорядку нас интересуют перекрестные члены, поэтому мы должны связать примесными линиями функции Грина в разных петлях. Из-за усреднения по направлениям импульсов примесную лестницу в каждую из петель вставлять не надо. При этом мы должны постараться сделать так, чтобы примесные линии не пересекались. В результате получаются две диаграммы, показанные на рис. 9.10.

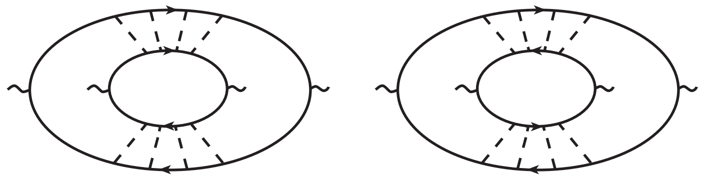

Рис. 9.10

Вычислите эти диаграммы и найдите коррелятор проводимостей (9.32) при разных значениях магнитного потока. Данная задача иллюстрирует то любопытное обстоятельство, что физические свойства усредненной по беспорядку величины (в данном случае, проводимости) могут принципиально отличаться от свойств точной, неусредненной величины.

## 9.5. Решения задач 50–57

**50 а.** Найдем функцию Грина, усредненную по беспорядку, используя импульсное представление. Гамильтониан имеет вид $\widehat{\mathcal{H}} = \widehat{\mathcal{H}}_0 +$

$+\widehat{\mathscr{H}}_{\rm int}$, где $\widehat{\mathscr{H}}_0$ — кинетическая энергия, а $\widehat{\mathscr{H}}_{\rm int} = \sum\limits_i \widehat{\mathscr{H}}_i$ — потенциал примесей:

$$\widehat{\mathscr{H}}_i = \iint \psi^+(\mathbf{p})u(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\psi(\mathbf{p}')\, e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\mathbf{r}_i}\, \frac{d^3\mathbf{p}\, d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^6}. \tag{9.33}$$

(Здесь $u(\mathbf{p}) = \int u(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{pr}}d^3\mathbf{r}$ — фурье-образ потенциала одной примеси.) Считая $\widehat{\mathscr{H}}_{\rm int}$ возмущением, разложим функцию Грина в ряд по потенциалу (рис. 9.11) и усредним почленно.

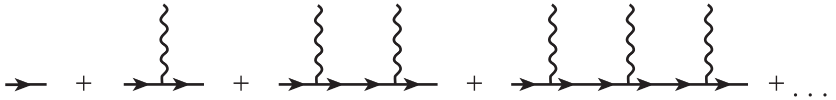

Рис. 9.11

Первое слагаемое от потенциала не зависит, и есть просто функция Грина свободной частицы:

$$G^{(0)}(\varepsilon, \mathbf{p}, \mathbf{p}') = (2\pi)^3 G_0(\varepsilon, \mathbf{p})\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}'). \tag{9.34}$$

Второе слагаемое имеет вид $\sum_i G_i^{(1)}$, где

$$G_i{}^{(1)}(\varepsilon, \mathbf{p}, \mathbf{p}') = G_0(\varepsilon, \mathbf{p})u(\mathbf{p}-\mathbf{p}')e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\mathbf{r}_i}G_0(\varepsilon, \mathbf{p}'). \tag{9.35}$$

Усреднение по положениям примесей $\mathbf{r}_i$ можно выполнить с помощью формулы

$$\langle e^{i\mathbf{qr}}\rangle = \frac{1}{V}\int e^{i\mathbf{qr}_i}\, d^3r_i = \frac{1}{V}(2\pi)^3\delta(\mathbf{q}). \tag{9.36}$$

Получаем

$$\langle G_i{}^{(1)}(\varepsilon, \mathbf{p}, \mathbf{p}')\rangle = [G_0(\mathbf{p})]^2(2\pi)^3\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\frac{u_0}{V}. \tag{9.37}$$

Сумма по $i$ дает

$$\langle G^{(1)}(\varepsilon, \mathbf{p}, \mathbf{p}')\rangle = nu_0(2\pi)^3\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')[G_0(\mathbf{p})]^2, \tag{9.38}$$

где $n = N/V$ — концентрация примесей.

Перейдем к третьему слагаемому, имеющему вид $\sum_{ij} G_{ij}^{(2)}$, где

$$G_{ij}^{(2)}(\varepsilon, \mathbf{p}, \mathbf{p}') = G_0(\mathbf{p})G_0(\mathbf{p}')\, \times$$
$$\times \int u(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)u(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}')G_0(\mathbf{p}_1)e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)\mathbf{r}_i - i(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}')\mathbf{r}_j}\frac{d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3}. \tag{9.39}$$

Это выражение содержит вклады двух различных процессов: двукратного рассеяния на одной примеси $(i=j)$, и однократного рассеяния на двух различных примесях $(i \neq j)$. При усреднении эти вклады надо разделять.



В случае $i = j$ усредняем по формуле

$$\langle e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\mathbf{r}_i}\rangle = \frac{1}{V}(2\pi)^3\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \tag{9.40}$$

и получаем

$$\langle G_{ii}^{(2)}(\varepsilon, \mathbf{p}, \mathbf{p}')\rangle =$$
$$= \frac{1}{V}(2\pi)^3\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')G_0^2(\varepsilon, \mathbf{p})\int \left|u(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)\right|^2 G_0(\varepsilon, \mathbf{p}_1)\,\frac{d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3}. \tag{9.41}$$

Во втором случае $(i \neq j)$ усреднение выглядит так:

$$\langle e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)\mathbf{r}_i - i(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}')\mathbf{r}_j}\rangle = \frac{1}{V^2}(2\pi)^6\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)\delta(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}'). \tag{9.42}$$

Таким образом, находим

$$\langle G_{ij}^{(2)}(\varepsilon, \mathbf{p}, \mathbf{p}')\rangle = \frac{1}{V^2}(2\pi)^3\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')G_0^3(\varepsilon, \mathbf{p})u_0^2. \tag{9.43}$$

После суммирования по всем примесям выражение (9.41) умножается на $N$, а выражение (9.43) — на $N^2$. Получаются два вклада, пропорциональные первой и второй степени концентрации примесей $n = N/V$ соответственно.

При усреднении следующих членов разложения функции Грина по потенциалу примесей, третьей и более высоких степеней, обозначенных точками на рис. 9.11, поступим так. В каждом порядке выделим процессы рассеяния, когда на каждой примеси электрон рассеивается либо один раз, либо два. Более высокими порядками будем пренебрегать, поскольку потенциал слабый. После усреднения и суммирования ряда, сводящегося, как обычно, к геометрической прогрессии, вклады однократных и двукратных процессов рассеяния выражаются как собственно-энергетическая часть усредненной гриновской функции. Ее нетрудно найти, сравнивая выражения (9.38), (9.41), и (9.43) с разложением

$$\langle G(\varepsilon, \mathbf{p}, \mathbf{p}')\rangle = (2\pi)^3\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\left(G_0^{-1}(\varepsilon, \mathbf{p}) - \left\langle\Sigma\right\rangle\right)^{-1} \tag{9.44}$$

в ряд по $\Sigma$.

Отметим еще раз, что пренебречь двукратным рассеянием по сравнению с однократными нельзя. Согласно теореме унитарности (см. задачу 15), именно двукратные процессы рассеяния и определяют борновское сечение рассеяния. Действительно, сечение рассеяния равно мнимой части амплитуды рассеяния, в то время как борновская амплитуда первого порядка чисто вещественна.

Выражение (9.38) дает вклад в $\Sigma$, равный

$$\left\langle\Sigma^{(1)}\right\rangle = nu_0, \tag{9.45}$$

где $n = N/V$. Выражение (9.43) поправок к $\Sigma$ не дает. Оно представляет собой просто член второго порядка в разложении $\langle G(\varepsilon, \mathbf{p}, \mathbf{p}')\rangle$ по $\left\langle\Sigma^{(1)}\right\rangle$.

Вклад $\left\langle\Sigma^{(1)}\right\rangle$ действителен и не зависит от $p$. Поэтому его можно интерпретировать как перенормировку химического потенциала

$$\mu \to \mu^* = \mu - \langle\Sigma^{(1)}\rangle. \tag{9.46}$$

Гораздо больший интерес представляет вклад от двукратных процессов рассеяния. Выражение (9.41) дает

$$\left\langle\Sigma^{(2)}\right\rangle_{(ii)} = \frac{N}{V}\int\left|u(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)\right|^2 G_0(\mathbf{p},\,\omega)\frac{d^3p_1}{(2\pi)^3}. \tag{9.47}$$

Как мы видели в гл. 3, с точки зрения теории рассеяния это выражение представляет собой второй член борновского разложения амплитуды рассеяния вперед. Его мнимая часть, с точностью до коэффициента, есть просто полное борновское сечение рассеяние, пропорциональное квадрату борновской амплитуды первого порядка, проинтегрированной по углам.

Найдем $\Sigma^{(2)}$ для $\delta$-функционных примесей (для краткости знак усреднения по примесям здесь и далее будем опускать). Фурье-разложение потенциала $u(\mathbf{r}) = u_0\delta^{(3)}(\mathbf{r})$ есть константа: $u(\mathbf{q}) = \int u(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}\,d^3r = u_0$. Поэтому

$$\Sigma^{(2)} = \int|u(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)|^2 G_0(\mathbf{p}_1)\frac{d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} = u_0^2\int G_0(\mathbf{p}_1)\frac{d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} =$$

$$= \frac{u_0^2}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3\mathbf{p}}{\varepsilon-\xi+i0\,\mathrm{sgn}\,\varepsilon} = \frac{4\pi u_0^2}{(2\pi)^3}\,\frac{p_0^2}{V_0}\int\frac{d\xi}{\varepsilon-\xi+i0\,\mathrm{sgn}\,\varepsilon} =$$

$$= \frac{4\pi u_0^2}{(2\pi)^3}mp_0(-\pi i)\,\mathrm{sgn}\,\varepsilon = -\frac{i}{2\pi}u_0^2 mp_0\,\mathrm{sgn}\,\varepsilon. \tag{9.48}$$

Интегрирование по импульсу $\mathbf{p}_1$ в $\xi$-приближении выделяет вклад, связанный с резкой ферми-поверхностью. Он — мнимый, и его знак меняется на ферми-поверхности скачком, как и должно быть согласно аналитическим свойствам причинной гриновской функции. Более точное интегрирование, с учетом вкладов от импульсов, далеких от ферми-поверхности, могло бы дать вклад в вещественную часть $\Sigma^{(2)}$, регулярную вблизи ферми-поверхности. Рассматривать такие вклады, представляющие собой поправки более высокого порядка к химическому потенциалу $\mu$, мы не будем. Таким образом, находим

$$\Sigma^{(2)} = -\frac{i}{2\tau}\;\mathrm{sgn}\,\varepsilon, \tag{9.49}$$

где время рассеяния $\tau$ дается выражением

$$\frac{1}{\tau} = \frac{mp_0 n}{\pi}\left|\int u(\mathbf{r})\,d^3r\right|^2. \tag{9.50}$$



Окончательно получаем функцию Грина в виде

$$\langle G(\varepsilon,\mathbf{p},\mathbf{p}')\rangle = \frac{(2\pi)^3\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')}{\varepsilon-p^2/2m+\mu^*+(i/2\tau)\,\mathrm{sgn}\,\varepsilon}. \tag{9.51}$$

К такому же результату можно прийти и другим, несколько менее тяжеловесным способом, используя уравнение Дайсона. Снова представим точную функцию Грина в виде ряда рис. 9.11 по потенциалу. Усредняя каждый член по положениям примесей, будем пользоваться стандартными обозначениями: потенциал примеси обозначим волнистой линией, причем в случаях, когда рассеяние на одной и той же примеси происходит два раза[12], будем вместо двух волнистых линий рисовать одну штриховую линию, соединяющую точки взаимодействия.

Далее, каждую диаграмму, дающую вклад в среднее гриновской функции, разобьем на связные графики, причем, естественно, будем считать штриховые линии составной частью графиков. (Напомним, что связным называется график, который нельзя разбить на части, удалив какую-нибудь одну гриновскую функцию.) Сумма всех таких связных графиков есть собственно-энергетическая часть $\Sigma$. С помощью уравнения Дайсона функция Грина $G$ может быть выражена через $\Sigma$ и затравочную гриновскую функцию $G_0$ (см. (4.9)). Таким образом получаем:

$$\langle G\rangle = G_0 + G_0\Sigma\langle G\rangle, \quad \text{или} \quad \langle G\rangle^{-1} = G_0^{-1} - \Sigma. \tag{9.52}$$

Здесь затравочная функция Грина есть $G_0^{-1} = \varepsilon - \xi + i0\,\mathrm{sgn}\,\varepsilon$.

Собственно-энергетическая часть, взятая в борновском приближении, содержит вклад от однократного взаимодействия с потенциалом примесей, которому сопоставляется среднее от этого потенциала $nu_0$, а также вклад от двукратного рассеяния, изображаемый на диаграммах штриховой линией, которой соответствует борновская амплитуда второго порядка. При этом, следуя «основному принципу» техники усредненния по беспорядку (см. разд. 9.6), мы пренебрегаем графиками с пересекающимися линиями. Графически, уравнение Дайсона для собственно-энергетической части имеет вид

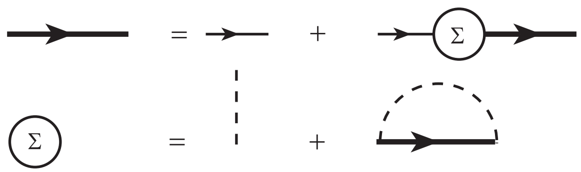


Рис. 9.12

[12] В борновском приближении для слабого потенциала рассеяния достаточно ограничиться однократными и двукратными процессами рассеяния.

т. е.

$$\Sigma(\varepsilon,\mathbf{p}) = nu_0 + n\int \frac{|u(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)|^2}{\varepsilon-\xi_{\mathbf{p}_1}-\Sigma(\varepsilon,\mathbf{p}_1)+i0\,\mathrm{sgn}\,\varepsilon}\,\frac{d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3}. \tag{9.53}$$

Чтобы решить это уравнение, заметим, что в случае $\delta$-функционных примесей фурье-компонента $u(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)=u_0$ выносится из-под интеграла (9.53). Это позволяет искать решение в виде функции $\Sigma(\varepsilon)$, зависящей только от $\varepsilon$. Будем искать решение в такой форме: $\Sigma(\varepsilon)=\delta\mu - (i/2\tau)\,\mathrm{sgn}\,\varepsilon$. Подставив эту функцию в уравнение Дайсона (9.53), убеждаемся, что решение дается суммой выражений (9.45) и (9.49). Итак, усредняя по беспорядку, находим

$$\langle G(\varepsilon,\mathbf{p})\rangle = \frac{1}{\varepsilon-p^2/2m+\mu^*+(i/2\tau)\,\mathrm{sgn}\,\varepsilon}. \tag{9.54}$$

**50б.** Теперь нетрудно получить среднее гриновской функции в координатном представлении. В фурье-образе функции Грина $G(\varepsilon,\mathbf{r}) = \int G(\varepsilon,\mathbf{p})e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}$ переходим к интегралу по $\xi$:

$$\langle G(\varepsilon,\mathbf{r})\rangle = \frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int \frac{p_0}{v_0|\mathbf{r}|}\,\frac{\sin|\mathbf{r}|p(\xi)\,d\xi}{\varepsilon-\xi+(i/2\tau)\,\mathrm{sgn}\,\varepsilon}, \tag{9.55}$$

где $p(\xi)=p_0+\xi/v_F$. Выполнить интегрирование по $\xi$ можно точно таким же способом, как в задаче 22 (см. формулы (5.23) и (5.25)). При этом сдвиг полюса $\varepsilon\to\varepsilon+i\,\mathrm{sgn}\,\varepsilon/2\tau$ приводит к дополнительному экспоненциальному множителю:

$$\langle G(\varepsilon,\mathbf{r})\rangle = G_0(\varepsilon,\mathbf{r})\,e^{-|\mathbf{r}|/2l}, \tag{9.56}$$

где $G_0(\varepsilon,\mathbf{r}) = -\dfrac{m}{2\pi|\mathbf{r}|}\exp\left[i\,\mathrm{sgn}\,\varepsilon\left(p_0+\dfrac{\varepsilon}{v_F}\right)|\mathbf{r}|\right]$, а $l=v_F\tau$ — длина свободного пробега, вычисленная по борновскому сечению рассеяния. В результате получается квазиклассическое выражение (9.18).

**51.** Вычислим проводимость в однородном переменном электрическом поле, используя теорию возмущений по малой концентрации примесей. Воспользуемся приведенным в условии задачи соотношением (9.15) между проводимостью и мацубаровским коррелятором ток–ток $\Pi_{\alpha\beta}(i\omega_n)$.

Даже если нас интересует статическая проводимость, лучше сначала рассмотреть проводимость на конечной частоте, а затем устремить частоту к нулю. Дело в том, проводимость «плохо себя ведет» в пределе нулевой концентрации примесей. Действительно, статическая проводимость чистого металла, т. е. идеального ферми-газа, обращается в бесконечность, в то время как проводимость на переменном токе конечна: $\sigma(\omega)=ine^2/m\omega$. Поэтому, даже в присутствии рассеяния, правильно сначала рассматривать ток в переменном поле, и уже потом переходить к статическому пределу.

Согласно (9.22) для невзаимодействующих частиц коррелятор ток–ток выражается через произведение двух гриновских функций. Графически выражение (9.22) для $\Pi_{\alpha\beta}(i\omega_n)$ изображается петлевой диаграммой, показанной на рис. 9.13. Волнистые линии в вершинах обозначают компоненты оператора тока $\hat{j}_\alpha = -i\dfrac{e\hbar}{2m}\psi^+\nabla_\alpha\psi + \mathrm{h.c.}$



Запишем среднее коррелятора $\Pi_{\alpha\beta}(i\omega_n)$ по беспорядку:

$$\langle\Pi_{\alpha\beta}(i\omega_n)\rangle = e^2\,T\sum_{\varepsilon_k}\left\langle \mathrm{Tr}\left(\widehat{G}^M(i\varepsilon_k+i\omega_n)\hat{v}_\alpha\widehat{G}^M(i\varepsilon_k)\hat{v}_\beta\right)\right\rangle, \tag{9.57}$$

где $\varepsilon_k=(2k+1)\pi T$, а $\hat{v}_\alpha=\hat{p}_\alpha/m$ — компоненты оператора скорости. Результат усреднения можно представить как сумму графиков, имеющих вид петли из мацубаровских функций Грина, показанной на рис. 9.13, всевозможными способами одетой примесными линиями.

Главный вклад при усреднении по беспорядку в случае малой концентрации примесей $p_0 l \gg 1$ дают графики с непересекающимися примесными линиями на рис. 9.14. Если рассматривать только графики такого типа, то усреднение сильно упрощается.

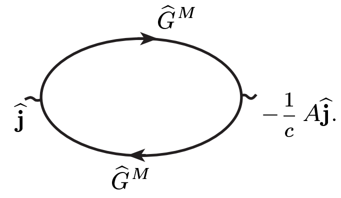


Рис. 9.13

Заметим что, вообще говоря, среднее $\langle G^M(\varepsilon)G^M(\varepsilon')\rangle$ по беспорядку *не равно* произведению средних $\langle G^M(\varepsilon)\rangle\langle G^M(\varepsilon')\rangle$. В рассматриваемом приближении непересекающихся примесных линий в разность $\langle G^M(\varepsilon)G^M(\varepsilon')\rangle - \langle G^M(\varepsilon)\rangle\langle G^M(\varepsilon')\rangle$ дают вклад диаграммы, содержащие примесные линии, соединяющие $G^M(\varepsilon)$ и $G^M(\varepsilon')$, подобные второму и четвертому графикам на рис. 9.14. Иными словами, отличие $\langle G^M(\varepsilon)G^M(\varepsilon')\rangle$ от $\langle G^M(\varepsilon)\rangle\langle G^M(\varepsilon')\rangle$ обусловлено примесями, входящими одновременно и в $G^M(\varepsilon)$, и в $G^M(\varepsilon')$.

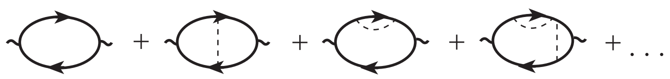


Рис. 9.14

Однако, оказывается, что для точечных $\delta$-примесей *любые* такие диаграммы с непересекающимися примесными линиями оказываются равными нулю. Причина этого заключается в том, что для точечных примесей величина диаграммы не зависит от передаваемого по примесной линии импульса. Поэтому, соединив две функции Грина на рис. 9.13 штриховой линией, мы «развязываем» импульсы в вершинах диаграммы. В результате, поскольку токовая вершина нечетна по импульсу, любая такая диаграмма обращается в нуль при интегрировании по импульсам. Итак, в задаче о проводимости в приближении непересекающихся примесных линий отличие $\langle G^M(\varepsilon)G^M(\varepsilon')\rangle$ от $\langle G^M(\varepsilon)\rangle\langle G^M(\varepsilon')\rangle$ можно не учитывать.

Заметим, что с точно такой же ситуацией мы уже встречались в задаче 14, где точечность рассеивателя приводила к занулению диаграмм с разделенными токовыми вершинами при интегрировании по импульсам.

При этом существенно, что рассеяние чисто изотропное, т. е. при рассеянии отсутствует какая-либо корреляция между направлениями начальной и конечной скорости. Поэтому описанное упрощение имеет место только для точечных примесей, рассеивающих в $s$-канале, когда $\tau_{\rm tr} = \tau$. Для примесей, рассеивающих не только в $s$-канале, эти два времени не равны. В этом случае приходится суммировать лестницу, напоминающую диффузионную (см. рис. 9.7), но с векторными вершинами, в результате чего и происходит замена $\tau$ на $\tau_{\rm tr}$.

Учитывая это обстоятельство, мы видим, что усреднение двух функций Грина в (9.57) расцепляется в произведение средних:

$$\langle \Pi_{\alpha\beta}(i\omega_n)\rangle = e^2 T\sum_{\varepsilon_k}\mathrm{Tr}\left(\langle \widehat{G}^M(i\varepsilon_k+i\omega_n)\rangle \widehat{v}_\alpha \langle \widehat{G}^M(i\varepsilon_k)\rangle \widehat{v}_\beta\right). \qquad (9.58)$$

Функция Грина, усредненная по беспорядку, согласно (9.17), имеет вид $\langle G(\varepsilon_k,\mathbf{p})\rangle = \left(i\varepsilon_k - \xi(\mathbf{p}) + \dfrac{i}{2\tau}\,\mathrm{sgn}\,\varepsilon_k\right)^{-1}$. Поэтому выражение (9.58) можно записать так:

$$\langle \Pi_{\alpha\beta}(i\omega_n)\rangle = e^2\, T\sum_{\varepsilon_k}\int \frac{(p_\alpha/m)(p_\beta/m)}{(i\widetilde{\varepsilon}'_k - \xi(\mathbf{p}))(i\widetilde{\varepsilon}_k - \xi(\mathbf{p}))}\,\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}, \qquad (9.59)$$

где $\widetilde{\varepsilon}_k = \varepsilon_k + \omega_n + \dfrac{1}{2\tau}\,\mathrm{sgn}(\varepsilon_k+\omega_n)$, $\widetilde{\varepsilon}_k = \varepsilon_k + \dfrac{1}{2\tau}\,\mathrm{sgn}\,\varepsilon_k$.

Прежде чем приступить к вычислению выражения (9.59), проверим, что выполняется тождество $\langle\Pi_{\alpha\beta}(0)\rangle = -(ne^2/m)\,\delta_{\alpha\beta}$. Для этого воспользуемся соотношением

$$\mathbf{p}\left\langle \widehat{G}^M(i\varepsilon,\mathbf{p})\right\rangle^2 = m\,\nabla_{\mathbf{p}}\left\langle \widehat{G}^M(i\varepsilon,\mathbf{p})\right\rangle, \qquad (9.60)$$

и представим выражение (9.59), взятое при $\varepsilon'_k = \varepsilon_k$, в таком виде:

$$\langle \Pi_{\alpha\beta}(0)\rangle = \frac{e^2}{m}\,T\sum_{\varepsilon_k}\int p_\alpha \nabla_{p_\beta}\left\langle \widehat{G}^M(i\varepsilon_k,\mathbf{p})\right\rangle \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}. \qquad (9.61)$$

Интеграл по $d^3\mathbf{p}$ возьмем по частям, перенеся действие $\nabla_{p_\beta}$ на $p_\alpha$:

$$\langle \Pi_{\alpha\beta}(0)\rangle = -\frac{e^2}{m}\,\delta_{\alpha\beta}\,T\sum_{\varepsilon_k}\int \left\langle \widehat{G}^M(i\varepsilon_k,\mathbf{p})\right\rangle \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}. \qquad (9.62)$$

Учитывая известное соотношение (2.12) между плотностью частиц и функцией Грина, получаем требуемое тождество.

Перейдем теперь к вычислению выражения (9.59). С технической точки зрения, наиболее просто было бы проинтегрировать вначале по $d^3\mathbf{p}$. Однако формально этот интеграл расходится при $|\mathbf{p}| \gg p_0$. Чтобы обойти эту трудность, рассмотрим разность $\langle\Pi_{\alpha\beta}(i\omega_n)\rangle - \langle\Pi_{\alpha\beta}(0)\rangle$ и представим ее в таком виде:

$$\frac{e^2}{m^2}\,T\sum_{\varepsilon_k}\int p_\alpha p_\beta\left[\left\langle \widehat{G}^M(i\varepsilon_k+i\omega_n,\mathbf{p})\right\rangle - \right.$$
$$\left. - \left\langle \widehat{G}^M(i\varepsilon_k,\mathbf{p})\right\rangle\right]\left\langle \widehat{G}^M(i\varepsilon_k,\mathbf{p})\right\rangle \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}. \qquad (9.63)$$



В этом выражении интеграл по $d^3\mathbf{p}$ сходится, и более того, как нетрудно видеть, его величина определяется малой окрестностью ферми-поверхности: $\delta\xi \approx \max[\omega_n, \tau^{-1}]$. Поэтому в (9.63) можно перейти к интегрированию по $\xi$, заменив среднее по углам от $p_\alpha p_\beta$ на $\dfrac{1}{3}p_0^2\delta_{\alpha\beta}$. Интеграл по $\xi$ от двух слагаемых в (9.63) можно вычислять по отдельности. (Отмеченная выше расходимость при больших $\mathbf{p}$ не имеет отношения к вкладу окрестности ферми-поверхности $\xi \approx \hbar/\tau$, который учитывается интегрированием по $\xi$.)

Взяв интеграл по $\xi$ от первого слагаемого в (9.63), получаем

$$\frac{\pi}{3}e^2 v_F^2 \nu_0\, T\sum_{\varepsilon_k}\frac{\mathrm{sgn}\,\varepsilon'_k - \mathrm{sgn}\,\varepsilon_k}{\widetilde{\varepsilon}'_k - \widetilde{\varepsilon}_k}, \qquad (9.64)$$

где $\widetilde{\varepsilon}'_k$ и $\widetilde{\varepsilon}_k$ имеют тот же смысл, что и в (9.59). Нетрудно видеть, что интеграл по $\xi$ от второго слагаемого в (9.63) обращается в нуль. Наконец, вычисляя тривиальную сумму по $\varepsilon_k$, имеем

$$\langle\Pi_{\alpha\beta}(i\omega_n)\rangle - \langle\Pi_{\alpha\beta}(0)\rangle = \frac{ne^2}{m}\,\frac{|\omega_n|}{\omega_n + 1/\tau\,\mathrm{sgn}\,\omega_n}. \qquad (9.65)$$

Мы воспользовались здесь тем, что $\nu_0 v_F^2/3 = n/m$.

Чтобы найти проводимость, воспользуемся доказанным тождеством (9.16). Поскольку векторный потенциал $\mathbf{A}$ и электрическое поле $\mathbf{E}$ связаны соотношением $\mathbf{E} = -\dfrac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}$, выражение для проводимости можно записать в таком виде:

$$\sigma_{\alpha\beta}(i\omega_n) = \frac{1}{\omega_n}\left[\Pi_{\alpha\beta}(i\omega_n) - \Pi_{\alpha\beta}(0)\right]. \qquad (9.66)$$

Подставляя в (9.66) найденный результат (9.65), получаем

$$\sigma_{\alpha\beta}(i\omega_n) = \frac{ne^2\,\delta_{\alpha\beta}}{m(|\omega_n| + 1/\tau)}. \qquad (9.67)$$

Для перехода к функциям вещественной частоты надо выполнить аналитическое продолжение с верхней мнимой полуоси: $i\omega_n \to \omega$. В результате получаем искомую формулу Друде (9.19).

Обратим внимание на то, что результат не зависит от температуры. Этого и следовало ожидать, поскольку проводимость — одночастичный эффект. Поэтому, если время рассеяния $\tau$ не зависит от энергии, проводимость не должна зависеть от теплового размытия фермиевской ступеньки.

**52.** Нам необходимо усреднить коррелятор плотность-плотность (9.9) по беспорядку. На этот раз, в отличие от предыдущей задачи, уже нельзя игнорировать отличие $\langle G^M G^M\rangle$ от $\langle G^M\rangle\langle G^M\rangle$. (Дело в том, что теперь мы имеем дело не с векторными вершинами, как при вычислении коррелятора ток–ток, а со скалярными, соответствующими плотности частиц.) В главном порядке по параметру $(p_0 l)^{-1}$ интересующее нас среднее дается последовательностью лестничных диаграмм, показанной на рис. 9.7.

Чтобы просуммировать эти диаграммы, обратим внимание на то, что каждая лестничная диаграмма разбивается на отдельные блоки («пузырьки»), окруженные с двух сторон линиями примесей («перекладинами»). При этом интегрирования по импульсам в каждом блоке независимы, так как примесная линия не зависит от переданного импульса. Заметим также, что из-за закона сохранения импульса разность импульсов в каждом блоке постоянна и равна импульсу $\mathbf{q}$, входящему в вершину. Кроме того, поскольку рассеяние на примесях упругое, частоты во всех ступенях лестницы попарно совпадают. Иными словами, независимо от числа перекладин, интегрирование происходит всего по одной частоте. Рассмотрим сначала первый член суммы («пузырек без перекладин»). Выражение для него выглядит так:

$$T\sum_{\varepsilon_k}\int\langle G^M(i\varepsilon_k+i\omega_n,\mathbf{p}_+)\rangle\langle G^M(i\varepsilon_k,\mathbf{p}_-)\rangle\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}, \tag{9.68}$$

где $\varepsilon_k=(2k+1)\pi T$, $\omega_n=2n\pi T$, $\mathbf{p}_\pm=\mathbf{p}\pm\frac{1}{2}\mathbf{q}$, а функции Грина, усредненные по беспорядку, имеют стандартный вид:

$$\langle G^M(i\varepsilon,\mathbf{p})\rangle=\frac{1}{i\varepsilon-\xi(\mathbf{p})+(i/2\tau)\,\mathrm{sgn}\,\varepsilon}, \tag{9.69}$$

где, как обычно, $\xi(\mathbf{p})=\mathbf{p}^2/2m-\mu$. При интегрировании по $\mathbf{p}$, как нетрудно видеть, выражение (9.68) дает существенно различные результаты, в зависимости от того, находятся ли полюсы двух гриновских функций по одну или по разные стороны от вещественной оси.

Рассмотрим этот вопрос более подробно. Воспользуемся известной связью мацубаровских функций с запаздывающими и опережающими функциями Грина:

$$G^M(i\varepsilon_k,\mathbf{p})\theta(\varepsilon_k)G_R(i\varepsilon_k,\mathbf{p})+\theta(-\varepsilon_k)G_A(i\varepsilon_k,\mathbf{p})= \\ =\begin{cases}G_R(i\varepsilon_k,\mathbf{p}) & \text{при } \varepsilon_k>0,\\ G_A(i\varepsilon_k,\mathbf{p}) & \text{при } \varepsilon_k<0.\end{cases} \tag{9.70}$$

При вычислении выражения (9.68), в зависимости от относительного знака частот $\varepsilon_k$ и $\varepsilon_k+\omega_n$, возникает два принципиально разных случая, которые следует рассматривать по-отдельности.

Знак частоты определяет, будет ли соответствующая гриновская функция запаздывающей или опережающей. В случае, когда знаки $\varepsilon_k$ и $\varepsilon_k+\omega_n$ одинаковы, возникают средние вида $\langle G_RG_R\rangle$ и $\langle G_AG_A\rangle$. Они дают так называемый *статический* вклад в коррелятор, не обладающий дисперсией при $\omega\tau\approx 1$ и $|\mathbf{q}|l\approx 1$. В случае же различных знаков частот $\varepsilon_k$ и $\varepsilon_k+\omega_n$, получаются средние вида $\langle G_RG_A\rangle$ и $\langle G_AG_R\rangle$. Они дают так называемый *кинетический* вклад в коррелятор, обладающий существенной дисперсией при $\omega\tau\approx 1$ и $|\mathbf{q}|l\approx 1$.

Обоснование утверждения о характере частотной дисперсии статического и кинетического корреляторов будет дано ниже. Здесь же приведем следующее простое соображение, касающееся пространственной



дисперсии. В координатном представлении

$$\langle G_R(\mathbf{r})\rangle^2\sim\exp\left(2ip_0|\mathbf{r}|-|\mathbf{r}|/l\right),\quad \langle G_A(\mathbf{r})\rangle^2\sim\exp\left(-2ip_0|\mathbf{r}|-|\mathbf{r}|/l\right). \tag{9.71}$$

В то же время $\langle G_A(\mathbf{r})\rangle\langle G_R(\mathbf{r})\rangle\sim\exp(-|\mathbf{r}|/l)$, т. е. медленно затухает, не осциллируя. Поэтому пространственная дисперсия статического коррелятора должна иметь место при $|\mathbf{q}|\approx p_0^{-1}$, а динамического — при $|\mathbf{q}|\approx 1/l$.

Перейдем к вычислению.

1. Рассмотрим сначала ситуацию, когда $\mathrm{sgn}\,\varepsilon_k=\mathrm{sgn}(\varepsilon_k+\omega_n)$. В этом случае, поскольку полюсы выражения (9.68) находятся по одну сторону от вещественной оси, контур интегрирования по $\xi$ можно деформировать так, чтобы он проходил далеко от полюсов. Такой интеграл набирается, в основном, в области $\xi\approx E_F$. Поскольку нас интересуют $|\omega_n|\ll E_F$ и $|\mathbf{q}|\ll p_0$, а раздвижка полюсов в выражении (9.68) есть $i\omega_n-\mathbf{kv}$, этой раздвижкой можно вообще пренебречь.

Поэтому достаточно рассмотреть выражение (9.68) при $\omega_n=0$ и $\mathbf{q}=0$. В этом случае можно воспользоваться тождеством $\langle G(i\varepsilon,\mathbf{p})\rangle^2=-\partial\langle G(i\varepsilon,\mathbf{p})\rangle/\partial\mu$, где подразумевается, что при дифференцировании по $\mu$ можно пренебречь зависимостью $\tau$ от $\mu$. Это тождество позволяет представить выражение (9.68) в виде

$$\mathcal{K}_0=-\frac{\partial}{\partial\mu}T\sum_{\varepsilon_k}\int\langle G^M(i\varepsilon_k,\mathbf{p})\rangle\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}. \tag{9.72}$$

Заметим теперь, что сумма по $\varepsilon_k$ и интеграл по $\mathbf{p}$ дают среднюю плотность частиц в системе. Поэтому выражение (9.72), с точностью до знака, есть просто плотность состояний: $\mathcal{K}_0=-\nu=-\partial n/\partial\mu$. Такой результат можно было бы предвидеть, поскольку в статическом пределе $\omega=0$ коррелятор плотность–плотность должен давать сжимаемость, т. е. термодинамическую плотность состояний.

2. Теперь рассмотрим случай $\mathrm{sgn}\,\varepsilon_k=-\mathrm{sgn}(\varepsilon_k+\omega_n)$. При этом, поскольку полюсы подынтегрального выражения в (9.68) находятся по разные стороны вещественной оси, интеграл (9.68) определяется малой окрестностью поверхности Ферми.

Например, пусть $\omega_n>0$ и $-\omega_n<\varepsilon_k<0$. Для дальнейшего полезно рассмотреть выражение (9.68) без суммирования по $\varepsilon_k$:

$$B_{RA}(\omega_n,\mathbf{q})=\int G_R(i\varepsilon_k+i\omega_n,\mathbf{p}_+)\,G_A(i\varepsilon_k,\mathbf{p}_-)\,\frac{d^3p}{(2\pi)^3}. \tag{9.73}$$

Вычислим интеграл по $\xi$:

$$B_{RA}(\omega_n,\mathbf{q})= \\ =\frac{\nu_0}{8\pi^2}\iint\frac{do\,d\xi}{(i\varepsilon_k+i\omega_n-\xi-\mathbf{qv}/2+i/2\tau)(i\varepsilon_k-\xi+\mathbf{qv}/2-i/2\tau)}= \\ =\frac{\nu_0}{2}\int\frac{do}{\omega+i\mathbf{qv}+1/\tau}.$$

Аналогично, при $\omega_n < 0$ и $0 < \varepsilon_k < -\omega_n$ выражение (9.72), непросуммированное по $\varepsilon_k$, принимает такой вид

$$B_{AR}(\omega_n, \mathbf{q}) = \int G_A(i\varepsilon_k + i\omega_n, \mathbf{p}_+)\, G_R(i\varepsilon_k, \mathbf{p}_-)\, \frac{d^3p}{(2\pi)^3} = \\ = \frac{\nu_0}{2}\int \frac{do}{-\omega_n - i\mathbf{qv} + 1/\tau}. \quad (9.74)$$

Выполняя суммирование по $\varepsilon_k$, получаем $\dfrac{|\omega_n|}{2\pi} B(\omega_n, \mathbf{q})$, где

$$B(\omega_n, \mathbf{q}) = \begin{Bmatrix} B_{RA}(\omega_n, \mathbf{q}) & \text{при} & \omega_n > 0 \\ B_{AR}(\omega_n, \mathbf{q}) & \text{при} & \omega_n < 0 \end{Bmatrix} = \\ = \frac{\nu_0}{2}\int \frac{do}{|\omega_n| + i\mathbf{qv}\,\mathrm{sgn}\,\omega_n + 1/\tau}. \quad (9.75)$$

Теперь все готово для того, чтобы найти сумму лестничного ряда диаграмм, изображенных на рис. 9.7. Примесная линия («перекладина лестницы») дается выражением $nu_0^2 = 1/(2\pi\nu_0\tau)$.

B = 

Рис. 9.15

Поскольку все ступени лестницы совершенно одинаковы, удобно рассмотреть всего одну ступень, изображенную диаграммой на рис. 9.15. (Мы не включаем примесные линии в определение ступени.) Нетрудно видеть, что получающееся выражение оказывается точно таким же, как рассмотренное выше выражение для первой ступени, непросуммированное по $\varepsilon_k$. Поэтому, как и выше, рассмотрим по отдельности статический и кинетический случаи, когда знаки $\varepsilon_k + \omega_n$ и $\varepsilon_k$ совпадают, и когда они различны.

В первом случае, как нетрудно видеть, суммирование лестничного ряда дает несущественную поправку к первому члену $\mathcal{K}_0 = -\nu$, полученному выше. Действительно, если знаки $\varepsilon_k + \omega_n$ и $\varepsilon_k$ совпадают, то полюсы всех гриновских функций находятся по одну и ту же сторону вещественной оси. Поэтому, как и при рассмотрении первого члена ряда, можно положить $\omega_n = 0$ и $\mathbf{q} = 0$. Тогда весь ряд сворачивается в производную от функции Грина по химическому потенциалу $\mu$. (Сумма членов лестничного ряда, начиная со второго, дает вклад, связанный с зависимостью амплитуды рассеяния на примеси от энергии $\mu$, которым мы пренебрегли выше.)

А вот во втором случае, когда знаки $\varepsilon_k + \omega_n$ и $\varepsilon_k$ различны, *все* члены лестничного ряда, включая произвольно далекие, оказываются одинаково важными. Чтобы понять, почему так получается, рассмотрим сначала случай $\mathbf{q} = 0$, и покажем, что сумма лестничного ряда в точности сокращает вклад $-\nu$, рассмотренный выше.

Действительно, при $\mathbf{q} = 0$ одна ступень лестницы есть $B(\omega_n)_{\mathbf{q}=0} = 2\pi\nu_0/(|\omega_n| + 1/\tau)$. Весь же ряд в целом дается суммой геометрической прогрессии:



$$\mathcal{K}_1(\omega_n,\, \mathbf{q} = 0) = 2\,\frac{|\omega_n|}{2\pi}\left[\frac{B}{2\pi\nu_0\tau} + \frac{B^2}{(2\pi\nu_0\tau)^2} + \cdots\right] = \\ = \frac{|\omega_n|}{\pi}\,\frac{B}{1 - B/2\pi\nu_0\tau} = \nu. \quad (9.76)$$

Тождественное сокращение $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_1 = 0$, получающееся при $\mathbf{q} = 0$, имеет простой физический смысл. Коррелятор плотность–плотность при $\mathbf{q} = 0$ и $\omega \neq 0$ описывает отклик электронной плотности на независящий от координат переменный внешний потенциал. Очевидно, что поскольку полное число частиц сохраняется, а внешний потенциал один и тот же во всех точках пространства, отклика плотности в ответ на такое возмущение быть не должно. Поэтому указанное сокращение выражает сохранение числа частиц в системе.

Теперь повторим вычисление лестничного ряда при $\mathbf{q} \neq 0$. Выражение $B(\omega_n, \mathbf{q})$ интересует нас при $|\omega_n|\tau$, $|\mathbf{q}|l \ll 1$, и поэтому его можно разложить:

$$B(\omega_n, \mathbf{q}) = \frac{\nu_0\tau}{2}\int \frac{do}{1 + |\omega_n|\tau + i\mathbf{qv}\tau\,\mathrm{sgn}\,\omega_n} = \\ = \frac{\nu_0\tau}{2}\int\left[1 - |\omega_n|\tau - i\mathbf{vq}\tau\,\mathrm{sgn}\,\omega_n - (\mathbf{vq})^2\tau^2\right] do = \\ = 2\pi\nu_0\tau\left(1 - |\omega_n|\tau - \frac{1}{3}v_F^2 q^2\tau^2\right) = 2\pi\nu_0\tau\left[1 - \tau(|\omega_n| + Dq^2)\right], \quad (9.77)$$

где $D = v_F^2\tau/3$ — коэффициент диффузии.

Как и выше, при $\mathbf{q} \neq 0$ вычисление ряда сводится к суммированию геометрической прогрессии:

$$\mathcal{K}_1(\omega, \mathbf{q}) = 2\,\frac{|\omega| B}{2\pi(1 - B/2\pi\nu_0\tau)} = \frac{\nu|\omega_n|}{|\omega_n| + D\mathbf{q}^2}.$$

Полный ответ для коррелятора плотность–плотность дается суммой двух слагаемых:

$$\mathcal{K}(\omega_n, \mathbf{q}) = \mathcal{K}_0(\omega_n, \mathbf{q}) + \mathcal{K}_1(\omega_n, \mathbf{q}) = -\frac{\nu\, D\mathbf{q}^2}{|\omega_n| + D\mathbf{q}^2}, \quad (9.78)$$

что и требовалось показать.

Выражение для $B(\omega_n, \mathbf{q})$ можно вычислить точно:

$$B(\omega_n, \mathbf{q}) = \frac{\pi\nu_0\,\mathrm{sgn}\,\omega_n}{i|\mathbf{q}|v_F}\,\ln\frac{1 + |\omega_n|\tau + i|\mathbf{q}|l\,\mathrm{sgn}\,\omega_n}{1 + |\omega_n|\tau - i|\mathbf{q}|l\,\mathrm{sgn}\,\omega_n}. \quad (9.79)$$

Точное значение $B(\omega_n, \mathbf{q})$ оказывается полезным в режиме баллистической динамики: $\omega\tau \geqslant 1$ или $|\mathbf{q}|l \geqslant 1$. Обратим внимание, что при таких $\omega$ и $q$ величина $B/(2\pi\nu_0\tau)$ не близка к единице, и поэтому члены лестничного ряда достаточно быстро убывают. Из-за этого ряд оказывается быстро сходящимся, и существенный вклад дает только первый член.

Остановимся на соответствии между диффузионной лестницей и классической картиной диффузии. Из проделанных вычислений ясно, что отдельная ступень лестницы $B(\omega_n, \mathbf{q})$ соответствует траектории частицы, движущейся по прямой между двумя примесями. Чтобы продемонстрировать это более явно, перейдем от мацубаровских частот и времени к обычным. Выражение для $B(\omega, \mathbf{q})$ может быть получено из (9.79) аналитическим продолжением $i\omega_n \to \omega$ $(n > 0)$:

$$B(\omega, \mathbf{q}) = \frac{\pi\nu_0}{i|\mathbf{q}|v_F} \ln\frac{1 - i\omega\tau + i|\mathbf{q}|l}{1 - i\omega\tau - i|\mathbf{q}|l}. \qquad (9.80)$$

Теперь запишем величину $B(\omega, \mathbf{q})$ в координатно-временном представлении. Сделать это можно, либо используя выражения (9.18) для гриновских функций в координатном представлении, либо взяв фурье-образ точного выражения (9.80):

$$B(t, \mathbf{r}) = \frac{\nu_0}{2|\mathbf{r}|^2}\,\delta(|\mathbf{r}| - v_F t)\, e^{-|\mathbf{r}|/l}. \qquad (9.81)$$

Нетрудно видеть, что это есть просто вероятность того, что частица пролетит время $t$ после столкновения с примесью, не столкнувшись с другими примесями. Величина $B(t, \mathbf{r})$ правильно нормирована:

$$\int B(t, \mathbf{r})\, d^3r = 2\pi\nu_0\, e^{-t/\tau}. \qquad (9.82)$$

Поэтому величины $\tau$ и $l$, введенные выше, есть в точности классические время и длина свободного пробега.

Отметим любопытное формальное сходство между приведенным выше выводом $\mathcal{K}(\omega, \mathbf{q})$ и вычислением распределения вероятностей для случайных блужданий в задаче 9. Геометрическая прогрессия, которую приходится суммировать и в том, и в другом случае, соответствует сумме по случайным путям с различным числом шагов. Каждому шагу ставится в соответствие «одношаговый формфактор»: $B(\omega, \mathbf{q})$ — в случае диффузии, $\frac{z}{n}(\cos q_1 + \ldots + \cos q_n)$ — в случае блужданий по $n$-мерной решетке, причем видно, что $z$ имеет смысл $e^{i\omega}$. (Более точно, $z = e^{i\omega\tau_0}$, где $\tau_0 = 1$ — время, за которое делается один шаг.) Чтобы перейти к диффузионному пределу в задаче о блужданиях по решетке, рассмотрим $\omega \ll 1$ и $q_i \ll 1$. При таких $\omega$ и $q_i$ можно просто разложить знаменатель в выражении (2.16) для производящей функции:

$$G(z, q) = \frac{1}{1 - e^{i\omega}(\cos q_1 + \ldots + \cos q_n)/n} = \\ = \frac{1}{1 - (1 + i\omega)(n - (q_1^2 + \ldots + q_n^2)/2)/n} = \frac{1}{-i\omega + q^2/2n}. \qquad (9.83)$$

Таким образом, коэффициент диффузии для блужданий по $n$-мерной решетке равен $(2n)^{-1}$.

**53.** Сформулируем задачу о частице, которая при $t < 0$ находилась в начале координат, а при $t > 0$ стала двигаться свободно, следующим образом. Рассмотрим потенциальную яму $V(\mathbf{r})$ с центром в начале координат, существующую при $-\infty < t < 0$, а затем мгновенно исчезающую. Основное состояние ферми-системы характеризуется избыточной плотностью, притянутой ямой («бугорком»). После выключения потенциала эта плотность начинает рассасываться, диффундируя в поле примесей.



Может показаться, что более естественно — рассмотреть эволюцию во времени состояния $\psi^+(\mathbf{r} = 0, t = 0)|0\rangle$, получающегося добавлением к невозмущенному ферми-морю одной частицы в начале координат в момент $t = 0$. При этом, однако, энергия добавленной частицы имеет очень широкий спектр и, вообще говоря, не близка к уровню Ферми. В результате, поскольку выбранный источник имеет большую немонохроматичность, при такой постановке задачи интересующий нас эффект, хотя и существует, оказывается весьма малым по величине.

Отклик ферми-системы на потенциал, зависящий от координат и времени, как мы выяснили в задаче 52, дается сверткой коррелятора плотность–плотность с потенциалом. В данном случае удобно воспользоваться координатно–частотным представлением, в котором возмущающий ферми-систему потенциал имеет вид $-iV(\mathbf{r})/(\omega - i0)$. Нам потребуются выражения для запаздывающей и опережающей функций Грина:

$$\begin{gathered} G_R(\varepsilon, \mathbf{r}) = -\frac{m}{2\pi r}\exp\left(ip_\varepsilon r - \frac{r}{2l}\right), \\ G_A(\varepsilon, \mathbf{r}) = -\frac{m}{2\pi r}\exp\left(-ip_\varepsilon r - \frac{r}{2l}\right), \quad p_\varepsilon = p_0 + \frac{\varepsilon}{v_F}, \end{gathered} \qquad (9.84)$$

которые нетрудно получить из выражения (9.18) для усредненной причинной функции, если вспомнить, что $G(r, \varepsilon > 0) = G_R(r, \varepsilon)$ и $G(r, \varepsilon < 0) = G_A(r, \varepsilon)$.

При вычислении отклика, как и в задаче 52, следует различать статические и кинетические вклады, соответствующие средним двух одинаковых функций $\langle G_R G_R\rangle$ и $\langle G_A G_A\rangle$ или двух различных функций $\langle G_R G_A\rangle$ и $\langle G_A G_R\rangle$. Нетрудно видеть, что статический вклад описывает часть плотности, существовавшую в то время, когда потенциал ямы был включен, но не описывает рассасывание плотности на временах $t \gg \varepsilon_F^{-1}$. Динамический же вклад, наоборот, описывает только динамику на временах $t \gg \varepsilon_F^{-1}$ после выключения ямы.

Поэтому при усреднении коррелятора плотность–плотность по беспорядку нам будет достаточно учесть только динамический вклад. В главном порядке по $(p_0 l)^{-1}$ — это лестничные графики, рассмотренные в задаче 52 (см. рис. 9.7). В следующем же порядке по $(p_0 l)^{-1}$ возникает еще одна последовательность диаграмм — веерные графики, показанные на рис. 9.8. Рассмотрим их более подробно.

**а.** Пусть начальная и конечная точки совпадают. Тогда мы можем нарисовать лестничный и веерный графики, проходящие через одни и те же примеси (с номерами от 1 до $N \geqslant 2$), как показано на рис. 9.16. Здесь буквы $R$ и $A$ обозначают запаздывающую и опережающую функции Грина соответственно. Сравнивая, мы видим, что в обоих графиках берется произведение одних и тех же величин. Единственное отличие состоит в порядке аргументов в $G_A(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$. Но поскольку $G_A$ зависит только от $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$, порядок $\mathbf{r}_i$ и $\mathbf{r}_j$ несуществен, и значит графики в точности равны. Поэтому, с точностью до отмеченного в условии задачи

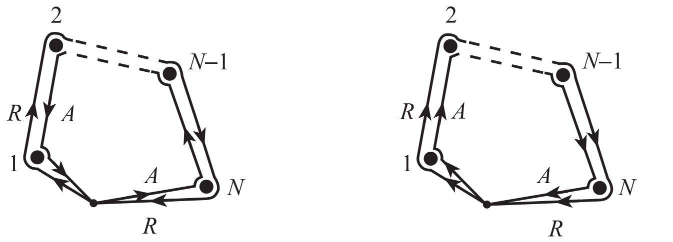


Рис. 9.16

несоответствия в первых двух членах ($N = 0, 1$), веерный и лестничный ряды совпадают.

**б.** Теперь раздвинем начальную (0) и конечную ($\mathbf{r}$) точки (см. рис. 9.17). В этом случае отличие веерного графика от лестничного

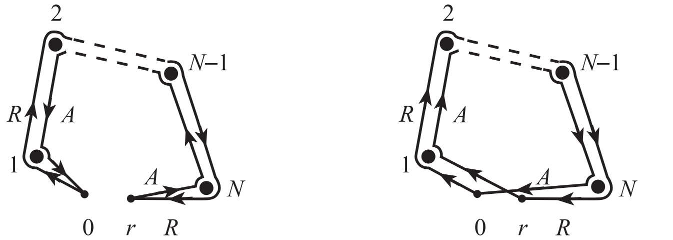


Рис. 9.17

заключается в том, что аргументы функций $G_A$ на концах другие. Заметим, что части графиков от 1-й примеси до $N$-й есть в точности диффузионная лестница. Следовательно, как лестничный график, так и веерный можно представить в виде свертки диффузионного пропагатора, взятого в точках $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_N$, с четырьмя функциями Грина. Поскольку диффузионный пропагатор медленно меняется на расстояниях порядка длины свободного пробега, то достаточно просто проинтегрировать произведение функций Грина. Поэтому получаем, что вклады концов лестничного и веерного графиков соответственно равны [13])

$$W_L(\mathbf{r}) = \iint G_R(\mathbf{r}_1)\, G_A(\mathbf{r}_1)\, G_R(\mathbf{r}_N - \mathbf{r})\, G_A(\mathbf{r}_N - \mathbf{r})\, d^3\mathbf{r}_1\, d^3\mathbf{r}_N, \quad (9.85)$$

$$W_F(\mathbf{r}) = \iint G_R(\mathbf{r}_1)\, G_A(\mathbf{r}_N)\, G_R(\mathbf{r}_N - \mathbf{r})\, G_A(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})\, d^3\mathbf{r}_1\, d^3\mathbf{r}_N, \quad (9.86)$$

причем все запаздывающие функции Грина берутся при энергии $\varepsilon + \omega/2$, а опережающие — при $\varepsilon - \omega/2$.

[13]) Индексы $L$ и $F$ происходят от английских слов «ladder» и «fan».



Нас интересуют возвраты на больших временах $t \gg \tau$, т. е. при $\omega\tau \ll 1$. Динамика на таких временах имеет диффузионный характер. Это позволяет пренебречь зависимостью функций Грина в (9.85) и (9.86) от $\omega$. Дело в том, что, как будет видно из дальнейших вычислений, все четыре расстояния

$$|\mathbf{r}_1|, \quad |\mathbf{r}_N|, \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|, \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}_N| \quad (9.87)$$

оказываются порядка длины пробега $l$, которая при $\omega\tau \ll 1$ много меньше диффузионной длины $\sqrt{D/\omega}$.

Поэтому полагаем в (9.85) и (9.86) частоту $\omega = 0$ и, пользуясь выражениями (9.84), находим вклад концов лестничного графика:

$$W_L(\mathbf{r}) = \left(\frac{m}{2\pi}\right)^4 \left(\int \frac{e^{-|\mathbf{r}|/l}}{|\mathbf{r}|^2}\, d^3\mathbf{r}\right)^2 = (4\pi)^2 \left(\frac{m}{2\pi}\right)^4 l^2. \quad (9.88)$$

Веерные графики представляют интерес в области, когда расстояние между начальной и конечной точкой порядка $p_0^{-1}$, т. е. при $|\mathbf{r}| \ll l$. Тогда, поскольку характерные $|\mathbf{r}_1|$, $|\mathbf{r}_N|$ определяются медленно убывающими множителями $\exp(-|\mathbf{r}_N|/l)$, $\exp(-|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|/l)$, и т. п., имеет место соотношение $|\mathbf{r}_1|, |\mathbf{r}_N| \gg |\mathbf{r}|$. Поэтому можно разложить расстояния между рассматриваемыми точками по малому $\mathbf{r}$:

$$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}| = |\mathbf{r}_1| - \mathbf{r}\mathbf{n}_1, \quad |\mathbf{r}_N - \mathbf{r}| = |\mathbf{r}_N| - \mathbf{r}\mathbf{n}_N, \quad (9.89)$$

где $\mathbf{n}_1 = \mathbf{r}_1/|\mathbf{r}_1|$, $\mathbf{n}_N = \mathbf{r}_N/|\mathbf{r}_N|$ — единичные векторы. Таким образом, получаем

$$W_F(\mathbf{r}) = \left(\frac{m}{2\pi}\right)^4 \iint \frac{\exp\left[ip_0\mathbf{r}(\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_N) - |\mathbf{r}_1|/l - |\mathbf{r}_N|/l\right]}{|\mathbf{r}_1|^2 |\mathbf{r}_N|^2}\, d^3\mathbf{r}_1\, d^3\mathbf{r}_N. \quad (9.90)$$

Используя формулу

$$\int e^{i\mathbf{a}\mathbf{n}} do_{\mathbf{n}} = 4\pi\, \frac{\sin a}{a}, \quad (9.91)$$

интегрируем в (9.90) по направлениям:

$$W_F(\mathbf{r}) = (4\pi)^2 \left(\frac{m}{2\pi}\right)^4 \left(\frac{\sin p_0 r}{p_0 r}\right)^2 \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty e^{-|\mathbf{r}_1|/l - |\mathbf{r}_N|/l}\, d|\mathbf{r}_1|\, d|\mathbf{r}_N|. \quad (9.92)$$

Вычисляя оставшиеся интегралы по $|\mathbf{r}_1|$ и $|\mathbf{r}_N|$ и сравнивая результат с (9.88), находим относительную величину веерного и лестничного вкладов:

$$\frac{W_F(\mathbf{r})}{W_L(\mathbf{r})} = \left(\frac{\sin X}{X}\right)^2, \quad X = p_0|\mathbf{r}|. \quad (9.93)$$

Характерный масштаб, на котором интерференционная поправка оказывается важна, равен $\hbar/p_0$, в полном соответствии с изложенными в условии качественными рассуждениями. Отметим сходство между полученным ответом и формулой для распределения интенсивности света при фраунгоферовской дифракции на щели. Это сходство лишний раз подчеркивает интерференционную природу рассматриваемого явления.

**54.** Как мы видели в решении предыдущей задачи, суммы веерных и лестничных диаграмм отличаются несущественно, а именно, только первыми двумя членами. Поэтому в дальнейшем всегда подразумевается, что веерные графики преобразованы (развернуты) так, что получается лестничный ряд. Рассмотрим сумму соответствующих лестничных диаграмм $\mathscr{C}(\omega, \mathbf{q})$, так называемый *куперон*[14]:

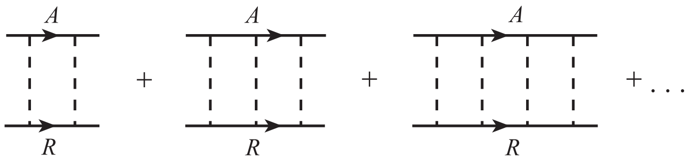


Рис. 9.18

Эта лестница напоминает диффузионную лестницу из задачи 52, и, как мы увидим, дается похожим выражением (9.99). Это не случайно: как функции координат, куперовская и диффузионная лестницы совпадают, если система обладает инвариантностью по отношению к обращению времени. В самом деле, если мы обратим одну из электронных линий на рис. 9.18, то мы получим диффузионную лестницу[15] (рис. 9.7). Обратим внимание на то, что в куперone закон сохранения импульса приводит к постоянству *суммы* импульсов в каждом блоке диаграммы, и куперон оказывается функцией суммы импульсов $\mathbf{q}$ и внешней частоты $\omega$. Из дальнейшего будет видно, что главный вклад в $\mathscr{C}(\omega, \mathbf{q})$ происходит от малых импульсов $|\mathbf{q}|l \ll 1$.

Куперонную лестницу нетрудно связать с поправкой к проводимости. Для этого воспользуемся формулой (9.66) из решения задачи 51, связывающей проводимость с коррелятором $\Pi(i\omega_n)$. Как мы выяснили в задаче 51, проводимость определяется кинетическим вкладом в $\Pi(i\omega_n)$, продолженным с дискретных мнимых частот $\omega_n \geqslant 0$ (см. также задачу 52). Поэтому запишем кинетический вклад как среднее от произведения запаздывающей и опережающей функций Грина и усред-

[14] Величину $\mathscr{C}(\omega, \mathbf{q})$ называют купероном, потому что точно такая же величина описывает куперовские пары в сверхпроводнике в присутствии примесей (см. гл. 10). Аналогия между купероном в теории локализации и амплитудой куперовских пар оказывается весьма содержательной, поскольку в физических свойствах этих величин имеется немало общего. Эта общность проявляется в разнообразных физических эффектах, таких как, например, влияние магнитного поля, разница между магнитными и немагнитными примесями, температурная зависимость, и т. п.

[15] Это замечание не относится к спиновой зависимости — у куперона она другая.



ним по беспорядку, выделяя куперонный вклад (т. е. веерные графики). В результате получим

$$\delta\sigma_{\alpha\beta} = \frac{e^2}{m^2\omega} \int\limits_{-\omega/2}^{\omega/2} \frac{d\varepsilon}{2\pi} \int p_\alpha (q_\beta - p_\beta)\, \mathscr{C}(\omega, \mathbf{q}) \times \\ \times G_R(\varepsilon_+, \mathbf{p})\, G_R(\varepsilon_+, \mathbf{q}-\mathbf{p})\, G_A(\varepsilon_-, \mathbf{p})\, G_A(\varepsilon_-, \mathbf{q}-\mathbf{p})\, \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2}\, \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^2}.$$

Интегрируем по $\mathbf{p}$, считая $\mathbf{q}$ малым:

$$\delta\sigma = -\frac{2\nu_{2D} e^2 v_F^2}{2\omega} \int \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\omega/2}^{\omega/2} \frac{d\varepsilon}{2\pi} \int \frac{\mathscr{C}(\omega, \mathbf{q})\, d\xi}{(\varepsilon - \xi + i/2\tau)^2 (\varepsilon - \xi - i/2\tau)^2} \tag{9.94}$$

(здесь $\nu_{2D} = m/2\pi$ — плотность состояний в двумерии с одной проекцией спина). Вычисляя интеграл по $\xi$ и $\varepsilon$, находим

$$\delta\sigma = -\frac{4\nu_{2D} e^2 \tau^3 v_F^2}{2} \int \mathscr{C}(\omega, \mathbf{q})\, \frac{d^2\mathbf{q}}{4\pi^2}. \tag{9.95}$$

Теперь вычислим $\mathscr{C}(\omega, \mathbf{q})$. Для этого вначале найдем, чему равна ступень куперонной лестницы:

$$B_c = \int \frac{1}{(\varepsilon + \omega/2 - \xi_\mathbf{p} + i/2\tau)(\varepsilon - \omega/2 - \xi_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} - i/2\tau)}\, \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^2}. \tag{9.96}$$

Считая $\mathbf{q}$ малым и заменяя поэтому $\xi_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} \approx \xi_\mathbf{p} - \mathbf{q}\mathbf{v}$, точно так же, как и в задаче 52, получим

$$B_c(\omega, \mathbf{q}) = 2\pi\nu_{2D}\tau(1 + \tau(i\omega - D\mathbf{q}^2)), \tag{9.97}$$

где на этот раз $D = v_F^2\tau/2$ — коэффициент диффузии в размерности 2. Как и в случае диффузионной лестницы, наиболее существенной оказывается область $\omega\tau \ll 1$, $|\mathbf{q}|l \ll 1$, где ее слаболокализационные поправки несущественны. Сама же лестница равна[16]

$$\mathscr{C}(\omega, \mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi\nu_{2D}\tau)^2} \left( B_c + \frac{B_c^2}{2\pi\nu_{2D}\tau} + \cdots \right). \tag{9.98}$$

Таким образом,

$$\mathscr{C}(\omega, \mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi\nu_{2D}\tau^2(-i\omega + D\mathbf{q}^2)}. \tag{9.99}$$

[16] Можно проверить, что независимо от размерности пространства $d$ примесная линия всегда равна $1/(2\pi\nu_d\tau)$, поскольку она представляет собой сечение рассеяния на примеси, взятое в энергетической нормировке (см. задачу 11).

Осталось лишь подставить это выражение в (9.95):

$$\delta\sigma = -\frac{De^2}{2\pi^3}\int \frac{d^2\mathbf{q}}{D\mathbf{q}^2 - i\omega}. \tag{9.100}$$

Этот интеграл логарифмически расходится. Снизу он обрезается на обратной диффузионной длине $q_{\min} = \sqrt{\omega/D}$, а сверху — на $q_{\max} \approx 1/l$, ибо при $|\mathbf{q}|l \gg 1$ лестничный ряд мал. В результате получаем квантовую поправку к проводимости:

$$\delta\sigma(\omega) = -\frac{e^2}{2\pi^2\hbar}\ln\frac{1}{\omega\tau}. \tag{9.101}$$

Интересно отметить, что логарифмическая сингулярность квантовой поправки на малой частоте $\omega$ не размывается при конечной температуре. Формально это проявляется в том, что в приведенном выше вычислении, выполненном при конечной температуре, в конце концов температура полностью выпадает. (Точно так же, как при выводе классической формулы Друде в задаче 51.) Физическая причина этого та же, что и в задаче 51 — одночастичный характер проводимости в случае упругого рассеяния. При упругом рассеянии состояния с различными энергиями не перемешиваются и, поэтому, степень размытия фермиевской ступеньки несущественна. Однако если в системе имеется какое-либо неупругое рассеяние, скажем, из-за взаимодействия с электронами или фононами, сингулярность квантовой поправки на малой частоте размывается (см. разд. 9.4).

Другое любопытное свойство квантовой поправки — ее локальный характер в пространстве. Если рассмотреть проводимость на конечном волновом векторе, то пространственная дисперсия квантовой поправки будет иметь место при $|\mathbf{q}| \approx p_0$, в то время как для классической проводимости Друде дисперсия гораздо сильнее: $|\mathbf{q}| \approx 1/l$. Причина этого в том, что, как мы видели в задаче 53, интерференционный вклад в вероятность рассеяния назад спадает на очень малых масштабах $\approx p_0^{-1}$. Поскольку рассеяние назад — это и есть механизм возникновения квантовой поправки, она тоже должна иметь масштаб локальности порядка $p_0^{-1}$. В то же время классическая проводимость определяется рассеянием на (большой) длине свободного пробега и поэтому ее пространственная дисперсия намного сильнее.

**55.** Найдем зависимость квантовой поправки от магнитного поля в трехмерном случае. Это можно сделать с помощью соотношения (9.95), которое в координатном представлении принимает следующий вид[17]:

$$\delta\sigma = -4e^2\nu_0\tau^2 D\,\mathscr{C}(\omega, \mathbf{r} = \mathbf{r}'). \tag{9.102}$$

[17] Если выразить квадрат фермиевской скорости в (9.95) через коэффициент диффузии $D = v_F^2\tau/3$, то зависящие от размерности множители сокращаются, и формула (9.102) оказывается справедливой в произвольной размерности.



Выражение для куперона $\mathscr{C}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ в присутствии магнитного поля можно получить следующим образом. Калибровочная инвариантность требует, чтобы при включении магнитного поля производные по координатам в уравнениии для куперона изменялись по такому закону:

$$-i\nabla \to -i\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A}. \tag{9.103}$$

Обратим внимание на то, что в калибровочно инвариантном выражении (9.103) появляется удвоенный заряд электрона. Это связано с тем, что куперон описывает интерференцию *двух* электронных волн, распространяющихся по одному и тому же пути в прямом и обратном направлениях.

Теперь, чтобы получить уравнение для куперона, воспользуемся соотношением (9.99), помножив обе его части на $-i\omega + D\mathbf{q}^2$. В координатном представлении, согласно (9.103), следует заменить $\mathbf{q}$ на $-i\nabla - 2e/c\mathbf{A}$. Потерю фазовой когерентности можно учесть в уравнении для куперона феноменологически, сдвинув частоту $-i\omega$ на величину $\tau_\varphi^{-1}$, так чтобы однородное решение этого уравнения затухало как $\exp(-t/\tau_\varphi)$. Таким образом, мы приходим к следующему уравнению:

$$\left[-i\omega + D\left(-i\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r})\right)^2 + \frac{1}{\tau_\varphi}\right]\mathscr{C}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi\nu_0\tau^2}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \tag{9.104}$$

В конечной системе уравнение (9.104) должно быть дополнено граничными условиями. В случае непроницаемой границы поток частиц через границу должен отсутствовать. Соответствующее граничное условие записывается так:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}} + \frac{2ie}{c}\mathbf{n}\cdot\mathbf{A}\right)\mathscr{C}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0, \tag{9.105}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к границе. Обратим внимание на то, что векторный потенциал входит не только в уравнение для куперона, но и в выражение для потока.

В качестве простейшего применения уравнения (9.104) рассмотрим квантовую поправку к проводимости бесконечного трехмерного металла в однородном магнитном поле $B$. В этом случае выражение (9.104) имеет вид уравнения на функцию Грина для частицы с зарядом $e_* = 2e$ и массой $m_* = \hbar^2/2D$, находящейся в поле $B$. Собственные значения и собственные функции этой задачи хорошо известны (например, см. [2], § 112). Поэтому можно сразу записать решение в таком виде:

$$\mathscr{C}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi\nu_0\tau^2}\sum_{n,\alpha}\frac{\psi_{\alpha,n}(\mathbf{r})\psi^*_{\alpha,n}(\mathbf{r}')}{-i\omega + Dq_z^2 + \Omega_*(n+1/2) + 1/\tau_\varphi}, \tag{9.106}$$

где $\Omega_* = \hbar e_* B/m_* c = 4eDB/\hbar c$ есть «циклотронная частота», а $\psi_{\alpha,n}(\mathbf{r})$ — собственные функции, соответствующие уровням Ландау ($\alpha$ — квантовое число, различающее состояния на одном уровне Ландау, например, импульс). Из-за функций $\psi_{\alpha,n}$ сумма в (9.106) выглядит весьма устрашающе. Но нас, как следует из (9.102), на самом деле интересует куперон в совпадающих точках. При $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ куперон не должен зависеть от абсолютного расположения точек $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$. Поэтому, усредняя по положению $\mathbf{r}$ в объеме проводника $V$ и используя условие ортонормированности собственных функций, получаем

$$\frac{1}{V}\int \mathscr{C}(\omega, \mathbf{r} = \mathbf{r}')\, d^3r = \frac{1}{2\pi\nu_0\tau^2 V}\sum_{n,\alpha}\frac{1}{-i\omega + Dq_z^2 + \Omega_*(n+1/2) + 1/\tau_\varphi}. \tag{9.107}$$

Суммирование по $\alpha$ (суммирование в пределах одного уровня Ландау) можно легко выполнить, использовав выражение для числа состояний на уровне Ландау (см. [2]):

$$dN = \frac{e_* BV}{(2\pi)^2\hbar c}\, dq_z. \tag{9.108}$$

Таким образом, получаем выражение для куперона в совпадающих точках:

$$\mathscr{C}(\omega, \mathbf{r} = \mathbf{r}') = \frac{eB}{4\pi^2\nu_0\hbar c\tau^2}\int\sum_n \frac{1}{-i\omega + Dq_z^2 + \Omega_*(n+1/2) + 1/\tau_\varphi}\,\frac{dq_z}{2\pi}. \tag{9.109}$$

С учетом этого поправка к проводимости (9.102) равна

$$\delta\sigma = -\frac{De^3B}{\pi^2\hbar c}\int\sum_n \frac{1}{-i\omega + Dq_z^2 + \Omega_*(n+1/2) + 1/\tau_\varphi}\,\frac{dq_z}{2\pi}. \tag{9.110}$$

В дальнейших выкладках мы для простоты опустим частоту внешнего поля $\omega$. Вычислим интеграл по $q_z$:

$$\delta\sigma = -\frac{\sqrt{D}\, e^3 B}{2\pi^2\hbar c\sqrt{\Omega_*}}\sum\nolimits_n \frac{1}{\sqrt{n+1/2+x}}, \quad x = \frac{1}{\Omega_*\tau_\varphi} = \frac{\hbar c}{4eBD\tau_\varphi}. \tag{9.111}$$

Полученная сумма расходится на верхнем пределе. Очевидно, это в точности та же расходимость, что и в задаче 54 при вычислении интеграла по $\mathbf{q}$, и поэтому ее следует обрезать на $|\mathbf{q}|$ порядка обратной длины свободного пробега. Для этого оборвем сумму (9.111) на некотором $n_{\max}$, определяемом соотношением

$$\Omega_* n_{\max} \approx D/l^2 \tag{9.112}$$

($\Omega_* n_{\max}$ есть собственное значение оператора в (9.106), которое не должно превышать $D/l^2$). Тогда сумма равна $2\sqrt{n_{\max}}$, и поправка дается выражением

$$\delta\sigma(0) = -\frac{e^2}{4\pi^2}\sqrt{\frac{eB}{\hbar c}}\cdot 2\sqrt{n_{\max}} \approx -\frac{e^2}{4\pi^2\hbar l}. \tag{9.113}$$

Это выражение не зависит ни от $\tau_\varphi$, ни от магнитного поля, поскольку оно определяется малыми масштабами порядка $l$. Интересные эффекты (зависимость от магнитного поля и т. п.) определяются большими масштабами и представляют собой поправки к (9.113).



Обрезание суммы после интегрирования по $q_z$ может показаться внимательному читателю некорректным, поскольку при этом допускаются как угодно большие $q_z$, но только конечные $n$. Но $q_z^2$ и $n$ есть разные части квадрата волнового вектора $\mathbf{q}^2$. Можно более корректно обрезать сумму «вращательно–инвариантным образом», ограничивая как максимальные $n$, так и максимальные $q_z$. Это нетрудно сделать, например, вводя в (9.110) множитель сходимости $\exp\left[-\mu(Dq_z^2 + \Omega_*(n+1/2))\right]$, где $\mu$ — малое число порядка $l^2/D$. При этом оказывается, что простая процедура обрезания по $n$ приводит к тем же ответам.

Вычитая из $\delta\sigma$ независящую от магнитного поля часть $\delta\sigma(0)$, получаем

$$\delta\sigma(B) - \delta\sigma(0) = -\frac{e^2}{2\pi^2\hbar}\sqrt{\frac{eB}{\hbar c}}\, f(x), \tag{9.114}$$

где

$$f(x) = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{\sqrt{n+1/2+x}} - 2\sqrt{N}\right). \tag{9.115}$$

Сумму в (9.115) можно найти в пределе сильных и слабых магнитных полей. Наиболее интересен случай сильного поля ($x \ll 1$), который мы и рассмотрим. При малых $x$ функция $f(x)$ стремится к постоянному пределу, выражающемуся через $\zeta$-функцию Римана:

$$f(x\to 0) = -(\sqrt{2}-1)\zeta\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0,6049. \tag{9.116}$$

Таким образом,

$$\delta\sigma(B) - \delta\sigma(0) = \frac{\sqrt{2}-1}{2\pi^2}\,\zeta\left(\frac{1}{2}\right)\frac{e^2}{\hbar}\sqrt{\frac{eB}{\hbar c}}. \tag{9.117}$$

Итак, слаболокализационная поправка в трехмерном случае пропорциональна корню из магнитного поля. Выход на этот режим происходит при $\Omega_*\tau_\varphi \approx 1$ в согласии с приведенными выше качественными рассуждениями.

Аналогично можно рассмотреть поведение слаболокализационной поправки в двумерном случае. Он отличается от трехмерного случая только отсутствием интегрирования по $q_z$, и поэтому

$$\delta\sigma_{2D}(B) = -\frac{e^2}{2\pi^2\hbar}\sum_{n=0}^{n_{\max}}\frac{1}{n+1/2+x}. \tag{9.118}$$

Эту сумму можно выразить через дигамма-функцию $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$ следующим образом:

$$\delta\sigma_{2D}(B) = -\frac{e^2}{2\pi^2\hbar}\left[\psi\left(n_{\max} + \frac{1}{2} + x\right) - \psi\left(\frac{1}{2} + x\right)\right]. \tag{9.119}$$

При $x \gg 1$ дигамма-функция растет логарифмически, $\psi(x \gg 1) \approx \ln x$, и поэтому в слабых полях

$$\delta\sigma_{2D}(0) = -\frac{e^2}{2\pi^2\hbar}\ln\frac{n_{\max}}{x} = -\frac{e^2}{2\pi^2\hbar}\ln\frac{D\tau_\varphi}{l^2}, \tag{9.120}$$

т. е. слаболокализационная поправка определяется $\tau_\varphi$ и в первом приближении не зависит от магнитного поля. В сильных же полях можно положить $x = 0$:

$$\delta\sigma_{2D}(B) = -\frac{e^2}{2\pi^2\hbar}\left[\ln\frac{4\hbar c}{eBl^2} - \psi\left(\frac{1}{2}\right)\right]. \tag{9.121}$$

Как видно из этой формулы, в больших магнитных полях проводимость не зависит от $\tau_\varphi$. Это происходит потому, что магнитное поле подавляет вклад длинных траекторий, и механизмы сбоя фазы просто не успевают сработать на оставшихся траекториях. Вычитая из (9.121) проводимость в нулевом поле (9.120), получим магнитопроводимость:

$$\delta\sigma_{2D}(B) - \delta\sigma_{2D}(0) = -\frac{e^2}{2\pi^2\hbar}\left[\ln\frac{4D\tau_\varphi eB}{\hbar c} + \psi\left(\frac{1}{2}\right)\right]. \tag{9.122}$$

Таким образом, как в двумерном, так и в трехмерном случае квантовая поправка к проводимости приводит к весьма необычному поведению магнитосопротивления в классически слабых полях, что позволяет выделять эффекты слабой локализации на фоне классического магнитосопротивления. При этом речь идет об изменении проводимости на величину порядка $e^2/h$ в довольно слабых полях порядка $B_c$, так что эффект оказывается вполне измеримым. Вдобавок квантовое магнитосопротивление, в отличие от классического, в трехмерном случае не зависит от угла между током и полем и отлично от нуля даже если ток параллелен полю. Измеряя магнитосопротивление, можно найти время сбоя фазы $\tau_\varphi$, которое определяется взаимодействием электронов. Поэтому данные по аномальному магнитосопротивлению — важный источник информации о квантовых эффектах в металлах.

Помимо этого, квантовая поправка оказывается чувствительна к любым эффектам, нарушающим симметрию по отношению к обращению времени. Например, сильное спин-орбитальное взаимодействие приводит к изменению знака квантовой поправки. Подробное изложение многочисленных эффектов слабой локализации не входит в задачу этой книги. Интересующийся читатель может обратиться к обзорам, посвященным этой теме (см. примечание на с. 229).

**56.** Итак, пусть имеется тонкая металлическая пленка, свернутая в цилиндр радиуса $R$, через который пропущен магнитный поток. Будем рассматривать задачу в цилиндрических координатах, выбрав ось $z$ вдоль оси цилиндра. Вектор-потенциал внутри пленки выберем в виде

$$A_\varphi = \frac{\Phi}{2\pi R}, \quad A_r = A_z = 0. \tag{9.123}$$

Положим частоту внешнего поля $\omega = 0$. Тогда уравнение (9.104) перепишется так:

$$\left\{D\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} - i\frac{e\Phi}{\pi\hbar c}\right)^2\right] + \frac{1}{\tau_\varphi}\right\}\mathscr{C}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi\nu_0\tau^2}\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{9.124}$$



Оно легко решается переходом в представление Фурье:

$$C(z,\varphi,z',\varphi') = \sum_{m,k_z} C_{m,k_z}\, e^{ik_z(z-z')+im(\varphi-\varphi')}. \tag{9.125}$$

Подставив (9.125) в (9.124), получим

$$C_{m,k_z} = \frac{1}{2\pi\nu_0\tau^2 R}\left[\frac{1}{\tau_\varphi} + Dk_z^2 + \frac{D}{R^2}\left(m - \frac{2\Phi}{\Phi_0}\right)^2\right]^{-1}, \tag{9.126}$$

где $\Phi_0 = hc/e$ — *одноэлектронный* квант магнитного потока. Выражая слаболокализационную поправку через $\mathscr{C}(\mathbf{r}=\mathbf{r}')$, получаем

$$\delta\sigma(\Phi) = -\frac{2e^2}{\pi\hbar R}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int\left[k_z^2 + \frac{1}{R^2}\left(m - \frac{2\Phi}{\Phi_0}\right)^2 + \frac{1}{D\tau_\varphi}\right]^{-1}\frac{dk_z}{2\pi}. \tag{9.127}$$

Это выражение периодично по магнитному потоку $\Phi$, поскольку изменение $\Phi$ на целое кратное $\Phi_0/2$ можно компенсировать сдвигом $m$. Имеет смысл преобразовать это выражение так, чтобы периодическая зависимость стала явной. Для этого воспользуемся формулой суммирования Пуассона:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{2\pi ikx}\, dx. \tag{9.128}$$

Применяя эту формулу, затем сдвигая переменную интегрирования и вычисляя интеграл по $k_z$, находим

$$\delta\sigma(\Phi) = -\frac{e^2}{\pi\hbar}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi ik(x+2\Phi/\Phi_0)}}{\sqrt{x^2 + R^2/D\tau_\varphi}}\, dx. \tag{9.129}$$

Теперь видно, что $k$-й член этой суммы представляет собой $k$-ю гармонику $\delta\sigma(\Phi)$. Вычислим интеграл по $x$, используя формулу

$$\int_0^\infty \frac{\cos tx\, dt}{(t^2+1)^\nu} = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(\nu+1/2)}\, K_\nu(x), \tag{9.130}$$

где $K_\nu(x)$ — функция Макдональда. Окончательно имеем

$$\delta\sigma(\Phi) = -\frac{2e^2}{\pi\hbar}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{4\pi ik\Phi/\Phi_0}\, K_0\left(\frac{2\pi kR}{L_\varphi}\right), \tag{9.131}$$

где $L_\varphi = \sqrt{D\tau_\varphi}$ — длина сбоя фазы. В этом выражении член с $k = 0$ сингулярен. Соответствующий интеграл в (9.129) расходится при больших $x$. Это та же самая расходимость, что и в (9.100), поскольку величина $x/R$ играет роль $x$-компоненты волнового вектора. Поэтому расходимость следует обрезать при $x \approx R/l$.

Имеется и другой, более удобный способ избавиться от расходимости — вычесть из $\delta\sigma(\Phi)$ ее усредненное по вариациям потока значение:

$$\delta\sigma(\Phi) - \langle\delta\sigma\rangle_\Phi = \frac{4e^2}{\pi\hbar}\sum_{k=1}^{\infty} K_0\left(\frac{2\pi kR}{L_\varphi}\right)\cos\left(\frac{4\pi k\Phi}{\Phi_0}\right). \tag{9.132}$$

Таким образом, сопротивление цилиндра периодически зависит от пропущенного через него магнитного потока[18]. Период осцилляций оказывается равен $\Phi_0/2$. Так происходит потому, что слаболокализационная поправка связана с интерференцией двух обращенных по времени замкнутых траекторий. Если такие траектории «наматываются» на цилиндр, то вдоль одной из них электрон набирает дополнительную фазу $\delta\varphi = 2\pi\Phi/\Phi_0$, а вдоль другой $-\delta\varphi$. Разность фаз равна $2\pi$, если $\Phi = \Phi_0/2$. Таким образом, величина интерференционных эффектов одна и та же при $\Phi = 0$ и $\Phi = \Phi_0/2$.

Результат (9.132) допускает простую интерпретацию. Амплитуда осцилляций $K_0(2\pi kR/L_\varphi)$ есть вероятность того, что случайная траектория успеет уйти от начальной точки на расстояние $2\pi kR$ (т. е. обмотаться вокруг цилиндра $k$ раз) за время $\tau_\varphi$, в течение которого сохраняется фазовая когерентность. При $2\pi kR \gg L_\varphi$ функция Макдональда экспоненциально затухает. Это значит, что наиболее существенны гармоники с $k \lesssim L_\varphi/2\pi R$. Поэтому для того чтобы эффект был наблюдаемым, нужно, чтобы цилиндр был маленьким: $2\pi R \lesssim L_\varphi$. Поскольку $\tau_\varphi$ растет с понижением температуры, то этому условию можно удовлетворить лишь при низких температурах или в достаточно маленьких образцах.

**57.** Диаграммы на рис. 9.10, дающие коррелятор проводимостей при разных значениях магнитного потока, представляют собой два вклада — диффузонный и куперонный. При этом на электрон во внешней петле диаграммы действует магнитное поле, пропорциональное $\Phi$, а во внутренней — пропорциональное $\Phi'$. В этом случае уравнения для куперона и для диффузона можно получить тем же способом, что и в задаче 56. Нужно только учесть, что, поскольку куперон пропорционален $\langle\psi\psi\rangle$, то в нем векторные потенциалы внутренней и внешней петель на диграммах рис. 9.10 складываются, в то время как диффузон пропорционален $\langle\psi\psi^+\rangle$, и поэтому в нем векторные потенциалы вычитаются. (Тогда при $\Phi = \Phi'$ получаем, что магнитное поле не меняет уравнение диффузии, как и должно быть.) Это означает, что в куперонных диаграммах эффективный магнитный поток есть $(\Phi + \Phi')/2$, а в диффузонных — $(\Phi - \Phi')/2$. В остальном же куперонный и диффузонный вклады совпадают.

Строго говоря, это не совсем точно. Куперонный вклад, в отличие от диффузонного, экспоненциально затухает на временах $t > \tau_\varphi$. А диффузионный полюс при $k = 0$ всегда остается при $\omega = 0$ из-за сохранения

[18] На самом деле в реальный металлический цилиндр магнитное поле все-таки слегка проникает, и поэтому строгая периодичность нарушается.



числа частиц. Тем не менее, поскольку фазочувствительная часть диффузонного вклада, отвечающая за зависимость проводимости от $\Phi$, все равно исчезает при $t > \tau_\varphi$, мы для простоты игнорируем это различие между диффузоном и купероном.

Поскольку существенны только большие масштабы порядка $R$, характерный суммарный импульс в купероне и разность импульсов в диффузоне оказываются порядка $R^{-1}$. Это означает, что импульсы, бегущие по разные стороны каждой примесной лестницы, отличаются мало. Поэтому произведение токовых вершин и функций Грина на концах дается множителем

$$A_{\alpha\mu\beta\nu} = e^4 \int v_\alpha v_\mu v'_\beta v'_\nu G_R^2(p)\, G_A^2(p)\, G_R^2(p')\, G_A^2(p') \frac{d^2p}{(2\pi)^2}\frac{d^2p'}{(2\pi)^2} \tag{9.133}$$

(при выводе этой формулы несущественная зависимость функций Грина от энергии была опущена). Интегралы легко вычисляются переходом к интегрированию по $\xi$, что дает

$$A_{\alpha\mu\beta\nu} = \frac{e^4 v_F^4}{4}\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu}(4\pi\nu_0\tau^3)^2 \cdot 16\pi^2\nu_0^2\tau^4 D^2\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu}. \tag{9.134}$$

Интегрирование по энергиям дает, как обычно, $\omega/2\pi$, причем $\omega$ сокращается после подстановки функции отклика в определение проводимости. Поэтому коррелятор проводимостей (9.32) есть[19]

$$K_{\Phi,\Phi'} = 2e^4\pi^2\nu_0^2\tau^4 D^2\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu}\int \left(|C(\mathbf{r},\Phi,\Phi')|^2 + |D^2(\mathbf{r},\Phi,\Phi')|^2\right)\, d^2\mathbf{r}. \tag{9.135}$$

Квадрат куперонной амплитуды можно найти по теореме Парсеваля:

$$I_C = \int |C(\mathbf{r})|^2\, d^2r = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |C_{m,k_z}|^2 \frac{dk_z}{2\pi}. \tag{9.136}$$

Это выражение можно преобразовать, как и ранее, проинтегрировав по $k_z$ и применив формулу суммирования Пуассона (9.128):

$$I_C = \frac{1}{16\pi^2\nu_0^2\tau^4 D^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi ik(x+(\Phi+\Phi')/\Phi_0)}}{(x^2 + R^2/L_\varphi^2)^{3/2}}\, dx. \tag{9.137}$$

Интеграл по $x$, согласно (9.131), выражается через функцию Макдональда:

$$I_C = \frac{1}{16\pi^2\nu_0^2\tau^4 D^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{4\pi kL_\varphi}{R} K_1\left(\frac{2\pi kR}{L_\varphi}\right) e^{2\pi ik(\Phi+\Phi')/\Phi_0}. \tag{9.138}$$

[19] Интеграл по $d^2\mathbf{r}$ в (9.135) возникает потому, что начальная и конечная точки на диаграммах рис. 9.10 различаются.

Аналогичное выражение для диффузонного вклада отличается заменой $\Phi + \Phi'$ на $\Phi - \Phi'$. Подставив (9.138) в (9.135) и приведя подобные члены, получим

$$K_{\Phi,\Phi'} = \frac{e^4 R^2}{\pi^2 \hbar^2 L_\varphi^2} \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} \times \\ \times \left[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\pi k R}{L_\varphi} K_1\left(\frac{2\pi k R}{L_\varphi}\right) \cos\frac{2\pi k \Phi}{\Phi_0} \cos\frac{2\pi k \Phi'}{\Phi_0}\right] \quad (9.139)$$

(в члене с $k = 0$ нужно взять предел малых $k$ и использовать асимптотику функции Макдональда $K_1(x \ll 1) \approx 1/x$).

Результат (9.139) подтверждает ожидаемую качественную картину. Основная гармоника имеет период $\Phi_0$, а не $\Phi_0/2$. (Это видно из того, что зависящая от магнитного потока часть пропорциональна произведению двух косинусов с периодом $\Phi_0$). Однако при усреднении проводимости по беспорядку этот вклад исчезает, поэтому он проявляется лишь в корреляции проводимостей одного и того же образца.

Обратим внимание на интересную немонотонную зависимость результата от параметра $2\pi R/L_\varphi$. При $2\pi R \gg L_\varphi$ функции Макдональда, определяющие зависимость от магнитного потока, экспоненциально малы. В этом пределе электроны не могут обойти цилиндр, не потеряв при этом фазовую когерентность, так что исчезновение эффекта в этом пределе вполне естественно. Более интересно, что в противоположном пределе ($2\pi R \ll L_\varphi$) эффект тоже мал, как $R^2/L_\varphi^2$. Это происходит потому, что в этих условиях вклад дает большое число траекторий, проходящих в разных местах поверхности цилиндра, что эффективно приводит к усреднению по беспорядку. А вот при $2\pi R \approx L_\varphi$ электроны, дающие вклад в интерференционную поправку, обходят цилиндр по траекториям, не слишком далеко отстоящим от наикратчайшей, поэтому усреднения по беспорядку не происходит.

Заметим, что отличие проводимости конкретного образца от средней может быть довольно заметным. При $L_\varphi \approx 2\pi R$ (необходимое условие наблюдения эффекта Ааронова–Бома) коррелятор проводимостей оказывается порядка $(e^2/h)^2$. Таким образом, при изменении беспорядка проводимость может измениться на величину порядка $e^2/h$, хотя образец при этом остается макроскопическим и содержит большое количество примесей ($R \gg l$). Это означает, что интерференционная часть проводимости является макроскопически измеримой несамоусредняющейся величиной.

Этот неожиданный эффект есть проявление фазовой когерентности электронов при низких температурах.

## 9.6. Диаграммы без самопересечений

Остановимся на вопросе о связи между разложением по параметру $(p_0 l)^{-1}$ и классификацией диаграмм, возникающих при усреднении по беспорядку. Диаграммы для рассеяния электронов на случайном



потенциале содержат два элемента: электронные линии (функции Грина) и примесные штриховые линии, которые, вообще говоря, могут пересекаться произвольным образом. Основной результат, на котором основаны все применения этой техники, состоит в том, что вклады наинизшего порядка по $(p_0 l)^{-1}$ даются одними лишь непересекающимися графиками. Такие графики определяют так называемое «приближение кинетического уравнения». Условие $p_0 l \gg 1$ в точности соответствует больцмановскому параметру, используемому при выводе классического кинетического уравнения, т. е. большой величине длины свободного пробега по сравнению с радиусом взаимодействия. Оказывается, что результаты, получающиеся при отбрасывании всех графиков с пересекающимися примесными линиями, в точности совпадают с результатами, выведенными из кинетического уравнения.

Попробуем понять, почему графики с непересекающимися линиями оказываются выделенными, используя координатное представление. Рассмотрим для этого два графика, дающие поправки к собственно-энергетической части $\Sigma$:

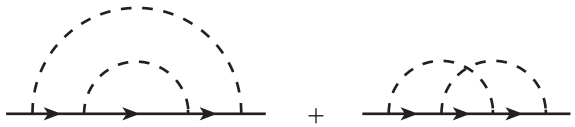

Рис. 9.19

Эти графики дают поправки второго порядка к простейшей собственно-энергетической части $\Sigma = -\delta\mu - (i/2\tau)\,\mathrm{sgn}\,\varepsilon$, найденной в задаче 50 в низшем порядке по рассеянию на примесях. Как мы увидим, вклад первого графика много больше вклада второго графика.

Перерисуем диаграммы, показанные на рис. 9.19, в координатном представлении (см. рис. 9.20). Все гриновские функции, за исключением первой и последней, прикрепляются обоими своими концами к примесям. В координатном представлении усреднение по взаимному расположению примесей производится интегрированием по радиус-вектору $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Зависимость функций Грина от координат дается выражением (9.18).

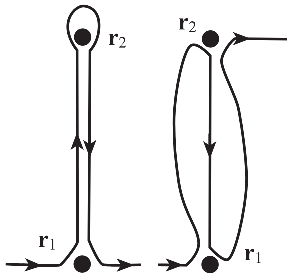


Рис. 9.20

Найдем вклады графиков, показанных на рисунках 9.19 и 9.20, в мнимую часть $\mathrm{Im}\,\Sigma$. Заметим, что $\mathrm{Im}\,\Sigma$ — это мнимая часть амплитуды рассеяния на двух примесях. Воспользуемся теоремой унитарности, связывающей мнимую часть амплитуды рассеяния с сечением рассеяния. Чтобы получить графическое представление этой теоремы (см. задачу 15), надо в каждой диаграмме, описывающей рассеяние во внешнем поле, пометить одну из функций Грина $G$ и заменить ее на $GG^*$, где $G^*$ — комплексно-сопряженная функция. Одновременно с этим, все функции, идущие после помеченной функции Грина, надо заменить на комплексно-сопряженные. При этом, с одной стороны, суммирование по различным графикам и по всем способам пометить одну из функций данного графика дает мнимую часть амплитуды рассеяния. С другой стороны, независимое суммирование по различным частям графиков, встречающимся до и после помеченного места, дает произведение амплитуды рассеяния на комплексно-сопряженную амплитуду с коэффициентом, равным плотности состояний.

Следуя этому рецепту, представим мнимую часть графиков, показанных на рис. 9.20, в виде суммы по помеченным графикам. Обратим внимание на то, что в зависимости от количества функций $G$ и $G^*$ осциллирующие фазовые множители $G(\varepsilon, \mathbf{r}) \sim e^{ip_0|\mathbf{r}|\operatorname{sgn}\varepsilon}$, $G^*(\varepsilon, \mathbf{r}) \sim$ $\sim e^{-ip_0|\mathbf{r}|\operatorname{sgn}\varepsilon}$ могут сократиться, а могут и не сократиться. Например, если на первом графике на рис. 9.20 помечена функция, выходящая из примеси 2 и возвращающаяся в нее же, то фазовые множители функций, идущих из примеси 1 в примесь 2, и обратно, сокращают друг друга. В то же время, на втором графике рис. 9.20 никакой способ пометки не приводит к сокращению фазовых множителей.

При усреднении по расположению примесей вклады с сокращающимися и с несокращающимися фазовыми множителями $e^{\pm ip_0|\mathbf{r}|}$ ведут себя по-разному. Осциллирующий как функция расстояния между примесями $|\mathbf{r}|$ множитель обрезает интеграл по $d^3\mathbf{r}$ на $|\mathbf{r}| \approx p_0^{-1}$. Если же происходит сокращение $e^{ip_0|\mathbf{r}|}$ и $e^{-ip_0|\mathbf{r}|}$, то обрезка интеграла по $d^3\mathbf{r}$ определяется медленно убывающим множителем $e^{-|\mathbf{r}|/2l}$ в выражении (9.18). Соответствующий масштаб есть $|\mathbf{r}| \approx l$, что много больше $p_0^{-1}$. Поэтому главный по $p_0 l$ вклад в $\operatorname{Im}\Sigma$ дается графиками, которые можно пометить так, чтобы все фазовые множители $e^{\pm ip_0|\mathbf{r}|}$ сократили друг друга.

Вследствие этого, вклад первого графика на рис. 9.20 будет порядка $\tau^{-1}$, а второго — порядка $\tau^{-2}$. Сделанное наблюдение нетрудно обобщить на более сложные графики, в которые входит произвольно большое число примесей. Действительно, условие непересечения примесных линий означает просто, что функции Грина проходят одну и ту же (случайную) последовательность примесей, сначала в прямом порядке, а потом в обратном. Пример графика такого рода приведен на рис. 9.21. При этом всегда можно добиться сокращения фазовых множителей, если пометить любую из гриновских функций с совпадающими концами. Следовательно, произвольный график с $N$ непересекающимися линиями по порядку величины равен $\tau^{-N}\tau^{N-1} = \tau^{-1}$, где первый сомножитель

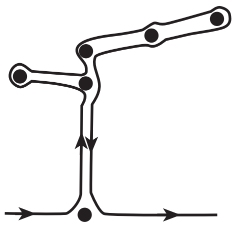

Рис. 9.21



есть вклад $N$ примесных линий, а второй — есть результат $N-1$ интегрирования по взаимному расположению примесей.

Обратим внимание на то, что вклады всех графиков с непересекающимися линиями оказываются того же порядка, что и $\operatorname{Im}\Sigma = -(1/2\tau)\operatorname{sgn}\varepsilon$, найденное в нулевом приближении (см. задачу 50). Вообще говоря, это означает, что при вычислении $\Sigma$ ограничиваться нулевым приближением некорректно. Однако, как мы увидим в разд. 9.7, при суммировании *всех* графиков порядка $\tau^{-1}$ получается ответ, совпадающий с нулевым приближением.

Итак, если в каком-то графике примесные линии пересекаются, то становятся важны корреляции в расположении примесей на расстояниях порядка $p_0^{-1}$. (Это происходит из-за несокращения фазовых множителей, приводящего к интерференции волн, рассеянных на различных примесях.) Если же линии не пересекаются, то такой корреляции нет, поскольку фазы волн, идущих в прямом и обратном направлении, компенсируются. В результате, когда линии не пересекаются, интегрирования по положениям разных примесей оказываются независимыми. В противном случае интегрирования оказываются зависимыми. Каждое зависимое интегрирование дает лишний множитель $(p_0 l)^{-1}$ по сравнению с независимыми интегрированиями.

При таком рассмотрении становится ясно, что пренебрежение пересекающимися линиями эквивалентно пренебрежению корреляциями между последовательными столкновениями с примесями. Это в точности то же самое приближение, как и то, что используется в теории кинетического уравнения. Поэтому параметр $(p_0 l)^{-1}$ — это обычный больцмановский малый параметр кинетической теории.

Следовательно, любые кинетические коэффициенты, такие как проводимость или коэффициент диффузии, найденные с помощью диаграммной техники в главном порядке по $(p_0 l)^{-1}$, должны совпадать с результатами, полученными с помощью классического кинетического уравнения. В том, что это действительно так, мы убедились в задачах 51 и 52. Разумеется, с помощью диаграммной техники можно не только обосновать кинетическое уравнение квантовомеханически, но и рассмотреть эффекты следующего порядка по $(p_0 l)^{-1}$, не описываемые классической кинетической теорией. Оказывается, что в этом порядке возникают принципиально квантовые физические эффекты, требующие учета интерференции электронных волн (см. задачи 53 и 54).

С несколько более формальной теоретико-полевой точки зрения, ситуция при $p_0 l \gg 1$ аналогична $1/N$-разложению в теориях поля с большим изоспином. Напомним, что $1/N$-разложение вводится для теории, содержащей $N \gg 1$ свободных полей $\varphi_i(x^\mu)$, взаимодействие между которыми изотропно по изоспину:

$$\mathcal{L} = \int \left( \frac{1}{2}\partial_\mu \varphi_i \partial^\mu \varphi^i + \frac{1}{2} g (\varphi_i \varphi^i)^2 \right) d^4x. \tag{9.140}$$

Оказывается, что в главном порядке по $1/N$ важны только диаграммы, в которых линии, соответствующие полю $\varphi_i$, не пересекаются. В теории поля такие диаграммы обычно называют *планарными*, поскольку, с топологической точки зрения, их всегда можно уложить на плоскость без самопересечений. Кроме того, для диаграмм произвольного вида в теории поля доказывается, что порядок диаграммы по $1/N$ определяется минимальным родом поверхности (т. е. числом ручек), при котором диаграмму можно изобразить на этой поверхности без самопересечений [20].

В задаче об упругом рассеянии на случайно расположенных примесях состояния частицы характеризуются импульсом, принимающим значения на ферми-поверхности. Из-за конечной длины свободного пробега, имеется неопределенность в импульсе порядка $\delta p = l^{-1}$. Поэтому количество различных состояний частицы оказывается порядка

$$N_0 = \left(\frac{p_0}{\delta p}\right)^2 = (p_0 l)^{d-1}, \tag{9.141}$$

где $d$ — размерность системы. Для объяснения роли непересекающихся диаграмм в [1] приводится рассуждение, использующее ограничение фазового объема при интегрировании по импульсам в диаграммах с пересекающимися примесными линиями. Обратим внимание на то, что эта аргументация точно такая же, как для теории взаимодействующего $N$-компонентного поля с $N = N_0$.

## 9.7. Электронный спектр неупорядоченной системы

Выше мы рассмотрели ряд теории возмущений для собственно-энергетической части и показали, что главный вклад дается графиками с непересекающимися линиями. При этом оказалось, что вклады графиков с произвольно большим количеством линий одинаковы и равны по порядку величины $\tau^{-1}$. Поэтому, вообще говоря, необходимо выполнить суммирование всех таких графиков. Это нетрудно сделать с помощью метода блочного суммирования.

Чтобы не загромождать формулы выражениями, зависящими от знака $\varepsilon$, рассмотрим запаздывающую функцию Грина, полагая $\mu = 0$. Невозмущенная функция Грина есть $G_R^{(0)}(\varepsilon, \mathbf{p}) = (\varepsilon - \mathbf{p}^2/2m + i0)^{-1}$. Введем собственно-энергетическую часть $\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})$, определив ее обычным образом, как сумму всех неприводимых диаграмм. Из графического представления $\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})$ (рис. 9.22) ясно, что любой вклад в $\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})$ можно представить в виде вклада в усредненную функцию Грина с концами, замкнутыми примесной линией.

[20] См. оригинальную работу: *G. t'Hooft*// Nucl. Phys. B. 1974. V. 72. P. 461, или книгу [10]



В этом случае уравнение Дайсона выглядит весьма просто:

$$\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p}) = nu_0 + \frac{nu_0^2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}'}{\varepsilon - \mathbf{p}'^2/2m - \Sigma(\varepsilon, \mathbf{p}')}, \tag{9.142}$$

и его нетрудно решить. Выражение в правой части не зависит от $\mathbf{p}$, поскольку примеси точечные. Поэтому $\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})$ является функцией одного лишь $\varepsilon$.

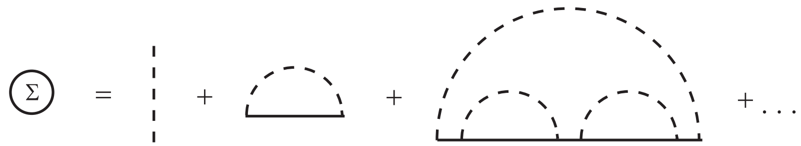


Рис. 9.22

В главном порядке по $nu_0^2$ решение получается, если заменить $\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p}')$ в правой части (9.142) на $-i0$. В случае, когда величина $\operatorname{Im}\Sigma(\varepsilon)$ отлична от нуля, но мала по сравнению с $\varepsilon$, значение выражения в правой части (9.142) останется таким же, как и в нулевом приближении (с точностью до членов более высокого порядка малости по $(p_0 l)^{-1}$). Поэтому собственно-энергетическая часть $\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})$, найденная в задаче 50 в низшем порядке по $(p_0 l)^{-1}$, в действительности является самосогласованным решением уравнения Дайсона (9.142) при условии $p_0 l \gg 1$.

Поучительно решить уравнение (9.142) явно, не предполагая малости $\Sigma(\varepsilon)$ по сравнению с $\varepsilon$. Чтобы вычислить интеграл в правой части (9.142) надо регуляризовать расходимость при больших $|\mathbf{p}|$. Для этого обрежем интегрирование на $a^{-1}$, где $a$ — радиус примеси. (Напомним, что примеси можно считать точечными при энергиях $(2m\varepsilon)^{1/2}a \ll \ll 1$.) Перепишем уравнение (9.142) таким образом:

$$\Sigma(\varepsilon) = nu_0 - g\int_0^{a^{-1}} \frac{p^2\,dp}{p^2 + \lambda^2(\varepsilon)},\ \ \lambda(\varepsilon) = \sqrt{2m(\Sigma(\varepsilon) - \varepsilon)}\,,\ \ g = nu_0^2\,\frac{m}{\pi^2}. \tag{9.143}$$

Интеграл в (9.143) есть $a^{-1} - \pi\lambda/2$. Используя связь $\lambda$ и $\Sigma$, получаем уравнение на $\lambda$:

$$\pi\, g\, \lambda - \lambda^2/m = 2\,\widetilde{\varepsilon}, \tag{9.144}$$

где $\widetilde{\varepsilon} = \varepsilon - nu_0 + g/a$. Решение этого уравнения имеет вид

$$\lambda(\varepsilon) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}mg + \sqrt{2m(\varepsilon_0 - \widetilde{\varepsilon})} & \text{при } \widetilde{\varepsilon} < \varepsilon_0, \\ \dfrac{\pi}{2}mg + i\sqrt{2m(\widetilde{\varepsilon} - \varepsilon_0)} & \text{при } \widetilde{\varepsilon} > \varepsilon_0, \end{cases} \tag{9.145}$$

где $\varepsilon_0 = \pi^2 m g^2/8$. Отсюда находим

$$\Sigma(\varepsilon) = \frac{\pi}{2}\, g\, \lambda(\varepsilon) - n u_0 + \frac{g}{a}. \qquad (9.146)$$

При больших положительных $\varepsilon \gg n u_0$, разлагая квадратный корень в (9.145), получаем

$$\Sigma(\varepsilon) = 2\varepsilon_0 - n u_0 + \frac{g}{a} - i\pi n u_0^2 \nu(\varepsilon), \qquad (9.147)$$

где $\nu(\varepsilon) = m(2m\varepsilon)^{1/2}/2\pi^2$ — плотность состояний в отсутствие примесей. Нетрудно видеть, что вещественная часть $\Sigma$ просто сдвигает дно электронной зоны (т. е. меняет химический потенциал) и поэтому несущественна. Мнимая же часть определяет время жизни электрона в данном состоянии и при больших $\varepsilon$ совпадает с результатом, найденным в задаче 50.

Полученное решение (9.145) уравнения Дайсона (9.142) часто используют не только при больших, но и при произвольных энергиях. Разумеется, формально это некорректно, поскольку (9.142) было выведено в предположении $p_0 l \gg 1$. Тем не менее, такое *самосогласованное борновское приближение* часто приводит к качественно правильным результатам.

Например, рассмотрим одночастичную плотность состояний. Воспользуемся известным соотношением между плотностью состояний и функцией Грина: $\nu(\varepsilon) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\,\mathrm{Tr}\,\widehat{G}$. Нас интересует плотность состояний, усредненная по беспорядку. Поэтому, используя найденное выражение для усредненной функции Грина, получаем

$$\nu(\varepsilon) = \frac{1}{\pi(2\pi)^3}\,\mathrm{Im}\int \frac{d^3\mathbf{p}}{\varepsilon - \mathbf{p}^2/2m - \Sigma(\varepsilon)} = -\,\mathrm{Im}\,\frac{m}{\pi^3}\int_0^\infty \frac{p^2\,dp}{p^2 + \lambda^2(\varepsilon)} =$$
$$= \frac{m}{2\pi^2}\sqrt{2m(\varepsilon - \varepsilon_*)}, \quad \varepsilon_* = n u_0 - \frac{g}{a} + \varepsilon_0, \qquad (9.148)$$

где $\lambda(\varepsilon)$ дается выражением (9.145). Итак, самосогласованное борновское приближение дает плотность состояний (9.148), отличающуюся от плотности состояний чистой системы лишь сдвигом энергии на определенную величину. Выражение (9.148) имеет качественно правильное поведение: ниже порога $\varepsilon = \varepsilon_*$ плотность состояний $\nu(\varepsilon)$ обращается в нуль, а при больших $\varepsilon$ переходит в $\nu(\varepsilon)$ чистой системы.

**9.7.1. Хвост локализованных состояний.** Следует отметить, что самосогласованное борновское приближение несправедливо непосредственно вблизи порога $\varepsilon = \varepsilon_*$. В этой области выражение (9.148) сильно упрощает истинную картину. Дело в том, что состояния в нижней части спектра в случайном потенциале всегда *локализованы*[21])

[21]) Понятие локализации было впервые введено в работе: *P. W. Anderson*// Phys. Rev. 1958. V. 109. P. 1492–1505.



и поэтому приближение слабого рассеяния в этом случае не имеет смысла. Для изучения локализованных состояний требуются совершенно иные методы, выходящие за рамки теории возмущений.

Локализация приводит к качественным изменениям в поведении плотности состояний системы. Рассмотрим, например, случай отталкивательного потенциала примесей, $u_0 > 0$. Согласно формуле (9.148), пороговая энергия $\varepsilon_*$, выше которой плотность состояний отлична от нуля, положительна (поскольку $g/a \ll n u_0$ для точечных примесей). Однако в реальной системе имеются состояния с любыми неотрицательными энергиями. Причина этого в том, что из-за случайного расположения примесей с какой-то вероятностью произвольно большая область пространства может оказаться свободной от примесей. Состояния с энергиями $0 < \varepsilon < \varepsilon_*$ образуют так называемый *хвост локализованных состояний*. Эта часть плотности состояний не может быть получена по теории возмущений, поскольку при энергиях $\varepsilon \approx \varepsilon_*$ формально $p_0 l \ll 1$.

При самых низких энергиях $0 < \varepsilon \ll \varepsilon_*$ плотность состояний допускает простую оценку[22]). Вероятность найти состояние с энергией $\varepsilon$ определяется тем, что найдется достаточно большая область объема $V_\varepsilon$, свободная от примесей, в которой имеется состояние с требуемой энергией. Поскольку вероятность найти такую область экспоненциально мала по $V_\varepsilon$, возникает задача о выборе оптимальной области как можно меньшего объема, так называемой *оптимальной флуктуации* случайного потенциала. Можно показать, что такая область должна быть сферической. Условие того, что сферическая полость содержит состояние с энергией $\varepsilon$, есть $\sqrt{2m\varepsilon}\,R = \pi/2$, где $R$ — радиус полости. Поэтому $V_\varepsilon^{\min} = 4\pi R^3/3 = (\pi^4/6)(2m\varepsilon)^{-3/2}$. Вероятность того, что имеется такая свободная от примесей сферическая область, есть $P(\varepsilon) = \exp\left(-nV_\varepsilon^{\min}\right)$. В результате плотность состояний при самых малых энергиях ведет себя как $\exp\left(-\mathrm{const}\cdot(\varepsilon_*/\varepsilon)^{3/2}\right)$.

Вопрос о плотности состояний вблизи «самосогласованного порога» $\varepsilon = \varepsilon_*$ также может быть решен. При этом, как и в предыдущем случае, ответ дается вероятностью оптимальной флуктуации. Однако задача об отыскании такой флуктуации оказывается менее простой[23]).

[22]) *И. М. Лифшиц*// ЖЭТФ. 1967. Т. 53. С. 743.

[23]) См. работы: *B. I. Halperin*, *M. A. Lax*// Phys. Rev. 1966. V. 148. P. 722, Phys. Rev. 1967. V. 153. P. 802; *J. Zittartz*, *J. S. Langer*// Phys. Rev. 1966. V. 148. P. 741.