Часть II
МЕТОДЫ ТЕОРИИ МНОГИХ ТЕЛ

Глава 8
ТЕОРИЯ ФЕРМИ-ЖИДКОСТИ

Теория ферми-жидкости изучает систему, состоящую из макроскопически большого числа взаимодействующих фермионов. Гамильтониан ферми-жидкости $\widehat{\mathscr{H}} = \widehat{\mathscr{H}}_0 + \widehat{\mathscr{H}}_{\text{int}}$ есть сумма кинетической энергии фермионов и потенциальной энергии их взаимодействия. Выражения для $\widehat{\mathscr{H}}_0$ и $\widehat{\mathscr{H}}_{\text{int}}$, записанные в импульсном представлении через операторы вторичного квантования $a^+_{\mathbf{p},\sigma}$ и $a_{\mathbf{p},\sigma}$, имеют такой вид:

$$\widehat{\mathscr{H}}_0 = \sum_{\mathbf{p},\sigma} \xi(\mathbf{p}) a^+_{\mathbf{p},\sigma} a_{\mathbf{p},\sigma}, \quad \widehat{\mathscr{H}}_{\text{int}} = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}} \rho_{\mathbf{k}} \rho_{-\mathbf{k}}, \tag{8.1}$$

где $\xi(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2m - \mu$ — спектр свободных частиц, $V_{\mathbf{k}}$ — фурье-образ потенциала взаимодействия $V(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, а $\rho_{\mathbf{k}} = \sum\limits_{\mathbf{p},\sigma} a^+_{\mathbf{p}+\mathbf{k},\sigma} a_{\mathbf{p},\sigma}$ — фурье-гармоники оператора плотности фермионов. Как правило предполагается, что ферми-жидкость однородна и имеет фиксированную плотность.

Главная задача теории ферми-жидкости — выяснить характер основного состояния и возбуждений системы, описываемой гамильтонианом (8.1). Вообще говоря, характер основного состояния весьма сильно зависит от свойств взаимодействия между фермионами. В некоторых случаях может возникать сверхпроводящее или ферромагнитное состояние, вигнеровский кристалл, волна зарядовой или спиновой плотности, и т. п. Однако большинство взаимодействующих ферми-систем устроено относительно просто — их свойства в основном подобны свойствам невзаимодействующего ферми-газа. В таких случаях принято говорить о *ферми-жидкостном* состоянии. Элементарные возбуждения ферми-жидкости — это электрон-дырочные пары в окрестности ферми-поверхности. Эффекты взаимодействия проявляются лишь в перенормировке нескольких констант, определяющих теплоемкость, сжимаемость и другие свойства. Кроме того, в ферми-жидкости имеются специфические ветви коллективных возбуждений — нуль-звук, плазмоны, спиновые волны.

Существует несколько подходов к проблеме ферми-жидкости, отличающихся степенью «квантовомеханичности». Во-первых, имеется квазиклассическая (или феноменологическая) теория ферми-жидкости (см. разделы 8.1 и 8.2). Существует также более микроскопическая теория, основанная на так называемом *приближении случайных фаз* (см. разд. 8.3). И, наконец, наиболее строгая микроскопическая теория строится с помощью функций Грина (см. разд. 8.7). Хотя результаты всех трех теорий, по существу, одинаковы, каждая из них имеет свои методические достоинства. Поэтому в задачах этой главы мы уделим равное внимание всем трем методам и постараемся продемонстрировать связи между ними.

Известно много разнообразных ферми-жидкостных систем. Классические примеры — нуклоны в атомном ядре, а также жидкий ^{3}He. Но наиболее важные для нас применения теории ферми-жидкости относятся к электронам в металлах. Основное различие между этими видами ферми-жидкости заключается в характере взаимодействия. Взаимодействие между нуклонами, а также между атомами ^{3}He, — короткодействующее, в то время как электроны взаимодействуют по закону Кулона. В первом случае фурье-образ взаимодействия $V_{\mathbf{k}}$ в (8.1) весьма слабо зависит от $\mathbf{k}$, в то время как во втором случае зависимость от $\mathbf{k}$ имеет сингулярный характер: $V_{\mathbf{k}} = 4\pi e^2/\mathbf{k}^2$.

Для математически корректного описания кулоновского взаимодействия в металле обычно используется так называемая *модель желе*: электроны, движущиеся в потенциале равномерно размазанного статического положительного заряда, обеспечивающего электронейтральность. При этом пренебрегают динамикой ионов и всеми эффектами, связанными с фононами. Модель желе весьма неплохо описывает ферми-жидкостные свойства электронов в металлах.

8.1. Квазичастицы

Наиболее простое обоснование теории ферми-жидкости можно получить, следуя квазиклассической аргументации Ландау. Основная идея этого подхода та же, что и в теории многоэлектронного атома Томаса–Ферми. Напомним, что в многоэлектронном атоме распределение электронов по импульсам в каждой точке пространства описывается ферми-сферой, радиус которой $p_0(\mathbf{r})$ есть функция координат. Взаимодействие учитывается заменой потенциала ядра, в поле которого движутся электроны, на эффективный потенциал, включающий среднее электрическое поле, создаваемое электронами. В свою очередь, кулоновский потенциал поля электронов находится по электронной плотности $\rho(\mathbf{r}) = p_0^3(\mathbf{r})/(3\pi^2)$ и, таким образом, картина оказывается самосогласованной. Теория Томаса–Ферми позволяет найти распределение заряда в многоэлектронном атоме, энергию связи, и т. п.

Теория ферми-жидкости Ландау является своего рода обобщением теории Томаса–Ферми, описывающим динамику частиц в бесконечной однородной системе взаимодействующих фермионов. Предполагается, что равновесное распределение по импульсам есть ферми-сфера радиуса $p_0 = (3\pi^2 n)^{1/3}$, где n — плотность частиц. Теория утверждает, что динамику такой системы можно рассматривать при помощи *квазичастиц*, описывающих локальные отклонения распределения по импульсам от ферми-сферы. Слабо неравновесные состояния описываются распределением квазичастиц по импульсам и координатам, близким к фермиевскому в каждой точке пространства.

Квазичастицы являются элементарными возбуждениями в ферми-жидкости. Они образованы фермионами невзаимодействующего ферми-газа, «одетыми» взаимодействием с другими фермионами. Математическое описание «одевания» достигается введением в теорию эффективного поля, действующего на квазичастицы. Это поле определенным образом зависит от распределения всех остальных квазичастиц. В результате динамика и взаимодействие квазичастиц определяются самосогласованно.

Чтобы выяснить, какие эффекты взаимодействия в ферми-жидкости являются наиболее существенными, рассмотрим ферми-газ, в котором одна из частиц имеет небольшую энергию $\varepsilon > 0$ над уровнем Ферми. Благодаря межчастичному взаимодействию рассматриваемая частица может перейти в состояние с меньшей энергией $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, одновременно родив электрон-дырочную пару с энергией $\delta\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon'$. При ε, $\varepsilon' \ll E_F$ плотность состояний пар с энергией $\delta\varepsilon$ можно оценить как $\nu_0^2\delta\varepsilon$, и поэтому, согласно золотому правилу, вероятность распада на частицу с меньшей энергией и электрон-дырочную пару есть $\gamma(\varepsilon) = \lambda\varepsilon^2$, где $\lambda \approx (e^2/\hbar v_F)^2/E_F$. Из сказанного следует, что $\gamma(\varepsilon) \ll \varepsilon$, т. е. Время жизни частицы очень велико.

Таким же образом можно показать, что рассеяние частиц с малой энергией друг на друге происходит очень редко, поскольку при малой энергии фазовый объем конечных состояний рассеяния оказывается очень мал.

Отметим, что эти выводы справедливы даже при силе взаимодействия порядка единицы. Требуется лишь, чтобы энергия частицы была близка к уровню Ферми.

Наиболее существенным эффектом в динамике частиц ферми-жидкости оказывается *рассеяние вперед*[1]) При рассеянии частицы вперед остальная ферми-система образует своего рода однородную преломляющую среду, взаимодействие с которой дает поправку $\delta\varepsilon\, t$ к фазе волновой функции частицы $e^{-i(\varepsilon^{(0)}+\delta\varepsilon)t}$, где

$$\delta\varepsilon = \int f(\mathbf{p},\mathbf{p}')\delta n(\mathbf{p}',\mathbf{r})\frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \tag{8.2}$$

— так называемый функционал Ландау. Рассеяние вперед не приводит к рождению других частиц или дырок. Таким образом, возникает

[1]) *Л. Д. Ландау*// ЖЭТФ. 1956. Т. 30. С. 1058–1064.

представление о «квазичастицах», каждая из которых движется в самосогласованном поле окружающих квазичастиц.

Энергия квазичастицы ε в самосогласованном поле зависит от распределения по импульсам всех остальных квазичастиц:

$$\varepsilon(\mathbf{p},\delta n) = \varepsilon^{(0)}(\mathbf{p}) + \int f(\mathbf{p},\mathbf{p}')\delta n(\mathbf{p}',\mathbf{r})\frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \tag{8.3}$$

Здесь $\mathbf{p}$ — импульс квазичастицы, $\varepsilon^{(0)}(\mathbf{p}) = v_F(p - p_0)$ — энергия квазичастицы, а $\delta n = n - n_F$ — отклонение распределения квазичастиц от равновесного фермиевского распределения. Функция $f(\mathbf{p},\mathbf{p}')$ определяет зависимость энергии квазичастицы с импульсом $\mathbf{p}$ от состояния квазичастицы с импульсом $\mathbf{p}'$.

Теория ферми-жидкости дает связь между функцией $f(\mathbf{p},\mathbf{p}')$ и наблюдаемыми величинами, такими как теплоемкость, магнитная восприимчивость и т. п. (см. [1], § 19, 22). При этом, как мы убедимся, функционал (8.3) полностью определяет динамику квазичастиц.

8.2. Кинетическое уравнение. Коллективные моды

Выражение (8.3) представляет собой гамильтониан H одной квазичастицы, движущейся в самосогласованном поле других квазичастиц. Динамика квазичастицы описывается уравнением Гамильтона $\partial n/\partial t = \{H, n\}$, где $\{\ldots\} = [\partial/\partial\mathbf{r}\,,\, \partial/\partial\mathbf{p}]$ — скобки Пуассона. Вычисляя скобки Пуассона с гамильтонианом (8.3), получаем кинетическое уравнение теории ферми-жидкости[2])

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial n}{\partial \mathbf{p}}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{r}} = 0. \tag{8.4}$$

Рассмотрим колебания системы, отвечающие малым отклонениям от равновесия. Для этого представим функцию распределения в виде $n = n_0 + \delta n$ и линеаризуем уравнение (8.4) по δn. Получим

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} + \frac{\partial \delta n}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial \varepsilon^{(0)}}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \delta\varepsilon}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial n_0}{\partial \mathbf{p}} = 0, \tag{8.5}$$

где $\delta\varepsilon$ — функционал Ландау (8.2).

Нас интересуют решения уравнения (8.5), зависящие от времени и координат как $e^{-i\omega t + i\mathbf{kr}}$. Нетрудно показать, что все решения δn имеют δ-функционную зависимость от $|\mathbf{p}|$ и локализованы на ферми-поверхности $|\mathbf{p}| = p_0$. Поэтому, оказывается удобным использовать в качестве независимой переменной функцию единичного вектора $\mathbf{n}$ на ферми-поверхности:

$$u(\mathbf{n}) = \int \delta n(\mathbf{p})\, d|\mathbf{p}|, \tag{8.6}$$

[2]) *Л. Д. Ландау*// ЖЭТФ. 1957. Т. 32. С. 59–66.

где интеграл берется вдоль луча $\mathbf{p} \parallel \mathbf{n}$. Величина $u(\mathbf{n})$ имеет смысл нормального смещения ферми-поверхности в точке $p_0\mathbf{n}$.

Из (8.5) можно получить уравнение для $u(\mathbf{n})$, которое имеет следующий вид:

$$(\omega - \mathbf{kv})u(\mathbf{n}) = \mathbf{kv} \int F(\mathbf{n}, \mathbf{n}')u(\mathbf{n}')\frac{d\mathbf{n}'}{4\pi}, \tag{8.7}$$

где $\mathbf{v} = v_F\mathbf{n}$, а функция F связана с функцией f в функционале Ландау (8.2) следующим образом:

$$F(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = \nu_0 f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')_{|\mathbf{p}|=|\mathbf{p}'|=p_0}, \tag{8.8}$$

где ν_0 — плотность состояний с одной проекцией спина.

Полученное соотношение (8.7) следует рассматривать, как уравнение на собственные значения $\omega(\mathbf{k})$. Оно имеет решения двух типов: *квазичастичные* и *коллективные*. Для квазичастичных решений связь ω и $\mathbf{k}$ есть $\omega = \mathbf{kv}$, а соответствующая функция $u(\mathbf{n})$ описывает частицу с определенным направлением скорости $\mathbf{v}$. Из-за этого функция $u(\mathbf{n})$ на ферми-поверхности имеет сингулярный характер:

$$u(\mathbf{n}') = \delta^{(2)}(\mathbf{n}' - \mathbf{n}) + u_{\mathrm{reg}}(\mathbf{n}'), \tag{8.9}$$

Кроме δ-функции, локализованной в точке $\mathbf{n} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ ферми-поверхности, выражение (8.9) содержит $u_{\mathrm{reg}}(\mathbf{n})$ — более плавную функцию, обычно имеющую полюсы при $\mathbf{kv} = \omega$ (см. задачу 43).

Решения другого типа описывают коллективные моды колебаний ферми-жидкости, или так называемый *нулевой звук*. Рассмотрим простейший случай, когда взаимодействие локально и изотропно, т. е. функция F есть просто константа: $F(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = F_0$. (Примером системы с функцией Ландау подобного вида является жидкий ^{3}He.) в этом случае, ввиду симметрии задачи, функция $u(\mathbf{n})$ зависит только от угла θ между векторами $\mathbf{n}$ и $\mathbf{k}$. Поэтому уравнение (8.7) принимает вид

$$(s - \cos\theta)u(\theta) = \frac{F_0}{2}\cos\theta \int u(\theta')d\theta', \quad \text{где} \quad s = \frac{\omega}{v_F|\mathbf{k}|}. \tag{8.10}$$

Решение уравнения (8.10) есть $u(\mathbf{n}) = A\cos\theta/(s - \cos\theta)$, где A — произвольная константа. Подставляя это решение в (8.10), находим

$$\frac{s}{2}\ln\frac{s+1}{s-1} - 1 = \frac{1}{F_0}. \tag{8.11}$$

При любом отталкивательном взаимодействии (т. е. при $F_0 > 0$) это уравнение имеет ровно одно вещественное решение $s > 1$ и, таким образом, определяет функцию $s(F_0)$. Поэтому закон дисперсии нулевого звука оказывается линейным: $\omega_0(\mathbf{k}) = s(F_0)v_F|\mathbf{k}|$.

Поскольку $s(F_0) > 1$, частота $\omega_0(\mathbf{k})$ при любом $\mathbf{k}$ лежит выше границы квазичастичного спектра: $\omega_0(\mathbf{k}) > v_F|\mathbf{k}|$. Это означает, что распространение нуль-звука и динамика отдельных квазичастиц «развязаны», вследствие чего нуль-звуковая мода оказывается незатухающей. Отметим, что более точное микроскопическое рассмотрение показывает,

что эти результаты справедливы лишь при не слишком больших $\mathbf{k}$ (см. задачи 44б, 47б). Обычно законы дисперсии коллективных мод в ферми-жидкости имеют точку окончания $k_{\max}$, в которой происходит слияние с квазичастичным спектром — см. рисунки 8.2, 8.9, а также задачу 73б).

Коллективные моды в ферми-жидкости могут затрагивать не только распределение плотности частиц, но и поляризацию спина. В этом случае говорят о *спиновых волнах* (см. задачу 47).

Остановимся на том, как видоизменяются коллективные моды в металле, где взаимодействие между частицами кулоновское, т. е. дальнодействующее. В этом случае вместо нулевого звука возникают так называемые *плазменные колебания*. Запишем уравнение (8.4) с учетом силы, возникающей благодаря электрическому полю $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$:

$$\begin{gathered} \frac{\partial n}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla_{\mathbf{r}})n + e(\mathbf{E}\nabla_{\mathbf{p}})n = 0, \\ \Phi(\mathbf{r}) = e\int \left[\int n(\mathbf{p}, \mathbf{r}')\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} - n_0\right] \frac{d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \end{gathered} \tag{8.12}$$

где n_0 — плотность фонового положительного заряда. Как и выше, линеаризуем уравнение и перейдем в импульсное представление.

Получающиеся уравнения оказываются точно такими же, как и в случае нулевого звука, с точностью до замены $F_0 \to 4\pi e^2\nu/\mathbf{k}^2$, где $\nu = 2\nu_0$ — плотность состояний с учетом спина. Это происходит потому, что уравнение (8.12), если выразить в нем электрическое поле через плотность частиц, приобретает такую же форму, как кинетическое уравнение ферми-жидкости (8.7) с нелокальным функционалом Ландау:

$$\delta\varepsilon(\mathbf{r}) = \iint \frac{e^2\delta n(\mathbf{p}, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\frac{d^3\mathbf{r}' d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}. \tag{8.13}$$

Как и в случае изотропного взаимодействия, энергия зависит только от полной плотности частиц. Поэтому и угловая зависимость смещений ферми-поверхности, и дисперсионное уравнение выглядят точно так же, как для нуль-звука:

$$\frac{\omega}{2v_F|\mathbf{k}|}\ln\frac{\omega + v_F|\mathbf{k}|}{\omega - v_F|\mathbf{k}|} - 1 = \frac{\mathbf{k}^2}{4\pi e^2\nu}. \tag{8.14}$$

Частота $\omega(\mathbf{k})$, определяемая из уравнения (8.14), остается конечной при малых $\mathbf{k}$: $\omega_0 \equiv \omega(\mathbf{k} \to 0) = (4\pi ne^2/m)^{1/2}$, что совпадает с известным классическим результатом для плазменной частоты. Подробнее закон дисперсии плазменных волн будет рассмотрен в задаче 44.

Подведем итог. Бóльшая часть возбуждений в ферми-жидкости — квазичастицы — имеет точно такой же спектр и динамику, как и в невзаимодействующей системе. Кроме того, благодаря взаимодействию могут появиться коллективные моды плазменных или нуль-звуковых колебаний. Появление коллективных мод и есть основной качественный эффект, к которому приводит взаимодействие.

8.3. Приближение случайных фаз

Обсудим теперь, как можно проквантовать динамику ферми-жидкости, используя гамильтонов формализм. Для этого потребуется ввести операторы электрон-дырочных пар, удовлетворяющие бозонным коммутационным соотношениям. Гамильтониан ферми-жидкости (8.1), записанный через такие операторы, содержит квадратичные члены, а также члены более высокого порядка, которыми можно пренебречь, если энергия рассматриваемых возбуждений мала по сравнению с E_F. Динамику, определяемую этим квадратичным гамильтонианом, можно исследовать точно и установить ее эквивалентность кинетическому уравнению ферми-жидкости. Возможность описать систему взаимодействующих фермионов (8.1) с помощью эквивалентного бозонного гамильтониана имеет разнообразные интересные применения. Одним из них является так называемый метод *бозонизации*, который мы рассмотрим в гл. 12.

Как и теория ферми-жидкости Ландау, метод бозе-операторов электрон-дырочных пар основывается на предположении, что функция распределения по импульсам имеет такой же вид, как и для свободных частиц, т. е. что ферми-поверхность не разрушается взаимодействием. Чтобы выяснить, как взаимодействие меняет характер возбуждений, мы приведем гамильтониан системы (8.1) к виду, содержащему операторы рождения и уничтожения пар. При этом будет использовано так называемое приближение случайных фаз Бома и Пайнса, впервые введенное при рассмотрении плазменных колебаний в вырожденном электронном газе[3]. В рамках этого приближения коммутационные соотношения для операторов пар сильно упрощаются[4].

С формальной точки зрения, рассматриваемый здесь метод является корректным в пределе высокой плотности, когда взаимодействие можно считать слабым. Для простоты изложения будем считать фермионы бесспиновыми. При необходимости, восстановить спиновую зависимость в окончательных выражениях можно без особого труда.

---

[3] См.: *D. Bohm*, *D. Pines*// Phys. Rev. 1953. V. 92. P. 609–625. В этой работе электронная система описывается с помощью многочастичной антисимметризованной волновой функции, без использования вторичного квантования. Изложение вопроса на более современном языке можно найти в весьма полезной книге: *D. Pines*. The Many-Body Problem.—N. Y.: W. A. Benjamin, Inc., 1961. Помимо авторского текста данная книга содержит также факсимильные копии основных работ по теории многих тел.

[4] Наше изложение опирается на работы Савады, Венцеля и др., в которых был введен введен так называемый «эффективный гамильтониан», описывающий взаимодействие электрон-дырочных пар в приближении случайных фаз. Более подробно с методом эффективного бозонного гамильтониана можно ознакомиться по оригинальным работам: *K. Sawada*// Phys. Rev. 1957. V. 106. P. 372; *K. Sawada*, *K. A. Brueckner*, *N. Fukuda*, *R. Brout*// Phys. Rev. 1957. V. 108. P. 507; *G. Wentzel*// Phys. Rev. 1957. V. 108. P. 1593.

Введем бозе-операторы $c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$, $c^+_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$ электрон-дырочных пар следующим образом:

$$c_{\mathbf{p},\mathbf{k}} = a^+_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}+\mathbf{k}}, \quad c^+_{\mathbf{p},\mathbf{k}} = a^+_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} a_{\mathbf{p}}, \quad |\mathbf{p}| < p_0, \ |\mathbf{p}+\mathbf{k}| > p_0. \tag{8.15}$$

Обратим внимание читателя на ограничение, наложенное на импульсы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{k}$. Оно выбрано так, чтобы при действии оператором $c^+_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$ на основное состояние невзаимодействующей системы всегда рождалась ровно одна пара частица–дырка, а при действии оператором $c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$ на любое возбужденное состояние число пар всегда уменьшалось.

Условия $|\mathbf{p}| < p_0$ и $|\mathbf{p}+\mathbf{k}| > p_0$, при фиксированном $\mathbf{k}$ определяют подмножество ферми-сферы, имеющее в сечении серповидную форму (рис. 8.1). Мы будем обозначать эту область R_k и записывать ограничение (8.15) на $\mathbf{p}$ и $\mathbf{k}$ в виде $\mathbf{p} \in R_k$.

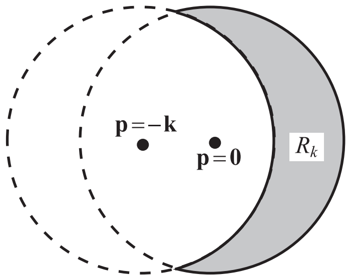

Рис. 8.1

Стратегия наша теперь состоит в том, чтобы представить гамильтониан системы в виде выражения, квадратичного по операторам $c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$, $c^+_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$, и показать, что эти операторы подчиняются обычным бозевским коммутационным соотношениям. При этом интересующая нас задача сведется к задаче о невзаимодействующих осцилляторах. Хотя такое преобразование, разумеется, является приближенным, выясняется, что неточность допускается только для сильно возбужденных состояний, в то время как сотояния с относительно небольшим количеством электрон–дырочных пар описываются совершенно правильно.

Начнем с оператора плотности частиц и рассмотрим приближенное выражение для гармоники плотности:

$$\widetilde{\rho}_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{p}\in R_k} (c_{\mathbf{p},\mathbf{k}} + c^+_{-\mathbf{p},-\mathbf{k}}). \tag{8.16}$$

Заметим, что наложенное условие $\mathbf{p} \in R_k$ не нарушает вещественности оператора плотности $\widetilde{\rho}_{\mathbf{k}} = \widetilde{\rho}^+_{-\mathbf{k}}$. Смысл приближения (8.16) состоит в том, что из точного выражения $\rho_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{p}} a^+_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}+\mathbf{k}}$ исключены матричные элементы, соответствующие «чересчур многочастичным» процессам. Говоря более точно, мы отбрасываем все слагаемые $a^+_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}+\mathbf{k}}$, дающие нуль при применении к любому состоянию с ровно одной электрон-дырочной парой, а также к основному состоянию невзаимодействующей системы.

Подставим выражение (8.16) в гамильтониан (8.1). Получающийся при этом приближенный гамильтониан совпадает с исходным гамильтонианом на состояниях, содержащих небольшое количество пар. Отличие между приближенным и точным гамильтонианами появляется только для достаточно сильно возбужденных состояний.

Чтобы в этом убедиться, рассмотрим коммутационные соотношения получившегося гамильтониана $\widehat{\mathscr{H}}_{\rm int} = (1/2)\sum\limits_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}}\widetilde{\rho}_{\mathbf{k}}\widetilde{\rho}_{-\mathbf{k}}$ с операторами рождения и уничтожения пар $c^+_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$, $c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$. Коммутатор $\bigl[\widehat{\mathscr{H}}_{\rm int}, c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}\bigr]$ описывает динамику флуктуации плотности (8.16). Выразим операторы $\widetilde{\rho}_{\mathbf{k}}$, $c^+_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$ и $c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$ через фермиевские операторы, согласно (8.15), (8.16), подставим их в интересующий нас коммутатор, и вычислим его, пользуясь фермионными коммутационными соотношениями. Мы не будем выписывать результат явно, а заметим лишь, что поскольку оператор $\widehat{\mathscr{H}}_{\rm int}$ — 4-го порядка по фермиевским операторам, а $c^+_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$ и $c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$ — 2-го, результат будет содержать члены 2-го и 4-го порядка по a_p, $a^+_{p'}$.

Исключим из коммутатора все члены, содержащие операторы пар с $\mathbf{k}' \neq \mathbf{k}$. Эти члены либо не сохраняют число пар, либо описывают одновременные переходы с участием нескольких пар[5]. Получающееся приближенное выражение для коммутатора имеет вид

$$\bigl[\widehat{\mathscr{H}}_{\rm int}, c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}\bigr] = -V_{\mathbf{k}}\widetilde{\rho}_{\mathbf{k}},\ \bigl[\widehat{\mathscr{H}}_{\rm int}, c^+_{\mathbf{p},\mathbf{k}}\bigr] = V_{\mathbf{k}}\widetilde{\rho}^+_{\mathbf{k}}. \tag{8.17}$$

Физическим основанием для процедуры, примененной выше к оператору плотности и к коммутаторам $\bigl[\widehat{\mathscr{H}}_{\rm int}, c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}\bigr]$, является сделанное в разд. 8.1 наблюдение, заключающееся в том, что время жизни пары с малой энергией становится очень большим при уменьшении энергии. Поэтому при рассмотрении коммутаторов законно пренебречь процессами, не сохраняющими число пар и приводящими к превращению одной пары в несколько.

Рассмотрим теперь коммутаторы операторов $c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$ и $c^+_{\mathbf{p}',\mathbf{k}'}$. Используя определение (8.15), получаем

$$\bigl[c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}, c^+_{\mathbf{p}',\mathbf{k}'}\bigr] = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}a^+_{\mathbf{p}'+\mathbf{k}'}a_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} + \delta_{\mathbf{p}'+\mathbf{k}',\mathbf{p}+\mathbf{k}}a^+_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}'}, \tag{8.18}$$

причем $\mathbf{p} \in R_k$, $\mathbf{p}' \in R_{k'}$. Применяя приближение случайных фаз, необходимо выделить в правой части (8.18) члены, не создающие новых пар при действии на основное состояние или на состояние с уже имеющимся небольшим количеством пар. Это достигается заменой правой части (8.18) на среднее, взятое по основному состоянию. В результате коммутатор $\bigl[c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}, c^+_{\mathbf{p}',\mathbf{k}'}\bigr]$ оказывается c-числом:

$$\bigl[c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}, c^+_{\mathbf{p}',\mathbf{k}'}\bigr] = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad \bigl[c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}, c_{\mathbf{p}',\mathbf{k}'}\bigr] = 0. \tag{8.19}$$

[5] Исключаемые члены характерны тем, что в представлении взаимодействия их зависимость от времени описывается быстро осциллирующими фазовыми множителями, в то время как все оставляемые члены не зависят от времени. В работе Бома и Пайнса, процитированной на с. 180, было показано, что эти быстро осциллирующие члены дают малые поправки к уравнениям эволюции операторов (8.15), и поэтому их исключение законно. Этому и обязан своим появлением термин «приближение случайных фаз».

(Второй коммутатор в (8.19) получается аналогично.) Таким образом, мы установили, что операторы рождения пар удовлетворяют бозевским коммутационным соотношениям. Отметим, что найденные выше коммутаторы (8.17) могут быть получены непосредственно из (8.19) и найденного выше выражения $\widehat{\mathscr{H}}_{\rm int} = (1/2)\sum_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}}\widetilde{\rho}_{\mathbf{k}}\widetilde{\rho}_{-\mathbf{k}}$. Таким образом, приближение случайных фаз оказывается самосогласованным.

Займемся теперь оператором кинетической энергии $\widehat{\mathscr{H}}_0 = \sum\limits_{\mathbf{p}}(p^2/2m)\,a^+_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}$. Его коммутаторы с операторами рождения и уничтожения пар нетрудно вычислить точно:

$$\bigl[\widehat{\mathscr{H}}_0, c^+_{\mathbf{p},\mathbf{k}}\bigr] = \omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}c^+_{\mathbf{p},\mathbf{k}}, \quad \bigl[\widehat{\mathscr{H}}_0, c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}\bigr] = -\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}, \tag{8.20}$$

где $\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}} = (\mathbf{p}+\mathbf{k})^2/2m - \mathbf{p}^2/2m$. Попытаемся представить оператор кинетической энергии через операторы пар $c^+_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$ и $c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$ таким образом, чтобы это представление обеспечивало правильные коммутационные соотношения (8.20). Для этого достаточно просто взять сумму по $\mathbf{p}$ и $\mathbf{k}$ от $\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}c^+_{\mathbf{p},\mathbf{k}}c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$. Заметим, что условие $\mathbf{p} \in R_k$ обеспечивает положительность $\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$.

Вследствие всего сказанного выше, гамильтониан системы можно представить в следующей эквивалентной форме:

$$\widehat{\mathscr{H}}_{\rm RPA} = \sum_{\mathbf{k}}\Bigl(\sum_{\mathbf{p}\in R_k}\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}c^+_{\mathbf{p},\mathbf{k}}c_{\mathbf{p},\mathbf{k}} + \frac{1}{2}V_{\mathbf{k}}\widetilde{\rho}_{\mathbf{k}}\widetilde{\rho}_{-\mathbf{k}}\Bigr). \tag{8.21}$$

Это выражение квадратично по бозе-операторам $c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$ и $c^+_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$, и поэтому его изучение оказывается весьма простой задачей.

Удобно перейти к каноническим операторам координат и импульсов осцилляторов:

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbf{p},\mathbf{k}} &\equiv \varphi^+_{-\mathbf{p},-\mathbf{k}} = (2\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}})^{-1/2}(c_{\mathbf{p},\mathbf{k}} + c^+_{-\mathbf{p},-\mathbf{k}}),\\ \pi_{\mathbf{p},\mathbf{k}} &\equiv \pi^+_{-\mathbf{p},-\mathbf{k}} = i\left(\frac{1}{2}\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}\right)^{1/2}(c^+_{\mathbf{p},\mathbf{k}} - c_{-\mathbf{p},-\mathbf{k}}).\end{aligned} \tag{8.22}$$

В представлении осцилляторов оператор кинетической энергии есть сумма невзаимодействующих осцилляторов[6]:

$$\widehat{\mathscr{H}}_0 = \sum_{\mathbf{k};\ \mathbf{p}\in R_k}\frac{1}{2}\left(\pi^+_{\mathbf{p},\mathbf{k}}\pi_{\mathbf{p},\mathbf{k}} + \omega^2_{\mathbf{p},\mathbf{k}}\varphi^+_{\mathbf{p},\mathbf{k}}\varphi_{\mathbf{p},\mathbf{k}}\right). \tag{8.23}$$

Взаимодействие в этом представлении записывается так:

$$\widehat{\mathscr{H}}_{\rm int} = \sum_{\mathbf{k}}V_{\mathbf{k}}\Bigl(\sum_{\mathbf{p}\in R_k}\omega^{1/2}_{\mathbf{p},\mathbf{k}}\varphi^+_{\mathbf{p},\mathbf{k}}\Bigr)\Bigl(\sum_{\mathbf{p}'\in R_k}\omega^{1/2}_{\mathbf{p}',\mathbf{k}}\varphi_{\mathbf{p}',\mathbf{k}}\Bigr). \tag{8.24}$$

[6] Мы опускаем константу

$$E_0 = -\sum_{\mathbf{k};\ \mathbf{p}\in R_k}\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}/2, \tag{8.25}$$

появляющуюся из-за некоммутативности операторов $c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$ и $c^+_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$.

Теперь можно диагонализовать гамильтониан $\widehat{\mathscr{H}}_0 + \widehat{\mathscr{H}}_{\rm int}$ с помощью канонического преобразования и найти нормальные моды колебаний системы.

Получающийся спектр частот нормальных колебаний состоит из двух компонент (рис. 8.2). Первая компонента — непрерывный спектр $\omega = \omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$, совпадающий со спектром невзаимодействующей системы. Вторая компонента — коллективная мода с законом дисперсии $\omega(\mathbf{k})$, определяемым из уравнения

$$1 = V_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{p}\in R_k} \frac{2\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}}{\omega^2 - \omega^2_{\mathbf{p},\mathbf{k}}}. \tag{8.26}$$

Это выражение справедливо для бесспиновых частиц. В случае частиц со спином 1/2, суммирование по спинам приводит к дополнительному множителю 2 в правой части (8.26). В задаче 44 будет показано, что при малых $|\mathbf{k}| \ll p_0$ выражение (8.26) тождественно дисперсионному соотношению для коллективных мод, полученному из кинетического уравнения ферми-жидкости (8.7).

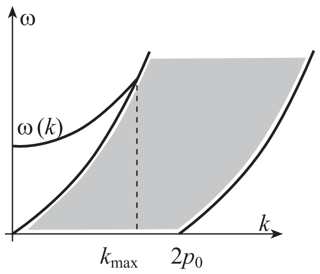

Рис. 8.2

В случае кулоновского взаимодействия, $V_{\mathbf{k}} = 4\pi e^2/\mathbf{k}^2$, коллективные возбуждения представляют собой плазменные волны, имеющие конечную частоту $\omega_0 = (4\pi e^2 n/m)^{1/2}$ при $\mathbf{k} \to 0$. Плазменные колебания существуют в конечном интервале $0 \leqslant |\mathbf{k}| < k_{\max}$, причем их частота выше верхней границы непрерывного спектра. При $|\mathbf{k}| \geqslant k_{\max} \geqslant (4\pi e^2 \nu)^{1/2}$ ветвь плазменных колебаний вливается в непрерывный спектр (см. задачу 44). В этой области частота ω, определяемая из дисперсионного уравнения (8.26), оказывается комплексной, т. е. колебания приобретают конечное затухание.

Коллективные возбуждения, полученные в приближении случайных фаз, оказываются такими же, как в теории ферми-жидкости Ландау. Некоторое отличие имеется только в поведении, предсказываемом в области больших $|\mathbf{k}| > k_{\max}$, где теория ферми-жидкости теряет применимость, поскольку $1/k_{\max}$ — это размер квазичастицы. Если взаимодействие слабое, то приближение случайных фаз дает правильный ответ даже при $|\mathbf{k}| \gtrsim k_{\max}$.

Однако приближение случайных фаз, основывающееся на гамильтониане электрон-дырочных пар, неприменимо в случае сильного взаимодействия. А теория ферми-жидкости, полученная весьма общим феноменологическим образом, имеет смысл и при сильном взаимодействии, и утверждает, что при $|\mathbf{k}| \lesssim k_{\max}$ можно пользоваться квадратичным гамильтонианом пар $\widehat{\mathscr{H}}_{\rm RPA}$ с перенормированными константами, которые определяются функцией Ландау. Таким образом, пертурбативное приближение случайных фаз и феноменологическая теория ферми-жидкости прекрасно дополняют друг друга.

Литература: Теория ферми–жидкости Ландау, включая кинетическое уравнение и коллективные возбуждения, изложена в [6], § 1–6 и [1], § 2. Простой вывод закона дисперсии плазмонов с помощью приближения случайных фаз можно найти в [3], § 9.5, 9.6. Корреляционная и обменная энергии кулоновского взаимодействия в электронной ферми–жидкости рассматривается в [3], § 9.4, 9.8, 9.9, [6], § 85 и [1], § 22. Микроскопическое обоснование теории ферми–жидкости, базирующееся на функциях Грина, приведено в [1], § 18, 19, а также в [6], § 15–21. Полезно также обратиться к оригинальным работам (см. сборник статей, процитированный на с. 180).

8.4. Задачи 43–49

Задача 43. (*Классификация возбуждений ферми-жидкости.*) Рассмотрим двумерную ферми-жидкость с модельной функцией Ландау, отличной от нуля только в s-канале. Взаимодействие квазичастиц в этом случае есть $F(\mathbf{n} - \mathbf{n}') = F_0$. Ферми-поверхность представляет собой окружность, параметризуемую углом $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$. Отклонение функции распределения квазичастиц от равновесия описывается функцией $u(\theta)$. Удобно разложить ее по фурье-гармоникам $u(\theta) = \sum_m e^{im\theta} u_m$ и записать кинетическое уравнение (8.7) в виде

$$\omega u_m = \frac{1}{2} k v_F (\widetilde{u}_{m+1} + \widetilde{u}_{m-1}), \text{ где } \widetilde{u}_m = \begin{cases} u_m & \text{при } m \neq 0, \\ (1+F_0) u_0 & \text{при } m = 0. \end{cases} \tag{8.27}$$

Полную систему решений этого уравнения можно построить, воспользовавшись методами теории рассеяния. Действительно, уравнение (8.27) трансляционно инвариантно по отношению к сдвигам $m \to m \pm 1$ всюду, за исключением $m = 0$. Поэтому можно искать решения в виде $u_m = A^{\pm} e^{i\alpha m}$ отдельно при положительных и отрицательных m, а затем сшить эти выражения при $m = 0$.

Покажите, что при любом вещественном $0 < \alpha < \pi$ имеется два независимых решения указанного вида, описывающие квазичастичные возбуждения с $\theta = \pm\alpha$. Покажите, что кроме них при $F_0 > 0$ имеется одно решение u_m с комплексным α, затухающее при $m \to \pm\infty$. Это решение описывает коллективную нуль-звуковую моду. Квазичастичные решения характеризуются частотами $|\omega| < k v_F$, а коллективная мода лежит за пределами квазичастичного континуума: $\omega(k) > k v_F$.

Можно заметить аналогию с задачей о спектре оператора Шредингера для потенциала, убывающего на бесконечности. В общем случае спектр этого оператора содержит непрерывную и дискретную компоненты. Первая соответствует состояниям рассеяния, а вторая — локализованным состояниям.

Задача 44. (*Плазменные колебания.*) Рассмотрим диаграммы на рис. 8.3 при конечной передаваемой частоте ω и импульсе $\mathbf{k}$. Говорят, что сумма диаграмм на рис. 8.3 описывает эффект *динамической экранировки* затравочного взаимодействия $V_{\mathbf{k}}$, изображенного волнистой линией. Закон дисперсии коллективных возбуждений $\omega(\mathbf{k})$ определяется полюсами заэкранированного взаимодействия.

Рис. 8.3

а. Найдите поляризационный оператор $\Pi(\omega, \mathbf{k})$ при $|\mathbf{k}| \ll p_0$, $\omega \ll E_F$. Считая затравочное взаимодействие кулоновским, $V_{\mathbf{k}} = 4\pi e^2/\mathbf{k}^2$, просуммируйте ряд и получите заэкранированное взаимодействие $V_{\omega,\mathbf{k}}$. Покажите, что в этом приближении закон дисперсии плазменных волн $\omega(\mathbf{k})$ дается соотношением (8.14), полученным из кинетического уравнения ферми-жидкости. Определите поведение $\omega(\mathbf{k})$ при малых и больших $\mathbf{k}$.

б. (*Точка окончания спектра.*) Оказывается, что закон дисперсии плазменных волн заканчивается при некотором $k_{\max}$, вливаясь в континуум квазичастичных возбуждений. Чтобы исследовать этот эффект с помощью диаграмм, показанных на рис. 8.3, необходимо найти поляризационный оператор более точно, чем это было сделано в части а.

Найдите поляризационный оператор при произвольных ω и $\mathbf{k}$. Решая уравнение $V_{\mathbf{k}}\Pi(\omega, \mathbf{k}) = 1$, определите точку окончания спектра $k_{\max}$, $\omega_{\max}$.

в. Убедитесь, что уравнение для частоты плазменных волн $\omega(\mathbf{k})$ совпадает с соотношением (8.26), полученным в результате диагонализации гамильтониана $\mathscr{H}_{\mathrm{RPA}}$ электрон-дырочных пар.

Задача 45. (*Кулоновское экранирование.*) **а.** Электроны в металле экранируют любой внешний электростатический потенциал. Этот эффект можно изучить, рассмотрев диаграммный ряд, показанный на рис. 8.3. Просуммируйте этот ряд в статическом пределе $k \gg \omega/v_F$, считая также, что $k \ll p_0$. Получите формулу Дебая для экранированного кулоновского взаимодействия:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{e^{-\varkappa|\mathbf{r}|}}{|\mathbf{r}|}, \quad \varkappa^2 = 4\pi e^2 \nu. \tag{8.28}$$

Разумеется, экранировка кулоновского взаимодействия в заряженной системе есть чисто классический эффект, возникающий из-за дальнодействия потенциала $1/r$. Для иллюстрации этого обстоятельства, напомним, как решается задача об экранировании в классической плазме.

Внесем в плазму статический заряд $\rho_0(\mathbf{r})$. Возникающий при этом потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона $\nabla^2\Phi(\mathbf{r}) = -4\pi(\delta\rho(\mathbf{r}) + \rho_0(\mathbf{r}))$, где $\delta\rho(\mathbf{r})$ — плотность экранирующего заряда, связанная с потенциалом формулой Больцмана: $\delta\rho(\mathbf{r}) = en\left(e^{-e\Phi(\mathbf{r})/T} - 1\right)$. Получившуюся систему уравнений Пуассона–Больцмана нетрудно линеаризовать:

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{r}) - \varkappa^2\Phi(\mathbf{r}) = -4\pi\rho_0(\mathbf{r}), \quad \varkappa^2 = 4\pi e^2 n/T. \tag{8.29}$$

Следовательно, экранированный потенциал точечного заряда дается таким же выражением (8.28), как и при $T = 0$. Отличие состоит только в величине длины экранирования $\varkappa^{-1}$.

Другое явление, имеющее место не только в ферми-жидкости, но и в классической плазме, — это плазменные колебания.

б. Поучительно решить эту задачу другим способом, используя гамильтониан для электрон-дырочных возбуждений (8.21), выведенный в разд. 8.3. Рассмотрим внешнее поле, взаимодействующее с электронной плотностью. Используя представление (8.16) для оператора плотности, запишем взаимодействие электронов с внешним полем $V^{\mathrm{ext}}(\mathbf{r})$ так:

$$\widehat{\mathscr{H}}_{\mathrm{ext}} = \sum_{\mathbf{k}}\Big(V^{\mathrm{ext}}_{-\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{p}\in R_k}(c_{\mathbf{p},\mathbf{k}} + c^+_{-\mathbf{p},-\mathbf{k}})\Big). \tag{8.30}$$

Это выражение линейно по бозе-операторам $c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$, а гамильтониан (8.21) — квадратичен. Поэтому можно найти отклик плотности на внешнее поле, спроецировав возмущение (8.30) на нормальные моды системы осцилляторов, найдя отклик каждой из этих мод, а затем просуммировав по всем модам. Найдите таким способом отклик электронной плотности на кулоновский потенциал и покажите, что результирующий заэкранированный потенциал совпадает с (8.29).

Задача 46. (*Парамагнитная восприимчивость.*) Рассмотрим ферми-жидкость со спином $1/2$ и контактным взаимодействием между частицами: $V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = g\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. К системе приложено однородное внешнее магнитное поле B. Будем считать, что фермионы незаряжены, так что поле действует только на спин. В этом случае ферми-жидкость описывается гамильтонианом (8.1), к которому добавлен член

$$\mathscr{H}_B = \omega_B \sum_{\mathbf{p}}\left(a^+_{\mathbf{p},\uparrow}a_{\mathbf{p},\uparrow} - a^+_{\mathbf{p},\downarrow}a_{\mathbf{p},\downarrow}\right), \tag{8.31}$$

где $\omega_B = \mu B$ — зеемановская энергия. Поскольку энергии состояний со спином вверх и вниз отличаются на $2\omega_B$, основное состояние системы описывается двумя ферми-сферами, имеющими разные радиусы $p_{0,\downarrow}$ и $p_{0,\uparrow}$. В отсутствие взаимодействия радиусы ферми-сфер даются соотношениями $p^2_{0,\downarrow/\uparrow}/2m = E_F \pm \omega_B$.

а. (*Метод среднего поля.*) Найдите функции Грина $G_\uparrow(\varepsilon, \mathbf{p})$ и $G_\downarrow(\varepsilon, \mathbf{p})$. Для этого вычислите собственно-энергетическую часть в низшем порядке по взаимодействию g, рассмотрев два вклада, прямой и обменный, показанные на рис. 8.4.

Определите плотности частиц $n_\uparrow$ и $n_\downarrow$. Рассмотрите поляризацию $\delta n = n_\downarrow - n_\uparrow$ в слабом поле $\mu B \ll E_F$ и покажите, что парамагнитная восприимчивость есть

$$\chi = \frac{\chi_0}{1 - g\nu_0}, \tag{8.32}$$

где $\chi_0 = \mu^2\nu$ — восприимчивость идеального ферми-газа (см. задачу 24). Знаменатель в (8.32) описывает так называемое обменное усиление восприимчивости, возникающее из-за взаимодействия.

б. (*Спиновая лестница.*) Поучительно получить восприимчивость (8.32) другим способом, не рассматривая изменение основного

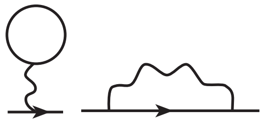

Рис. 8.4

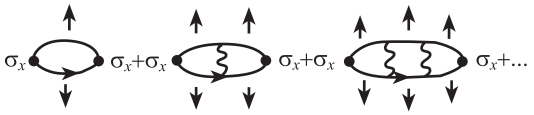

Рис. 8.5

состояния в статическом внешнем поле. Вместо этого можно найти восприимчивость непосредственно, вычисляя линейный отклик спиновой поляризации на слабое внешнее поле на фоне неполяризованного основного состояния.

Покажите, что при суммировании лестничных диаграмм, показанных на рис. 8.5, воспроизводится результат (8.32). Вычисление удобно проводить считая, что возмущающее поле направлено вдоль оси x, и используя гриновские функции из части а, т. е. проквантовав z-проекцию спина[7]. Интерпретируйте расходимость восприимчивости (8.32) при $g\nu_0 \to 1$.

Задача 47. (*Спиновые волны.*) В ферми газе, находящемся во внешнем магнитном поле (см. задачу 46) можно наблюдать парамагнитный резонанс. Для этого прикладывают слабое переменное поле в плоскости, перпендикулярной постоянному полю, и выбирают частоту ω переменного поля так, чтобы ω равнялось зеемановской энергии $2\omega_B$, требуемой для переворота спина.

а. (*Теорема Лармора.*) Найдите поперечную восприимчивость $\chi_\perp(\omega, \mathbf{k})$, суммируя лестничный ряд, изображенный на рис. 8.5. Считайте переменное поле пространственно однородным, т. е. передаваемый импульс $\mathbf{k} = 0$. Используйте функции Грина, найденные в задаче 46 а. Покажите, что поперечная восприимчивость имеет полюс при $\omega = 2\omega_B$, независимо от величины взаимодействия g.

Покажите, что этот результат оказывается справедливым не только для точечного, но и для произвольного взаимодействия между частицами (8.1), независящего от спинов. Общее утверждение об отсутствии сдвига частоты парамагнитного резонанса вследствие межэлектронного взаимодействия называется теоремой Лармора.

Аналогичное утверждение, известное под названием теоремы Кона, имеет место для циклотронного резонанса. Независимо от величины взаимодействия в гамильтониане (8.1), частота циклотронного резонанса в однородном поле B есть $\omega_c = eB/mc$, где m — истинная (а не эффективная!) масса электрона.

[7] При ином выборе направления возмущающего поля относительно координатных осей необходимо было бы рассматривать диаграммы, в которых спиновый индекс может меняться от одной ступени лестницы к следующей. Ответ при этом, разумеется, получился бы точно таким же.

б. (*Закон дисперсии спиновых волн.*) Полюсы двухчастичных функций Грина связаны с коллективными модами. Полюс в поперечной восприимчивости $\chi_\perp(\omega, \mathbf{k})$ соответствует *спиновым волнам* — специфической коллективной моде, возникающей в спин-поляризованной ферми-жидкости.

Найдите закон дисперсии спиновых волн. Для этого просуммируйте диаграммный ряд, показанный на рис. 8.5, при конечных ω и $\mathbf{k}$. Рассмотрите полюс $\chi_\perp(\omega, \mathbf{k})$, даваемый $\omega = 2\omega_B$ при $\mathbf{k} = 0$.

Задача 48. (*Энергия взаимодействия электронов в металле.*) При высокой электронной плотности металл является почти идеальным ферми-газом. Эффекты взаимодействия малы, и их можно вычислять, разлагая интересующие величины в ряд по степеням $e^2/\hbar v_F$.

а. (*Обменная энергия.*) Поправки к энергии системы первого порядка по взаимодействию даются двумя диаграммами, показанными на рис. 8.6. Первый вклад, называемый энергией Хартри, хотя формально и расходится, на самом деле в данном случае полностью компенсируется взаимодействием с положительным фоном и вклада не дает. Второй же вклад, называемый обменной энергией, или энергией Фока, отличен от нуля. Вычислите его и покажите, что обменная энергия отрицательна и зависит от плотности электронов n, как $-e^2 n^{4/3}$.

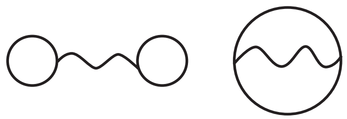

Рис. 8.6

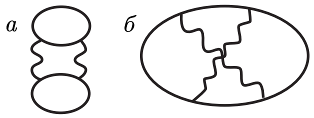

Рис. 8.7

б) (*Члены второго порядка.*) Во втором порядке по взаимодействию есть два существенных вклада (рис. 8.7). Остальные графики второго порядка сокращаются благодаря компенсирующему фону, подобно первому графику на рис. 8.6.

Покажите, что сумма вкладов, изображенных на рис. 8.7, есть

$$\sum_{\mathbf{q}} \sum_{\substack{\mathbf{k}\in R_q,\\ \mathbf{k}'\in R_q}} \frac{V_{\mathbf{q}}\,(2V_{\mathbf{q}} - V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'})}{\xi_{\mathbf{k}} + \xi_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \xi_{\mathbf{k}'}}, \tag{8.33}$$

где $\xi_{\mathbf{p}} = \mathbf{p}^2/2m - E_F$. Первое и второе слагаемое в квадратных скобках соответствует диаграммам *а* и *б* на рис. 8.7.

Покажите, что первый вклад расходится логарифмически на малых $\mathbf{q}$, а второй конечен. Интерпретируйте найденную расходимость.

Задача 49. а. (*Корреляционная энергия*[8].) Как мы убедились в задаче 48, начиная со второго порядка, формальный ряд теории воз-

[8] Кольцевые диаграммы для корреляционной энергии были впервые рассмотрены в работе: *M. Gell-Mann, K. A. Brueckner*// Phys. Rev. 1957. V. 106. P. 364.

мущений по $e^2/\hbar v_F$ для энергии кулоновского взаимодействия в металле содержит расходящиеся члены. Общий порядок действий в подобных случаях — найти наиболее сильно расходящиеся графики в каждом порядке теории возмущений и просуммировать их. Покажите, что в данном случае последовательность наиболее сингулярных графиков (рис. 8.8) имеет вид

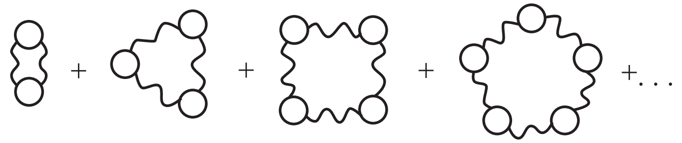

Рис. 8.8

Вычислите сумму этих графиков. Покажите, что с логарифмической точностью по $e^2/\hbar v_F$ ответ можно получить, заменив исходное кулоновское взаимодействие на заэкранированное взаимодействие $V_{\mathbf{k},\omega}$, рассмотренное в задаче 44 (см. рис. 8.3). С этой точностью энергия дается графиком *а* на рис. 8.7, в котором *одна* из линий взаимодействия станет жирной, а другая останется тонкой.

б. Эту задачу можно решить и другим способом, воспользовавшись гамильтонианом электрон-дырочных пар (8.21), квадратичным по бозе-операторам $c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$. Как обсуждалось в разд. 8.3, этот гамильтониан с помощью канонического преобразования может быть представлен в виде суммы невзаимодействующих осцилляторов. Интересующая нас часть энергии системы может быть представлена как суммарная энергия нулевых колебаний всех осцилляторов.

Вклад взаимодействия в энергию системы может быть записан в виде

$$\Delta E \sum_{\alpha} \frac{1}{2}\hbar\omega_\alpha - \sum_{\mathbf{k};\,\mathbf{p}\in R_k} \frac{1}{2}\hbar\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}, \tag{8.34}$$

где $\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$ — частоты нормальных колебаний в невзаимодействующей системе, а ω_α — частоты колебаний во взаимодействующей системе. Найдите энергию взаимодействия электронов (8.34) и покажите, что результат совпадает с корреляционной энергией, найденной в части а.

в. (*Корреляционная энергия классической плазмы.*) Рассмотрим предел высокой температуры $T \gg E_F$. Вычислите корреляционную добавку к термодинамическому потенциалу $\Omega_{\text{кор}}$. Ответ легко получить из графиков рис. 8.8, оставив один член с $\omega_n = 0$ из всей мацубаровской суммы (см. [1], § 22; [6], § 85).

8.5. Решения задач 43–49

43. Уравнение (8.27) инвариантно относительно замены $m \to -m$, поэтому решения можно искать в виде четных и нечетных функций:

$$u_m^{\text{нечет}} = \sin\alpha m, \quad u_m^{\text{чет}} = \begin{cases} \cos(\alpha m + \lambda) & \text{при } m > 0, \\ \cos(\alpha m - \lambda) & \text{при } m < 0, \\ u_0 & \text{при } m = 0. \end{cases} \tag{8.35}$$

Подставляя выражения (8.35) в уравнения (8.27) при $|m| > 1$, находим $\omega = kv_F\cos\alpha$. При этом нечетное решение $u_m^{\text{нечет}}$ удовлетворяет (8.27) автоматически при всех m. Четное же решение, если подставить его в (8.27) при $m = 0, 1$, дает

$$\omega u_0 = kv_F\cos(\alpha + \lambda),$$
$$\omega\cos(\alpha + \lambda) = \frac{1}{2}kv_F((1 + F_0)u_0 + \cos(2\alpha + \lambda)).$$

Решая эти уравнения совместно с соотношением $\omega = kv_F\cos\alpha$, находим

$$\operatorname{tg}\lambda\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_0}{1 + F_0}, \quad u_0 = \frac{\cos\lambda}{1 + F_0}. \tag{8.36}$$

Угловая зависимость $u^{\text{чет}}(\theta)$ и $u^{\text{нечет}}(\theta)$ оказывается довольно интересной. Функция $u^{\text{нечет}}$ есть просто суперпозиция двух свободных одночастичных состояний:

$$u^{\text{нечет}}(\theta) = \frac{i}{2}(\delta(\theta - \alpha) - \delta(\theta + \alpha)). \tag{8.37}$$

Функция же $u^{\text{чет}}(\theta)$ выглядит более сложно. Она имеет при $\theta = \pm\alpha$ как δ-функционные, так и полюсные особенности, в соответствии с (8.9).

Решение, описывающее коллективную моду, будем искать в виде

$$u_m = \begin{cases} e^{-\alpha m} & \text{при } m > 0, \\ e^{\alpha m} & \text{при } m < 0, \\ u_0 & \text{при } m = 0. \end{cases} \tag{8.38}$$

Уравнение (8.27) удовлетворяется при $|m| > 1$, если $\omega = kv_F\operatorname{ch}\alpha$, а при $m = 0, 1$ дает систему уравнений для α и u_0. Решая их, находим

$$u_0 = \frac{1}{1 + F_0}, \quad e^{2\alpha} = 1 + 2F_0. \tag{8.39}$$

Таким образом, скорость нуль-звуковой моды есть

$$s = \frac{\omega}{k} = \frac{v_F}{2}\left((1 + 2F_0)^{1/2} + (1 + 2F_0)^{-1/2}\right). \tag{8.40}$$

Выпишем явно угловую зависимость нуль-звуковых колебаний:

$$u(\theta) = -\frac{F_0}{1 + F_0} + \frac{(\omega^2 - k^2v_F^2)^{1/2}}{\omega - kv_F\cos\theta}. \tag{8.41}$$

Качественная картина такова. При $F_0 \ll 1$ в нуль-звуковых колебаниях принимает участие малая область ферми-поверхности с $\theta \approx F_0$. А при $F_0 \gg 1$ вся ферми-поверхность колеблется как целое: $u(\theta) \sim \cos\theta$.

44. Заэкранированное взаимодействие $V_{\omega,\mathbf{k}}$ дается совокупностью диаграмм, показанных на рис. 8.3. Этот ряд суммируется, как геометрическая прогрессия:

$$V_{\omega,\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}} + V_{\mathbf{k}}^2 \Pi(\omega,\mathbf{k}) + V_{\mathbf{k}}^3 \Pi^2(\omega,\mathbf{k}) + \ldots = \frac{V_{\mathbf{k}}}{1 - V_{\mathbf{k}}\Pi(\omega,\mathbf{k})}. \qquad (8.42)$$

Поляризационный оператор есть

$$\Pi(\omega,\mathbf{k}) = 2i \int G(\varepsilon_-, \mathbf{p}_-) G(\varepsilon_+, \mathbf{p}_+) \frac{d^3p\, d\varepsilon}{(2\pi\hbar)^4}, \qquad (8.43)$$

где $\varepsilon_\pm = \varepsilon \pm \omega/2$, $\mathbf{p}_\pm = \mathbf{p} \pm \mathbf{k}/2$, а множитель 2 возникает при суммировании по спинам.

Интегрируя по частоте ε, находим [9]

$$\Pi(\omega,\mathbf{k}) = 2 \int \frac{n(\mathbf{p}_-) - n(\mathbf{p}_+)}{\omega - \xi(\mathbf{p}_+) + \xi(\mathbf{p}_-)} \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}, \qquad (8.44)$$

где $n(\mathbf{p})$ — распределение Ферми (ср. с выводом (7.85)).

44а. Рассмотрим случай малых $|\mathbf{k}| \ll p_0$. Приближенно можно записать

$$n(\mathbf{p}_-) - n(\mathbf{p}_+) = k \cos\theta\, \delta(|\mathbf{p}| - p_0), \qquad (8.45)$$

где θ — угол между векторами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{k}$. Из-за δ-функции интеграл в (8.44) оказывается ограничен на поверхность ферми-сферы:

$$\Pi(\omega,\mathbf{k}) = 2\nu_0 \int_0^\pi \frac{k v_F \cos\theta}{\omega - k v_F \cos\theta}\, d\cos\theta. \qquad (8.46)$$

Интегрируя по θ, находим

$$\Pi(\omega,\mathbf{k}) = 2\nu_0 \left(\frac{s}{2} \ln \frac{s+1}{s-1} - 1 \right), \qquad (8.47)$$

где $s = \omega/kv_F$. Мы убеждаемся, что уравнение $V_{\mathbf{k}}\Pi(\omega,\mathbf{k}) = 1$, определяющее полюс заэкранированного взаимодействия $V_{\omega,\mathbf{k}}$, тождественно соотношению (8.14), выведенному из кинетического уравнения ферми-жидкости.

Закон дисперсии плазмона при малых $\mathbf{k}$ можно получить, разложив выражение (8.47) по $1/s$:

$$\Pi(\omega,\mathbf{k}) = 2\nu_0 \left(\frac{1}{3s^2} + \frac{1}{5s^4} + \ldots \right). \qquad (8.48)$$

Тогда уравнение $V_{\mathbf{k}}\Pi(\omega,\mathbf{k}) = 1$ принимает вид

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{3}{5} \frac{k^2 v_F^2}{\omega^2} \right) = 1, \qquad (8.49)$$

[9] Здесь и далее подразумевается, что частота в поляризационном операторе $\Pi(\omega,\mathbf{k})$ имеет бесконечно малую мнимую часть: $\omega + i0 \operatorname{sgn}\omega$. В этом случае $\Pi(\omega,\mathbf{k})$ имеет аналитические свойства причинной двухчастичной функции Грина.

где $\omega_0^2 = 4\pi n e^2/m$ ($n = p_0^3/(3\pi^2)$ — плотность частиц). Следовательно, закон дисперсии при малых $\mathbf{k}$ есть

$$\omega^2(\mathbf{k}) = \omega_0^2 + \frac{3}{5}\mathbf{k}^2 v_F^2 + \mathrm{O}\left(\frac{(kv_F)^4}{\omega_0^4} \right). \qquad (8.50)$$

Закон дисперсии при больших $\mathbf{k}$ можно определить, заметив, что выражение (8.47) стремится к бесконечности при $s \to 1$. Поэтому уравнение $V_{\mathbf{k}}\Pi(s) = 1$ имеет решение при произвольно большом $\mathbf{k}$, причем $s \to 1$ при $\mathbf{k} \to \infty$. Это означает, что $\omega(\mathbf{k})$ приближается к $v_F k$ при больших k, все время оставаясь выше границы квазичастичного континуума $\omega(k) = v_F k$.

44б. Как мы сейчас покажем, на самом деле закон дисперсии плазменных волн имеет точку окончания при некотором $k_{\max}$, где происходит слияние с квазичастичным континуумом. Дело в том, что поляризационный оператор (8.44) на самом деле остается конечным на границе континуума. Расходимость же $\Pi(s \to 1) \to \infty$, полученная в части а, есть следствие принятого приближения (8.45). Конечность поляризационного оператора приводит к тому, что уравнение $V_{\mathbf{k}}\Pi(\omega,\mathbf{k}) = 1$ не имеет решений за пределами квазичастичного континуума при достаточно больших $|\mathbf{k}|$.

Найдем $\Pi(\omega,\mathbf{k})$ точно, не используя приближение (8.45). Для этого перепишем выражение (8.44) в виде

$$\Pi(\omega,\mathbf{k}) = 2 \int \left(\frac{n(\mathbf{p})}{\omega - \mathbf{k}^2/2m - \mathbf{kv}} - \frac{n(\mathbf{p})}{\omega + \mathbf{k}^2/2m - \mathbf{kv}} \right) \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}, \qquad (8.51)$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m$. В этом выражении удобно сначала проинтегрировать по компонентам $\mathbf{p}$, перпендикулярным вектору $\mathbf{k}$. Получается

$$\Pi(\omega,\mathbf{k}) = 2 \int_{-p_0}^{p_0} \left(\frac{\pi(p_0^2 - p_x^2)}{\omega - k^2/2m - kp_x/m} - \frac{\pi(p_0^2 - p_x^2)}{\omega + k^2/2m - kp_x/m} \right) \frac{dp_x}{(2\pi\hbar)^3}, \qquad (8.52)$$

где p_x есть компонента $\mathbf{p}$ вдоль $\mathbf{k}$. Оставшееся интегрирование по p_x выполняется элементарно. Результат удобно записать в виде

$$\Pi(\omega,\mathbf{k}) = \frac{\nu}{8a} \left(F(s-a) - F(s+a) \right), \quad a = \frac{k}{2p_0}, \; s = \frac{\omega}{v_F k}, \qquad (8.53)$$

где

$$F(u) = \int_{-1}^{1} \frac{1-x^2}{u-x} dx = 2u + (1-u^2) \ln \frac{u+1}{u-1}. \qquad (8.54)$$

Выражения (8.53), (8.54) определяют точный поляризационный оператор.

Проверим, что при $k \ll p_0$ получается выражение (8.47), найденное выше. Действительно, при $a = k/2p_0 \to 0$ выражение (8.53) упрощается:

$$\Pi(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{\nu}{4} F'(s) = -\frac{\nu}{4}\left(4 - 2s \ln \frac{s+1}{s-1}\right), \tag{8.55}$$

что совпадает с (8.47).

Теперь воспользуемся выражениями (8.53), (8.54) и определим точку окончания спектра плазмонов. Граница квазичастичного континуума есть $\omega = v_F k + k^2/2m$. Это условие можно записать как $s - a = 1$. Поэтому точка окончания спектра, если таковая имеется, должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\nu}{8a}\left(F(1) - F(1+2a)\right) = \frac{k^2}{4\pi e^2}. \tag{8.56}$$

Это уравнение нетрудно переписать в виде

$$(1+a)\ln\frac{1+a}{a} - 1 = \frac{2k^2}{\varkappa^2}, \tag{8.57}$$

где $\varkappa^2 = 4\pi e^2 \nu$. Покажем, что в интервале $0 < a \leqslant 1$ у уравнения (8.57) всегда имеется ровно одно решение. Действительно, левая часть (8.57) при $0 < a < 0,5$ монотонно убывает от ∞ до значения порядка единицы, в то время как правая часть (8.57) монотонно возрастает от 0 до значения порядка $p_0^2/\varkappa^2$. В то же время $e^2/\hbar v_F \ll 1$, поскольку мы занимаемся теорией возмущений в пределе большой плотности. Поэтому $p_0^2/\varkappa^2 \gg 1$, и значит у уравнения (8.57) имеется корень, причем ровно один.

Из сказанного также следует, что решение лежит в области $a \ll 1$. Поэтому уравнение (8.57) можно упростить, отбросив в левой части малые члены. Получаем $\ln(2p_0/ek) = 2k^2/\varkappa^2$, где $e = 2,71828\ldots$ С логарифмической точностью решение этого уравнения есть

$$k_{\max} = \varkappa\left(\frac{1}{2}\ln\frac{p_0}{\varkappa}\right)^{1/2}. \tag{8.58}$$

Находим частоту при $k = k_{\max}$:

$$\omega_{\max} = v_F k_{\max} = \omega_0\left(\frac{3}{2}\ln\frac{p_0}{\varkappa}\right)^{1/2}. \tag{8.59}$$

При $e^2/\hbar v_F \ll 1$ частота в точке окончания спектра $\omega_0 < \omega_{\max} \ll \varepsilon_F$.

Подчеркнем еще раз, что ключевым обстоятельством является отсутствие расходимости $\Pi(\omega, \mathbf{k})$ на границе квазичастичного спектра. Оценить величину поляризационного оператора можно и не вычисляя $\Pi(\omega = v_F|\mathbf{k}|)$ точно. Достаточно заметить, что ширина пояска, в котором сосредоточена функция $n(\mathbf{p}_-) - n(\mathbf{p}_+)$ при малых $\mathbf{k}$ порядка $|\mathbf{k}|$. Поэтому δ-функция в (8.45) имеет ненулевую «ширину» порядка $|\mathbf{k}|$. В результате, при $s = \omega/v_F k = 1$ логарифмическая расходимость выражения (8.47) обрезается на $s - 1 \approx k/p_0$, и получается $\Pi(\omega = v_F|\mathbf{k}|) = \nu_0 \ln(p_0/k)$. Нетрудно видеть, что уравнение $V_{\mathbf{k}}\Pi = 1$ с логарифмической точностью совпадает с (8.57).

44в. Рассмотрим теперь коллективные моды, пользуясь представлением осцилляторов электрон-дырочных пар. Гамильтониан $\mathscr{H}_{\mathrm{RPA}}$, даваемый суммой (8.23) и (8.24), квадратичен. Поэтому диагонализация производится так же, как и в задаче о многомерном классическом осцилляторе. Уравнения на собственные значения имеют вид

$$\omega^2 \varphi_{\mathbf{p},\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}^2 \varphi_{\mathbf{p},\mathbf{k}} + 2\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}^{1/2} V_{\mathbf{k}}\Big(\sum_{\mathbf{p}' \in R_k} \omega_{\mathbf{p}',\mathbf{k}}^{1/2} \varphi_{\mathbf{p}',\mathbf{k}}\Big). \tag{8.60}$$

Находим

$$\varphi_{\mathbf{p},\mathbf{k}} = \frac{2\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}^{1/2}}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}^2} V_{\mathbf{k}}\Big(\sum_{\mathbf{p}' \in R_k} \omega_{\mathbf{p}',\mathbf{k}}^{1/2} \varphi_{\mathbf{p}',\mathbf{k}}\Big). \tag{8.61}$$

Умножая эти равенства на $\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}^{1/2}$ и суммируя по $\mathbf{k}$, $\mathbf{p}$ и спинам, получаем уравнение самосогласования:

$$1 = 2V_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{p} \in R_k} \frac{2\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}^2}, \tag{8.62}$$

(коэффициент 2 перед $V_{\mathbf{k}}$ — спиновое вырождение).

Итак, мы убедились в справедливости соотношения (8.26). Проверим теперь, что оно совпадает с $1 = V_{\mathbf{k}}\Pi(\omega, \mathbf{k})$. Для этого в выражении (8.44) для поляризационного оператора разделим область интегрирования по $\mathbf{p}$ на две под-области: $n(\mathbf{p}_-) > n(\mathbf{p}_+) = 0$ и $n(\mathbf{p}_-) < n(\mathbf{p}_+) = 1$. Простым сдвигом $\mathbf{p} \to \mathbf{p} + \mathbf{k}/2$ в первом случае и $\mathbf{p} \to \mathbf{p} - \mathbf{k}/2$ — во втором, получаем области R_k и R_{-k}. Делая в интеграле по R_{-k} замену $\mathbf{k} \to -\mathbf{k}$, $\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$, не меняющую результата, приводим поляризационный оператор (8.44) к виду:

$$\Pi(\omega, \mathbf{k}) = 2\sum_{\mathbf{p} \in R_k}\left(\frac{1}{\omega - \omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}} - \frac{1}{\omega + \omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}}\right). \tag{8.63}$$

Таким образом, действительно, соотношение $1 = V_{\mathbf{k}}\Pi(\omega, \mathbf{k})$, полученное суммированием диаграмм, есть не что иное, как (8.62).

В заключение отметим, что хотя точный поляризационный оператор (8.53), (8.54) и может оказаться полезным в некоторых случаях, обычно бывает совершенно достаточно пользоваться выражением (8.47), соответствующим приближению кинетического уравнения ферми-жидкости.

45а. Сумма ряда на рис. 8.3 в статическом пределе $\omega = 0$ равна

$$\Phi(\mathbf{k}) = \frac{V_{\mathbf{k}}}{1 - V_{\mathbf{k}}\Pi(\mathbf{k})}. \tag{8.64}$$

Поляризационный оператор (8.47) при $\omega = 0$ есть $\Pi(s = 0) = -\nu$, а $V_{\mathbf{k}} = 4\pi e^2/\mathbf{k}^2$, поэтому

$$\Phi(\mathbf{k}) = \frac{4\pi e^2}{\mathbf{k}^2 + \varkappa^2}, \tag{8.65}$$

где $\varkappa^2 = 4\pi e^2 \nu$. Делая преобразование Фурье, получаем искомое выражение (8.28). В справедливости последнего шага легче всего убедиться, не вычисляя фурье-образ непосредственно, а проверяя, что $(\nabla^2 - \varkappa^2)\,\Phi(\mathbf{r}) = -4\pi e^2 \delta^{(3)}(\mathbf{r})$.

Интересно отметить следующее. Вопреки ожиданиям, потенциал на большом расстоянии от заряда в ферми-газе спадает вовсе не экспоненциально. Дело в том, что вокруг внесенного заряда возникают фриделевские осцилляции плотности наведенного заряда (см. задачи 8, 23), амплитуда которых спадает степенным образом, как $1/r^3$. Формально это проявляется в том, что поляризационный оператор $\Pi_{\omega=0}(\mathbf{k})$ имеет слабую особенность при $|\mathbf{k}| = 2p_0$. Чтобы ее найти, воспользуемся точным выражением (8.53), (8.54). Получаем

$$\Pi_{\omega=0}(\mathbf{k}) = -\frac{\nu}{4a}\left(2a - (1-a^2)\ln\frac{1+a}{1-a}\right), \tag{8.66}$$

где $a = |\mathbf{k}|/2p_0$. Особенность при $a = 1$ и дает главный вклад в потенциал при больших $\mathbf{r}$.

Оценим осциллирующую компоненту потенциала, возникающего при возмущении электронной системы внешним потенциалом $V^{\text{ext}}(\mathbf{r})$. Заэкранированный потенциал в этом случае дается выражением (8.64) с $V_{\mathbf{k}}^{\text{ext}}$ в числителе. Выделяя особенность при $|\mathbf{k}| = 2p_0$ и делая фурье-преобразование, получаем

$$\Phi_{\text{osc}}(\mathbf{r}) \approx \frac{e^2}{4\pi\hbar v_F}\, V^{\text{ext}}_{|\mathbf{k}|=2p_0}\, \frac{\cos(2p_0|\mathbf{r}|)}{|\mathbf{r}|^3}. \tag{8.67}$$

Отметим, что при $\varkappa \ll p_0$ относительно медленно убывающий фриделевский вклад (8.67) не противоречит экспоненциальной зависимости (8.28). Чтобы в этом убедиться, достаточно усреднить распределение потенциала (8.64) по большому числу осцилляций. Усредненный потенциал спадает экспоненциально, в соответствии с (8.28).

45 б. Рассмотрим задачу об экранировке в ферми-жидкости, пользуясь представлением осцилляторов (8.23), (8.24). Взаимодействие с внешним полем (8.30) линейно по смещениям осцилляторов:

$$\widehat{\mathscr{H}}_{\text{ext}} = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{\mathbf{p}\in R_k} V^{\text{ext}}_{-\mathbf{k}}(2\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}})^{1/2}\varphi_{\mathbf{p},\mathbf{k}} + \text{h.c.} \tag{8.68}$$

Нам понадобятся средние смещения осцилляторов, которые нетрудно найти из уравнений

$$\omega^2_{\mathbf{p},\mathbf{k}}\varphi_{\mathbf{p},\mathbf{k}} + (\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}})^{1/2} V_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{p}'\in R_k}(\omega_{\mathbf{p}',\mathbf{k}})^{1/2}\varphi_{\mathbf{p}',\mathbf{k}} = -(2\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}})^{1/2} V^{\text{ext}}_{\mathbf{k}}. \tag{8.69}$$

Пользуясь выражением (8.16), записываем гармоники плотности

$$\rho_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{p}\in R_k}(2\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}})^{1/2}\varphi_{\mathbf{p},\mathbf{k}} \tag{8.70}$$

и, решая уравнения (8.69), находим

$$\rho_{\mathbf{k}}(1 - \Pi(\mathbf{k})V_{\mathbf{k}}) = \Pi(\mathbf{k})V^{\text{ext}}_{\mathbf{k}}, \quad \Pi(\mathbf{k}) = -\sum_{\mathbf{p}\in R_k}\frac{4}{\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}}. \tag{8.71}$$

Согласно задаче 44 в, $\Pi(\mathbf{k})$ есть не что иное, как поляризационный оператор $\Pi(\omega, \mathbf{k})$ при $\omega = 0$. Поэтому заэкранированный потенциал

$$V^{\text{tot}}_{\mathbf{k}} = V^{\text{ext}}_{\mathbf{k}} + V_{\mathbf{k}}\rho_{\mathbf{k}}\frac{V^{\text{ext}}_{\mathbf{k}}}{1 - V_{\mathbf{k}}\Pi(\mathbf{k})} \tag{8.72}$$

совпадает с (8.64).

46 а. В первом порядке по взаимодействию имеется два вклада в собственно-энергетическую часть, показанных на рис. 8.4. В случае короткодействия интегрирование по внутренним частоте и импульсу дают просто плотность частиц, в первой диаграмме $n_\uparrow + n_\downarrow$, а во второй — $n_\uparrow$ или $n_\downarrow$, в зависимости от спинового индекса внешней линии. При этом существенно, что знаки первого и второго вкладов противоположны, поскольку во второй диаграмме на рис. 8.4 отсутствует фермионная петля. Поэтому

$$\Sigma_\uparrow = g(n_\uparrow + n_\downarrow) - gn_\uparrow = gn_\downarrow, \;\; \Sigma_\downarrow = g(n_\uparrow + n_\downarrow) - gn_\downarrow = gn_\uparrow. \tag{8.73}$$

Величина Σ есть сдвиг химического потенциала в результате взаимодействия. То обстоятельство, что Σ для частиц с одной поляризацией спина зависит только от плотности частиц с противоположной поляризацией спина, имеет простой смысл. По принципу Паули фермионы с одинаковым спином никогда не оказываются в одной и той же точке. Поэтому контактное взаимодействие между такими фермионами отсутствует.

Теперь записываем функции Грина:

$$G_\uparrow(\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{1}{\varepsilon - \xi(p) - \omega_B - \Sigma_\uparrow}, \;\; G_\downarrow(\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{1}{\varepsilon - \xi(p) + \omega_B - \Sigma_\downarrow}. \tag{8.74}$$

Эти выражения позволяют найти плотности частиц:

$$n_\uparrow = \frac{4\pi p^3_{0,\uparrow}}{3(2\pi\hbar)^3}, \quad n_\downarrow = \frac{4\pi p^3_{0,\downarrow}}{3(2\pi\hbar)^3}, \tag{8.75}$$

где

$$\frac{p^2_\uparrow}{2m} = E_F - \omega_B - \Sigma_\uparrow, \quad \frac{p^2_\downarrow}{2m} = E_F + \omega_B - \Sigma_\downarrow. \tag{8.76}$$

Из этих соотношений нетрудно найти, как меняются плотности $n_\uparrow$ и $n_\downarrow$ при включении слабого поля $\omega_B \ll E_F$:

$$\delta n_\uparrow = \nu_0(-\omega_B - g\,\delta n_\downarrow), \quad \delta n_\downarrow = \nu_0(\omega_B - g\,\delta n_\uparrow). \tag{8.77}$$

Решая систему, находим

$$\delta n_\downarrow = -\delta n_\uparrow = \frac{\nu_0\omega_B}{1 - g\nu_0}. \tag{8.78}$$

Намагниченность равна $\mu(\delta n_\uparrow - \delta n_\downarrow)$. В результате получаем восприимчивость

$$\chi = 2\,\frac{\mu^2\nu_0}{1 - g\nu_0}, \tag{8.79}$$

что есть требуемый результат (8.32).

46б. Лестничный ряд, показанный на рис. 8.5, суммируется как геометрическая прогрессия:

$$\chi(\omega, \mathbf{k}) = -2\mu^2 \frac{\Pi(\omega, \mathbf{k})}{1 + g\Pi(\omega, \mathbf{k})}. \tag{8.80}$$

Множитель 2 возникает из-за того, что направления поляризации спина в верхней и нижней ноге лестницы можно выбрать двумя различными способами. (Более формально, $2 = \mathrm{Tr}\,\sigma_x^2$.)

Очень существенное отличие ряда (8.80) от ряда (8.42) для экранированного потенциала, рассматривавшегося в задачах 44 и 45, заключается в знаке «+» в знаменателе (8.80). Знак оказывается другим из-за того, что в ряде (8.42) для экранировки n-й член содержит $n-1$ фермионную петлю, что дает множитель $(-1)^{n-1}$. В то же время, каждая из диаграмм, изображенных на рис. 8.5, образована всего одной петлей, поэтому дополнительного множителя $(-1)^n$ не возникает.

В статическом пределе $k, \omega \to 0$, $k \gg \omega/v_F$, поляризационный оператор $\Pi = -\nu_0$. (В данном случае суммирования по спинам в Π не производится, поэтому ответ дается плотностью состояний ν_0 с одной проекцией спина.) Подставляя $\Pi = -\nu_0$ в (8.80), получаем восприимчивость (8.32).

Расходимость восприимчивости при $g\nu_0 \to 1$ означает, что система становится неустойчивой по отношению к спиновым флуктуациям. Эта неустойчивость связана с переходом в ферромагнитное состояние.

Критерий ферромагнитного перехода $\nu_0 g > 1$ называется *соотношением Стонера*. Оно может быть получено элементарными средствами. Пусть $n_\uparrow$ и $n_\downarrow$ — плотности электронов со спинами вверх и вниз соответственно. Тогда средняя плотность спина равна $m = n_\uparrow - n_\downarrow$, а полная плотность частиц $n_0 = n_\uparrow + n_\downarrow$. В основном состоянии ферми-газа $n_\uparrow = n_\downarrow = n_0/2$. Пусть в системе каким-то образом число электронов со спином вверх превышает число электронов со спином вниз. Энергия такого состояния отличается от энергии основного состояния. Вычислив энергию идеального ферми-газа как функцию его плотности и разложив до второго порядка по отклонению плотности от равновесной, получим

$$\delta E_0 = \frac{1}{2\nu_0}\left(\delta n_\uparrow^2 + \delta n_\downarrow^2\right) = \frac{m^2}{4\nu_0}. \tag{8.81}$$

Теперь вычислим энергию взаимодействия электронов. Поскольку $V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = g\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, то взаимодействуют лишь электроны с противоположно направленными спинами (ибо два электрона с одинаковыми спинами не могут одновременно находиться в одной точке). Поэтому энергия взаимодействия электронов есть $g\,n_\uparrow\,n_\downarrow$, откуда

$$\delta E_{\mathrm{int}} = g\,\delta n_\uparrow\,\delta n_\downarrow = -\frac{g}{4}\,m^2. \tag{8.82}$$

Таким образом, энергия системы зависит от магнитного момента следующим образом:

$$\delta E_0 + \delta E_{\mathrm{int}} = \frac{m^2}{4\nu_0}\,(1 - g\nu_0). \tag{8.83}$$

Теперь видно, что при $g\nu_0 < 1$ появление ненулевого магнитного момента энергетически невыгодно, а при $g\nu_0 > 1$ — выгодно. В этом и состоит причина обнаруженной нами неустойчивости.

47. Восприимчивость $\chi_\perp(\omega, \mathbf{k})$ дается в общем виде диаграммами лестничного ряда, изображенного на рис. 8.5. Сумма этого ряда есть

$$\chi_\perp(\omega, \mathbf{k}) = -2\mu^2 \frac{\Pi_{\uparrow\downarrow}(\omega, \mathbf{k})}{1 + g\Pi_{\uparrow\downarrow}(\omega, \mathbf{k})}. \tag{8.84}$$

Это выражение получается точно так же, как (8.80), причем в данном случае поляризационный оператор $\Pi_{\uparrow\downarrow}(\omega, \mathbf{k})$ нужно найти для состояния, поляризованного внешним полем.

Интересующий нас поляризационный оператор есть

$$\Pi_{\uparrow\downarrow}(\omega, \mathbf{k}) = i\int G_\uparrow(\varepsilon_-, \mathbf{p}_-)G_\downarrow(\varepsilon_+, \mathbf{p}_+)\frac{d^3p\,d\varepsilon}{(2\pi\hbar)^4}, \tag{8.85}$$

где $\varepsilon_\pm = \varepsilon \pm \omega/2$, $\mathbf{p}_\pm = \mathbf{p} \pm \mathbf{k}/2$, а соответствующие функции Грина были найдены в задаче 46а.

Подставляя в (8.85) выражения (8.74) для $G_\uparrow$ и $G_\downarrow$, и интегрируя по частоте ε, находим

$$\Pi_{\uparrow\downarrow}(\omega, \mathbf{k}) = \int \frac{n_\downarrow(\mathbf{p}_-) - n_\uparrow(\mathbf{p}_+)}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} - 2\omega_B - \Sigma_\uparrow + \Sigma_\downarrow}\,\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}, \tag{8.86}$$

где $n_\uparrow(\mathbf{p})$ и $n_\downarrow(\mathbf{p})$ — распределения Ферми для двух поляризаций спина. Величины $\Sigma_\uparrow$ и $\Sigma_\downarrow$ даются выражениями (8.73), как и раньше.

47а. Пусть $\mathbf{k} = 0$. В этом случае подынтегральное выражение в (8.86) зависит от $\mathbf{p}$ только через $n_\uparrow(\mathbf{p})$ и $n_\downarrow(\mathbf{p})$. Поэтому интеграл по d^3p дает

$$\Pi_{\uparrow\downarrow}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{n_\downarrow - n_\uparrow}{\omega - 2\omega_B - gn_\downarrow + gn_\uparrow}, \tag{8.87}$$

где $n_\uparrow$ и $n_\downarrow$ — плотности частиц со спином вверх и вниз.

Подставляя (8.87) в (8.84), получаем

$$\chi_\perp(\omega)_{\mathbf{k}=0} = 2\mu^2 \frac{\dfrac{n_\downarrow - n_\uparrow}{\omega - 2\omega_B - g(n_\downarrow - n_\uparrow)}}{1 + g\,\dfrac{n_\downarrow - n_\uparrow}{\omega - 2\omega_B - g(n_\downarrow - n_\uparrow)}} = 2\mu^2\,\frac{n_\downarrow - n_\uparrow}{\omega - 2\omega_B}. \tag{8.88}$$

Таким образом, при $\mathbf{k} = 0$ поперечная восприимчивость совершенно не зависит от взаимодействия. В частности, резонансная частота $\omega = 2\omega_B$ остается такой же, как и в невзаимодействующей системе.

Нетрудно убедиться в том, что утверждение теоремы Лармора об отсутствии сдвига резонансной частоты справедливо для произвольного взаимодействия, не зависящего от спина. Гамильтониан фермионов в магнитном поле есть сумма (8.1) и (8.31). При этом члены (8.1) коммутируют с оператором полного спина системы $\widehat{s}^i = \int \psi_\alpha(\mathbf{r})\sigma^i_{\alpha\beta}\psi_\beta(\mathbf{r})d^3r$, а зеемановский член (8.31) — нет. Поэтому

$$\frac{d\widehat{\mathbf{s}}}{dt} = i\,[\mathscr{H}_{\mathrm{tot}}, \widehat{\mathbf{s}}] = i\,[\mathscr{H}_B, \widehat{\mathbf{s}}] = -2\mu\mathbf{B}\times\widehat{\mathbf{s}}. \qquad (8.89)$$

То обстоятельство, что свободная прецессия $\mathbf{s}$ происходит с частотой $2\omega_B$, как раз и означает, что при возбуждении внешним переменным полем резонанс имеет место при $\omega = 2\omega_B$.

47б. Рассмотрим теперь $\chi_\perp(\omega,\mathbf{k})$ при $\mathbf{k}\neq 0$. Мы хотим найти зависимость положения полюса $\chi_\perp \sim (\omega-\omega(\mathbf{k}))^{-1}$ от $\mathbf{k}$. Как станет ясно ниже, интерес представляют $|\mathbf{k}| \approx g(n_\downarrow - n_\uparrow)/v_F$. Поэтому в слабом магнитном поле $\omega_B \ll E_F$, когда $n_\downarrow - n_\uparrow \ll n_{\mathrm{tot}}$, в числителе (8.86) можно сделать замену:

$$n_\downarrow(\mathbf{p}_-) - n_\uparrow(\mathbf{p}_+) \longrightarrow \Delta n\,\delta\Big(\frac{|\mathbf{p}|}{p_0} - 1\Big), \qquad (8.90)$$

где $\Delta n = n_\downarrow - n_\uparrow$. Интеграл по поверхности ферми-сферы легко вычисляется:

$$\Pi_{\uparrow\downarrow}(\omega,\mathbf{k}) = \frac{\Delta n}{2}\int\limits_0^\pi \frac{\sin\theta\, d\theta}{\widetilde{\omega} - kv_F\cos\theta} = \frac{\Delta n}{2kv_F}\ln\frac{\widetilde{\omega}+kv_F}{\widetilde{\omega}-kv_F}, \qquad (8.91)$$

где $\widetilde{\omega} = \omega - 2\omega_B - g\Delta n$.

Полюс $\chi_\perp(\omega,\mathbf{k})$ определяется уравнением $g\Pi_{\uparrow\downarrow}(\omega,\mathbf{k}) = -1$, решение которого в данном случае нетрудно выписать в явной форме:

$$\omega(\mathbf{k}) = 2\omega_B + g\Delta n(1 - u\,\mathrm{cth}\,u), \quad u = \frac{kv_F}{g\Delta n}. \qquad (8.92)$$

Закон дисперсии спиновых волн (8.92) обладает следующими свойствами: при $u \ll 1$

$$\omega(\mathbf{k}) = 2\omega_B - kv_F\,\mathrm{cth}\,u, \qquad (8.93)$$

при $u \gg 1$ выражение (8.92) стремится к $2\omega_B + g\Delta n - kv_F$. При этом частота $\omega(\mathbf{k})$ вещественна для всех u, т. е. затухание отсутствует.

Описанное поведение при больших u определяется сингулярностью выражения (8.91) при $\widetilde{\omega} = -kv_F$. Как мы убедились в задаче 44б, эта сингулярность есть следствие принятого приближения (8.90), сводящего интегрирование в (8.86) по тонкому трехмерному слою к интегралу по двумерной ферми-поверхности. На самом же деле поляризационный оператор (8.86) на границе квазичастичного спектра, т. е. при $\widetilde{\omega} = \pm kv_F$, принимает конечное значение. По тем же причинам, что и в задаче 44б, логарифмическую сингулярность в (8.91) следует обрезать при $|\widetilde{\omega} \pm kv_F| \approx k^2/2m$. В результате уравнение $g\Pi_{\uparrow\downarrow}(\omega,\mathbf{k}) = -1$,

дающее закон дисперсии спиновых волн, имеет решение только при k меньших некоторого $k_{\max}$. Точка окончания закона дисперсии $k_{\max}$ находится из уравнения

$$\frac{g\Delta n}{2kv_F}\ln\frac{p_0}{k} = 1. \qquad (8.94)$$

С логарифмической точностью $k_{\max} = (g\Delta n/2v_F)\ln(E_F/g\Delta n)$. При $k > k_{\max}$ частота спиновых волн оказывается внутри квазичастичного континуума $|\widetilde{\omega}| < v_F|k|$ (рис. 8.9). Спиновые волны с такими k характеризуются конечным временем затухания, т. е. комплексной частотой $\omega(\mathbf{k})$.

48а. Вычислим обменную энергию [10], даваемую второй диаграммой на рис. 8.6. Соответствующее выражение для плотности термодинамического потенциала на единицу объема в мацубаровской технике равно

$$\Delta\Omega = -\frac{1}{2}T^2 \lim_{\tau_{1,2}\to+0}\sum_{\varepsilon_{1,2},\,p_{1,2}} G(i\varepsilon_1,\,\mathbf{p}_1)G(i\varepsilon_2,\,\mathbf{p}_2)\,V_{\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2}\,e^{i\varepsilon_1\tau_1+i\varepsilon_2\tau_2}, \qquad (8.95)$$

где $G(i\varepsilon,\mathbf{p}) = 1/(i\varepsilon - \xi_\mathbf{p})$ — функция Грина электронов, а $V_\mathbf{k} = 4\pi e^2/\mathbf{k}^2$ — фурье-компонента потенциала взаимодействия.

Отметим, что при выписывании выражения (8.95) имеется следующая тонкость. Поскольку взаимодействие в (8.1) считается мгновенным, в аналитических выражениях для диаграмм на рис. 8.6 возникает функция Грина, взятая при совпадающих временах. Но $G(\mathbf{r},\tau)$ имеет скачок при $\tau = 0$, и из-за этого выражения оказываются формально неопределенными. Эта трудность обычно преодолевается следующим образом. Оператор взаимодействия (8.1) содержит нормально упорядоченное произведение ψ-операторов, в котором $\widehat{\psi}$ всегда стоит правее $\widehat{\psi}^+$, поэтому функцию Грина с совпадающими временами следует понимать как

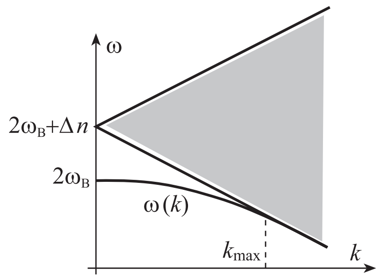

Рис. 8.9

$$G(\mathbf{r},\,0) \equiv \lim_{\tau\to+0} G(\mathbf{r},\,-\tau). \qquad (8.96)$$

Это соглашение и использовано в (8.95).

[10] Нетрудно убедиться в том, что энергия Хартри, даваемая первой диаграммой на рис. 8.6, в модели желе точно сокращается при учете взаимодействия с однородным компенсирующим положительным фоновым зарядом. Мы не будем на этом останавливаться.

Суммирования по ε_1 и ε_2 в (8.95) оказываются независимыми. Воспользовавшись выражением

$$T \lim_{\tau\to+0} \sum_{\varepsilon_1} G(i\varepsilon_1,\,\mathbf{p})\, e^{i\varepsilon_1\tau} = n_F(\xi_{\mathbf{p}}) \tag{8.97}$$

(см. формулу (7.59) в решении задачи 35), получаем

$$\Delta\Omega_{\text{обм}} = -\int n_F(\xi_{\mathbf{p}_1})\, n_F(\xi_{\mathbf{p}_2})\, V_{\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2}\, \frac{d^3p_1\, d^3p_2}{(2\pi)^6} \tag{8.98}$$

(множитель 1/2 исчез при суммировании по спину).

Теперь удобно перейти в координатное представление. Подставляя в (8.98) $V_{\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2} = \int V(\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)\mathbf{r}} d^3r$, получаем

$$\Delta\Omega_{\text{обм}} - \int V(\mathbf{r})\, |I(\mathbf{r})|^2 d^3r, \quad I(\mathbf{r}) = \int n_F(\xi_{\mathbf{p}})\, e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} \frac{d^3p}{(2\pi)^3}. \tag{8.99}$$

Рассмотрим случай $T = 0$. Интеграл $I(\mathbf{r})$ легко вычисляется:

$$I(\mathbf{r}) = \int\limits_{|\mathbf{p}|<p_0} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} = \int\limits_0^{p_0} \frac{\sin pr}{pr} \frac{4\pi p^2\, dp}{(2\pi)^3} = \frac{\sin p_0 r - p_0 r \cos p_0 r}{2\pi^2\, r^3}. \tag{8.100}$$

Отсюда обменная энергия (8.99) есть

$$\Delta\Omega_{\text{обм}} = -\frac{e^2}{4\pi^4} \int\limits_0^{\infty} \frac{\left(\sin p_0 r - p_0 r \cos p_0 r\right)^2}{r^7} \cdot 4\pi\, r^2\, dr. \tag{8.101}$$

Путем трехкратного интегрирования по частям получаем

$$\Delta\Omega_{\text{обм}} = -\frac{e^2 p_0^4}{4\pi^3} = -\frac{e^2\,(3\pi^2 n)^{4/3}}{4\pi^3}. \tag{8.102}$$

Мы видим, что из-за достаточно быстрого убывания функции $I(\mathbf{r})$ обменная энергия определяется масштабом $|\mathbf{r}| \approx p_0^{-1}$ порядка характерного расстояния между электронами. Это можно понять качественно, заметив, что только при сближении электронов на расстояние $r \leqslant p_0^{-1}$ их волновые функции начинают перекрываться, и эффекты неразличимости частиц становятся важны. Таким образом, обменная энергия на один электрон оказывается порядка $e^2 p_0$.

Интересно отметить, что масштаб p_0^{-1}, определяющий обменные эффекты, при $e^2/\hbar v_F \ll 1$ оказывается много меньше длины кулоновского экранирования $\varkappa^{-1}$, которая определяет корреляционную энергию (см. задачу 49). Поэтому говорят, что обменное взаимодействие *локально*.

Отрицательный знак $\Delta\Omega$ тоже нетрудно понять. В силу принципа Паули, электроны избегают друг друга на расстояниях $r \leqslant p_0^{-1}$, в результате чего энергия кулоновского отталкивания уменьшается.

48 б. Рассмотрим вклады второго порядка по $e^2/\hbar v_F$, соответствующие диаграммам на рис. 8.7. Им соответствуют такие выражения:

$$\Delta\Omega^{(\mathrm{a})}_{\text{кор}} = T^3 \sum_{\varepsilon,\varepsilon',\omega} \int G(i\varepsilon,\,\mathbf{k})\, G(i\varepsilon'+\omega,\,\mathbf{k}+\mathbf{q}) \times \\ \times G(i\varepsilon',\,\mathbf{k}')\, G(i\varepsilon'-\omega,\,\mathbf{k}'-\mathbf{q})\, V_{\mathbf{q}}^2\, \frac{d^3k\, d^3k'\, d^3q}{(2\pi)^9}; \tag{8.103}$$

$$\Delta\Omega^{(b)}_{\text{кор}} = -\frac{1}{2} T^3 \sum_{\varepsilon,\varepsilon',\omega} \int G(i\varepsilon,\,\mathbf{k})\, G(i\varepsilon+\omega,\,\mathbf{k}+\mathbf{q}) \times \\ \times G(i\varepsilon',\,\mathbf{k}')\, G(i\varepsilon'-\omega,\,\mathbf{k}'-\mathbf{q})\, V_{\mathbf{q}}\, V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'+\mathbf{q}}\, \frac{d^3k\, d^3k'\, d^3q}{(2\pi)^9}. \tag{8.104}$$

Принятые обозначения показаны на рис. 8.10. Знаки диаграмм *а* и *б* отличаются из-за разного числа фермионных петель, а коэффициенты — из-за того, что в диаграмме *а* суммирование по спину происходит два раза, а в диаграмме *б* — один раз.

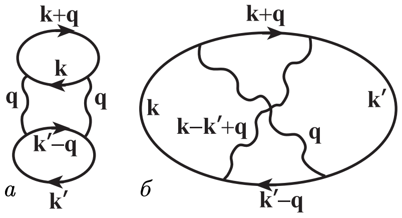

Рис. 8.10

Импульсы на рис. 8.10 выбраны таким образом, чтобы было удобно объединить вклады a и b. Суммирование по ε и ε' выполняется с помощью тождества (7.85). В результате приходим к такому выражению для $\Delta\Omega^{(a)+(b)}$:

$$\Delta\Omega^{(a)+(b)}_{\text{кор}} = \frac{T}{2} \sum_{\omega} \int \frac{n_F(\xi_{\mathbf{k}}) - n_F(\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}})}{i\omega - \xi_{\mathbf{k}} + \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}}\, \frac{n_F(\xi_{\mathbf{k}'}) - n_F(\xi_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}})}{-i\omega - \xi_{\mathbf{k}'} - \xi_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}} \times \\ \times \left(2V_{\mathbf{q}}^2 - V_{\mathbf{q}}\, V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'+\mathbf{q}}\right) \frac{d^3k\, d^3k'\, d^3q}{(2\pi)^9}, \tag{8.105}$$

где первый член в скобках соответствует диаграмме a, а второй — диаграмме b. Нас интересует случай нулевой температуры. Поэтому заменим суммирование по ω интегрированием; при этом

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi(i\omega - \xi)(-i\omega - \xi')} = \frac{\theta(\xi') - \theta(-\xi)}{\xi + \xi'}. \tag{8.106}$$

Получаем

$$\Delta\Omega^{(a)+(b)}_{\text{кор}} = \frac{1}{2} \int \Big(n_F(\xi_{\mathbf{k}}) - n_F(\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}})\Big) \Big(n_F(\xi_{\mathbf{k}'}) - n_F(\xi_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}})\Big) \times \\ \times \frac{\theta(\xi_{\mathbf{k}'} - \xi_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}) - \theta(\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \xi_{\mathbf{k}})}{\xi_{\mathbf{k}} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \xi_{\mathbf{k}'} - \xi_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}} \left(2V_{\mathbf{q}}^2 - V_{\mathbf{q}}\, V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'+\mathbf{q}}\right) \frac{d^3k\, d^3k'\, d^3q}{(2\pi)^9}. \tag{8.107}$$

Проанализируем область интегрирования в (8.107). Одна из двух θ-функций в этом выражении должна быть равна 1, а другая — 0. Пусть от нуля отлична первая θ-функция. Тогда, поскольку в (8.107) входит также множитель $n_F(\xi_{\mathbf{k}'}) - n_F(\xi_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}})$, то $|\mathbf{k}'| > p_0$, а $|\mathbf{k}' - \mathbf{q}| < p_0$.

Аналогично получаем $|\mathbf{k}| < p_0$, $|\mathbf{k} + \mathbf{q}| > p_0$. Если же от нуля отлична другая θ-функция, то ответ получается заменой $\mathbf{k} \to \mathbf{k}'$, $\mathbf{q} \to -\mathbf{q}$. Поскольку выражение симметрично относительно этой замены, достаточно просто удвоить ответ. Поэтому

$$\Delta\Omega^{(a)+(b)}_{\text{кор}} = \iiint \frac{(2V_{\mathbf{q}}^2 - V_{\mathbf{q}}\, V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'+\mathbf{q}})}{(\xi_{\mathbf{k}} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \xi_{\mathbf{k}'} - \xi_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}})} \frac{d^3k\, d^3k'\, d^3q}{(2\pi)^9} \tag{8.108}$$

(интеграл берется по области $\mathbf{k} \in R_q$, $\mathbf{k}' - \mathbf{q} \in R_q$). Это выражение совпадает с (8.33).

Отметим, что формулу (8.33) можно получить и без диаграмм, вычисляя энергию основного состояния ферми-системы по обычной квантовомеханической теории возмущений до членов второго порядка (см. [6], § 6).

Теперь рассмотрим поведение подынтегрального выражения в (8.108) при $\mathbf{q} \to 0$. Области интегрирования по $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$ представляют собой в этом случае слои толщины порядка q на поверхности ферми-сферы (см. рис. 8.1). С другой стороны, знаменатель при этом оказывается порядка qv_F. Поэтому первый член оказывается порядка q^{-3}, а второй — порядка q^{-1}. В результате оказывается, что при интегрировании по q первый член дает логарифмическую расходимость на малых q, а второй остается конечен.

Чтобы понять причину найденной расходимости, рассмотрим физический смысл диаграмм на рис. 8.7. Поляризационные петли на диаграмме *а* — это коррелятор плотность–плотность. Поэтому эта диаграмма описывает вклад взаимодействия флуктуаций плотности в энергию системы. Ее расходимость при $q = 0$ означает, что основной вклад дают флуктуации плотности в далеких точках. Но подсчитывать взаимодействие флуктуаций в точках, расположенных на расстоянии, большем радиуса экранирования, используя незаэкранированный потенциал $1/r$ (как это и происходит в (8.108)), совершенно неправильно. Можно ожидать, что при правильном учете экранирования логарифмическая расходимость обрежется на обратном радиусе экранирования, $q \approx \varkappa$.

Что же касается диаграммы *б*, она описывает обменный эффект второго порядка. Как и все обменные эффекты, этот вклад в энергию определяется расстояниями порядка фермиевской длины волны $1/p_0$, и потому в нем не возникает расходимости на малых q.

49 а. Расходимость в диаграмме *а* на рис. 8.7, найденная в задаче 48, — серьезная неприятность. В рамках теории возмущений обрезать эту расходимость негде, и поэтому возникает необходимость суммировать диаграммы высших порядков. С физической точки зрения, требуется всего лишь корректно учесть экранирование (см. решение задачи 48 б). Это достигается суммированием «пузырьковых» диаграмм, показанных на рис. 8.8.

Оценим эти диаграммы по порядку величины. Произведение n волнистых линий зависит от передаваемого импульса q как q^{-2n} и не зависит от передаваемой частоты ω (q и ω одинаковы для всех линий). Поляризационная петля $\Pi(i\omega, \mathbf{q}) \approx \nu$ при $\omega \leqslant qv_F$ и убывает при $\omega > qv_F$.

Интегрирование по $0 < \omega \leqslant qv_F$ дает qv_F, и в результате диаграмма n-го порядка расходится при малых q как $\int_0^{p_0} (q^2/q^{2n-1})dq$. Чем выше n, тем сингулярней диаграмма. При $n = 2$ расходимость логарифмическая, в соответствии с решением задачи 48 б. Из сделанной оценки видно, что кольцевые диаграммы, изображенные на рис. 8.8, обеспечивают максимальную расходимость в каждом порядке теории возмущений. Уже само по себе, и без апелляций к физике экранирования, это дает достаточные основания для рассмотрения ряда на рис. 8.8.

Просуммируем последовательность кольцевых диаграмм. Для этого, как обычно, продифференцируем термодинамический потенциал по константе связи e^2. Это устраняет множители $1/n$ перед диаграммами, после чего ряд суммируется, как геометрическая прогрессия. Выражение, которое при этом получается, есть произведение $\Pi(i\omega, \mathbf{q})$ и заэкранированного взаимодействия $V_{i\omega,\mathbf{q}}$, из которого вычтено затравочное взаимодействие $V_{\mathbf{q}}$ (потому что ряд начинается с $n = 2$).

Таким образом,

$$e^2 \frac{\partial}{\partial e^2} \Omega_{\text{кор}} = -\frac{1}{2}\, T \sum_{\omega} \int \Pi(i\omega, \mathbf{q}) \left(V_{i\omega,\mathbf{q}} - V_{\mathbf{q}} \right) \frac{d^3q}{(2\pi)^3}. \tag{8.109}$$

Согласно задаче 44, заэкранированное взаимодействие есть (8.42). Что касается поляризационного оператора $\Pi(i\omega, \mathbf{q})$, то аналитическое продолжение формулы (8.47) дает

$$\Pi(i\omega,\, \mathbf{q}) = -\nu \left(1 - \frac{\omega}{qv_F} \operatorname{arctg} \frac{qv_F}{\omega} \right). \tag{8.110}$$

Заменяя при $T = 0$ суммирование по ω интегрированием, и подставляя $V_{i\omega,\mathbf{q}}$ из (8.42), приводим (8.109) к виду

$$e^2 \frac{\partial}{\partial e^2} \Omega_{\text{кор}} = -\frac{1}{2} \int \frac{\Pi^2(i\omega, \mathbf{q})\, V_{\mathbf{q}}^2}{1 - \Pi(i\omega, \mathbf{q})\, V_{\mathbf{q}}} \frac{d\omega\, d^3q}{(2\pi)^4}. \tag{8.111}$$

Удобно ввести $s = \omega/qv_F$ и обозначить $\Pi(i\omega, \mathbf{q}) = -\nu P(s)$. Получаем

$$e^2 \frac{\partial}{\partial e^2} \Omega_{\text{кор}} = -\int\limits_0^\infty \frac{(4\pi e^2)^2\, \nu^2\, P^2(s)}{q^2 (q^2 + \varkappa^2 P(s))} \frac{qv_F\, ds}{2\pi} \frac{4\pi\, q^2\, dq}{(2\pi)^3} = -\frac{\varkappa^4 v_F}{4\pi^3} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \frac{P^2(s)}{q^2 + \varkappa^2 P(s)}\, ds\, q dq, \tag{8.112}$$

где $\varkappa^2 = 4\pi e^2\nu$. Интегрируем по q, обрезая интеграл сверху на p_0:

$$e^2\frac{\partial}{\partial e^2}\Omega_{\text{кор}} = -\frac{\varkappa^4 v_F}{8\pi^3}\int\limits_0^\infty \ln\frac{p_0^2}{\varkappa^2\, P(s)}\, P^2(s)ds \approx -\frac{\varkappa^4 v_F}{4\pi^3}\ln\frac{p_0}{\varkappa}\int\limits_0^\infty P^2(s)\, ds \tag{8.113}$$

(последний шаг верен с логарифмической точностью, поскольку $p_0^2/\varkappa^2 = (\pi/4)\hbar v_F/e^2 \gg 1$). Интеграл

$$J = \int\limits_0^\infty P^2(s)\, ds \tag{8.114}$$

удобно вычислить с помощью следующего представления $P(s)$, которое следует из определения поляризационного оператора:

$$P(s) = \int\limits_0^1 \frac{x^2}{s^2+x^2}\, dx = 1 - s\operatorname{arctg}\frac{1}{s}. \tag{8.115}$$

Интегрируем:

$$J = \int\limits_0^\infty\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \frac{x^2\, y^2}{\left(s^2+x^2\right)\, \left(s^2+y^2\right)}\, dx\, dy\, ds = \pi\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \frac{xy}{x+y}\, dx\, dy =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int\limits_0^1 x\, dx\, \left[1 - x\ln\frac{x+1}{x}\right] = \frac{\pi(1-\ln 2)}{3}. \tag{8.116}$$

Учитывая соотношение $\varkappa^2 = 4\pi e^2\nu$ и интегрируя по e^2, получаем окончательный ответ:

$$\Omega_{\text{кор}} = -\frac{1-\ln 2}{24\pi^2}\,\varkappa^4\, v_F\ln\frac{p_0}{\varkappa}. \tag{8.117}$$

Таким образом, просуммировав кольцевые диаграммы, мы действительно получили конечную корреляционную энергию. При этом логарифмическая расходимость, найденная во втором порядке теории возмущений, автоматически обрезалась на обратном радиусе экранирования, $q \approx \varkappa$.

49 б. Найдем энергию взаимодействия, представив ее как энергию нулевых колебаний осцилляторов электрон-дырочных пар. Воспользуемся формулой

$$\int\limits_{-\infty}^\infty \ln\frac{\omega^2+\omega_1^2}{\omega^2+\omega_2^2}\frac{d\omega}{4\pi} = \frac{\omega_1}{2} - \frac{\omega_2}{2}, \tag{8.118}$$

которую нетрудно проверить интегрированием по частям. Применим ее к операторам

$$\begin{aligned}\widehat{\mathscr{A}} &= \sum_{\mathbf{k};\ \mathbf{p}\in R_k}\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}^2\varphi_{\mathbf{p},\mathbf{k}}^+\varphi_{\mathbf{p},\mathbf{k}},\\ \widehat{\mathscr{B}} &= 2\sum_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}}\Big(\sum_{\mathbf{p}\in R_k}\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}^{1/2}\varphi_{\mathbf{p},\mathbf{k}}^+\Big)\Big(\sum_{\mathbf{p}'\in R_k}\omega_{\mathbf{p}',\mathbf{k}}^{1/2}\varphi_{\mathbf{p},\mathbf{k}}\Big),\end{aligned} \tag{8.119}$$

сумма которых есть удвоеннная «потенциальная энергия» осцилляторов, описываемых гамильтонианом $\mathscr{H}_0 + \mathscr{H}_{\text{int}}$ (см. (8.23) и (8.24)). Получаем

$$\Delta E = \operatorname{Tr}\int\limits_{-\infty}^\infty \ln\frac{\omega^2+\widehat{\mathscr{A}}+\widehat{\mathscr{B}}}{\left(\omega^2+\widehat{\mathscr{A}}\right)^{-1}}\frac{d\omega}{4\pi}. \tag{8.120}$$

Разложим это выражение в ряд:

$$\Delta E\sum_{\omega>0}\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \operatorname{Tr}\left(\widehat{\mathscr{B}}\big(\omega^2+\widehat{\mathscr{A}}\ \big)^{-1}\right)^n. \tag{8.121}$$

Вычисляя след, находим

$$\begin{aligned}\Delta E &= \sum_{\omega>0}\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sum_{\mathbf{k}}\Big(V_{\mathbf{k}}\sum_{p\in R_k}\frac{4\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}}{\omega^2+\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}^2}\Big)^n =\\ &= \sum_{\omega>0}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(-V_{\mathbf{k}}\Pi(\omega,\mathbf{k})\right)^n =\\ &= \iint\ln\left(1 - V_{\mathbf{k}}\Pi(\omega,\mathbf{k})\right)\frac{d\omega\, d^3k}{2(2\pi)^4}.\end{aligned} \tag{8.122}$$

Чтобы установить соответствие с вычислением обменной и корреляционной энергий в задачах 48 и 49 а, заметим следующее. Первый член формального разложения логарифма в выражении (8.122) в ряд по степеням $V_{\mathbf{k}}$ дает не что иное, как обменную энергию, вычисленную в задаче 48 а. В этот первый член $V_{\mathbf{k}}$ входит в первой степени, что дает сходящийся при малых k интеграл. Нетрудно убедиться, что если вычесть из (8.122) обменную энергию (в силу сходимости интеграла, такое вычитание — корректная процедура), то получившееся выражение при дифференцировании по e^2 дает выражение (8.111), определяющее корреляционную энергию. Поэтому выражение (8.122) есть сумма обменной и корреляционной энергий.

Результат (8.122), выведенный при $T = 0$, нетрудно обобщить на случай конечной температуры. Это делается по аналогии с задачей 35, где была получена связь между термодинамическим потенциалом и функцией Грина ферми-частиц. В результате получается выражение, подобное (8.122), в котором интегрирование $\int\ldots d\omega/2\pi$ заменено суммированием $T\sum_n\ldots$ по $\omega_n = 2\pi nT$.

49 в. Рассмотрим корреляционную энергию невырожденной плазмы. Можно воспользоваться формулой (8.109), оставляя в ней лишь член с $\omega = 0$:

$$e^2 \frac{\partial}{\partial e^2} \Omega_{\text{кор}} = -\frac{T}{2} \int \frac{V_{\mathbf{q}}^2\, \Pi^2(\mathbf{q})_{\omega=0}}{1 - V_{\mathbf{q}} \Pi(\mathbf{q})_{\omega=0}} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3}. \tag{8.123}$$

Величина $\Pi(\mathbf{q})_{\omega=0}$ при малом $|\mathbf{q}| \ll p_0$ есть

$$\Pi(\mathbf{q} \to 0)_{\omega=0} = \int \frac{n_F(\xi_{\mathbf{p}}) - n_F(\xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}})}{\xi_{\mathbf{p}} - \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}} \frac{2\, d^3 p}{(2\pi)^3} \approx \int \frac{\partial n_F(\xi_{\mathbf{p}})}{\partial \xi_{\mathbf{p}}} \frac{2\, d^3 p}{(2\pi)^3} \tag{8.124}$$

(мы использовали тождество (7.85)). Поскольку нас интересуют большие температуры ($T \gg E_F$), можно заменить распределение Ферми распределением Больцмана, для которого $\partial n_B(\xi)/\partial \xi = -n_B(\xi)/T$. Поэтому

$$\Pi_{\omega=0}(\mathbf{q} \to 0) = -n/T, \tag{8.125}$$

где n — плотность частиц. Отсюда

$$V_{\mathbf{q}} = \frac{V_{\mathbf{q}}}{1 - V_{\mathbf{q}}\, \Pi(\mathbf{q} \to 0)_{\omega=0}} = \frac{4\pi e^2}{\mathbf{q}^2 + \varkappa^2}, \tag{8.126}$$

где $\varkappa^2 = 4\pi e^2 n/T$ — классический дебаевский радиус экранирования. В результате

$$e^2 \frac{\partial}{\partial e^2} \Omega_{\text{кор}} = -\frac{T}{2} \int \frac{\varkappa^4}{q^2\,(q^2 + \varkappa^2)} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} = -\frac{T\varkappa^3}{8\pi}. \tag{8.127}$$

Интегрируя по e^2, получаем

$$\Omega_{\text{кор}} = -\frac{T\varkappa^3}{12\pi}, \tag{8.128}$$

что совпадает с результатом, известным для классической плазмы (см. [5] § 78).

Обратим внимание на неаналитическую зависимость выражений (8.117) и (8.128) от e^2. При $T = 0$ корреляционная энергия пропорциональна $e^4 \ln e^2$, а при $T \gg E_F$ выражение (8.128) дает $\Omega_{\text{кор}} \sim e^3$. В результате формальное разложение $\Omega_{\text{кор}}$ по целым степеням e^2 оказывается невозможным. Эта неаналитичность и есть формальная причина того, что в ряду теории возмущений присутствуют расходящиеся члены.

8.6. Энергия взаимодействия в металле. Вигнеровский кристалл

Рассмотрим энергию основного состояния электронов в металле, используя модель желе. В пределе высокой плотности электронов n система будет почти идеальным ферми-газом с ферми-жидкостными поправками, малыми по параметру $e^2/\hbar v_F \ll 1$. Наиболее существенной

энергией в этом случае будет кинетическая энергия, величина которой порядка $p_0^2/2m$ на частицу. Это дает термодинамический потенциал на единицу площади $\Omega_{\text{кин}} \sim n^{5/3}$.

Поправки первого порядка по межэлектронному взаимодействию были найдены в задаче 48 а. Энергия Хартри в модели желе равна нулю из-за компенсации взаимодействия электронов с положительным фоном. Обменная же энергия $\Omega_{\text{обм}}$ отлична от нуля и отрицательна. Как нетрудно видеть, сумма кинетической и обменной энергий $\Omega_{\text{кин}} + \Omega_{\text{обм}}$ есть просто среднее $\langle \widehat{\mathscr{H}}_0 + \widehat{\mathscr{H}}_{\text{int}} \rangle$ от гамильтониана (8.1), взятое по основному состоянию идеального ферми-газа, т. е. по слэтеровскому детерминанту, построенному из плоских волн с $|\mathbf{p}| < p_0$.

Поправки второго порядка и выше по $e^2/\hbar v_F$, рассмотренные в задачах 48 б и 49, учитывают изменение основного состояния благодаря взаимодействию. Эти поправки принимают во внимание изменение корреляций взаимного расположения электронов по сравнению с идеальным ферми-газом. Поэтому соответствующий вклад в энергию системы называют *корреляционной энергией*. Согласно задачам 48, 49, обменная и корреляционная энергии отрицательны и зависят от заряда e и плотности n так: $\Omega_{\text{обм}} \sim -e^2 n^{4/3}$, $\Omega_{\text{кор}} \sim -e^4 n \ln(n^{1/3}/e^2)$.

Интересно, что корреляционная энергия имеет неаналитическую зависимость от параметра теории возмущений $e^2/\hbar v_F$. Поэтому формальное разложение $\Omega_{\text{кор}}$ по целым степеням $e^2/\hbar v_F$ не имеет смысла. В этом и состоит причина того, что, как мы убедились в задаче 48 б, в ряду теории возмущений появляются расходимости.

Здесь уместно отметить, что для отсутствия аналитичности термодинамического потенциала Ω как функции константы связи e^2 при малых e имеются весьма общие основания. Действительно, если бы аналитичность имела место в некоторой окрестности $e = 0$, то выражение для термодинамического потенциала, полученное при $e^2 > 0$, было бы применимо и к системе с $e^2 < 0$, т. е. с притяжением между частицами. А в ней, как известно, возникает куперовское спаривание и происходит перестройка основного состояния. Отметим аналогию с квантовой электродинамикой, в которой с помощью сходного рассуждения доказывается (Дайсон, 1952), что любая физическая величина, как функция e^2, имеет особенность при $e = 0$ (см. [4], гл. 1, § 3).

Рассмотрим теперь, как меняется состояние металлической системы при изменении плотности. Зависимость кинетической и обменной энергии от плотности такова, что при высокой плотности $\Omega_{\text{обм}}$ пренебрежимо мала по сравнению с $\Omega_{\text{кин}}$. Однако при уменьшении плотности взаимодействие начинает давать основной вклад в энергию. При этом, поскольку $\Omega_{\text{обм}}$ отрицательно, состояние с однородной плотностью становится неустойчиво по отношению к возникновению неоднородностей, и жидкость превращается в кристалл (Вигнер, 1934).

Сравним энергии кристалла и ферми-жидкости. Рассмотрим кристаллическое состояние, в котором волновые функции электронов локализованы вблизи узлов некоторой решетки. Для конкретности будем говорить о кубической решетке с периодом $a = n^{-1/3}$. Убедимся в том, что кинетическая энергия, оцениваемая как энергия нулевых колебаний, будет выше, чем в однородной системе с той же плотностью, а потенциальная — ниже. Поскольку при низкой плотности потенциальная энергия важнее кинетической, кристалл оказывается более выгодным состоянием, чем жидкость.

Начнем с того, что оценим изменение кулоновской энергии. При образовании кристалла она понижается, поскольку в жидкости электроны могут находиться ближе друг к другу, чем в кристалле при той же плотности. Уменьшение потенциальной энергии на один электрон будет порядка энергии взаимодействия соседей:

$$E_{\text{пот}}^{\text{кр}} - E_{\text{пот}}^{\text{ж}} \approx -\frac{e^2}{a} = -e^2 n^{1/3}. \tag{8.129}$$

Теперь займемся кинетической энергией электронного кристалла. Электрон совершает нулевые колебания около одного из узлов решетки. Причем когда электрон находится точно в узле, кулоновские силы, действующие на него со стороны других электронов, в точности компенсируются. При отклонении же от узла на небольшое расстояние, из-за нескомпенсированного кулоновского отталкивания от соседей появляется возвращающая сила. При смещении x возвращающая сила будет порядка $e^2/(a-x)^2 - e^2/(a+x)^2 \approx e^2 x/a^3$. Записав ее как $m\omega^2 x$, получим частоту колебаний электрона и радиус локализации волновой функции:

$$\omega \approx \left(\frac{e^2}{ma^3}\right)^{1/2}, \quad r_0 \approx \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{1/2} \approx a\left(\frac{e^2}{\hbar v_F^{(0)}}\right)^{-1/4}, \tag{8.130}$$

где $v_F^{(0)}$ — скорость Ферми в идеальном ферми-газе данной плотности. Оценим энергию нулевых колебаний на один электрон:

$$E_{\text{кин}}^{\text{кр}} \approx \frac{\hbar\omega}{2} \approx \left(\frac{e^2}{\hbar v_F^{(0)}}\right)^{-1/2} \frac{e^2}{a} \approx \left(\frac{e^2}{\hbar v_F^{(0)}}\right)^{1/2} E_{\text{кин}}^{\text{ж}}, \tag{8.131}$$

где $E_{\text{кин}}^{\text{ж}} \approx \hbar^2/(2ma^2)$.

Сделанные оценки показывают, что в пределе низкой плотности, т. е. при $e^2/\hbar v_F^{(0)} \gg 1$, имеют место такие неравенства:

$$E_{\text{кин}}^{\text{ж}} \ll E_{\text{кин}}^{\text{кр}} \ll (E_{\text{пот}}^{\text{ж}} - E_{\text{пот}}^{\text{кр}}). \tag{8.132}$$

Это означает, что образование кристалла энергетически выгодно. Отметим, что для применимости сделанных оценок требуется, чтобы электронные состояния были хорошо локализованы вблизи узлов. Но, как мы видели, $r_0 \ll a$ при $e^2/\hbar v_F^{(0)} \gg 1$, что подтверждает корректность наших рассуждений.

Итак, при переходе в состояние вигнеровского кристалла кинетическая энергия увеличивается, а потенциальная уменьшается. Поэтому при высокой плотности такое состояние невыгодно, а при низкой — выгодно.

8.7. Микроскопическое обоснование теории ферми-жидкости

Диаграммная техника позволяет обосновать теорию ферми-жидкости весьма общим образом, а также установить границы ее применимости. Такой квантово-полевой подход к проблеме ферми-жидкости весьма полезен, поскольку он дает возможность использовать идеи и результаты этой теории в сильно взаимодействующей системе. В этом состоит преимущество по сравнению, скажем, с рассмотренным в разд. 8.3 гамильтоновым методом, в котором предполагается, что взаимодействие слабое. Кроме того, гамильтонов метод опирается на несколько эвристическое по своему характеру приближение случайных фаз, в то время как квантово-полевой подход является совершенно строгим.

Микроскопической теории ферми-жидкости уделено большое внимание в литературе (см. [1, 6, 4]), поэтому здесь мы ограничимся кратким перечислением основных результатов. Предполагается, что особенности одночастичной функции Грина, как функции энергии, качественно такие же, как для идеального ферми-газа. А именно, $G(\varepsilon, \mathbf{p})$ имеет простой полюс при $\varepsilon = \xi(\mathbf{p})$, где закон дисперсии квазичастиц $\xi(\mathbf{p})$ определяется самосогласованно через уравнение Дайсона. Показывается, что вычет a в полюсе

$$G(\varepsilon, \mathbf{p}) \approx \frac{a}{\varepsilon - \xi(\mathbf{p}) + i0 \operatorname{sgn} \xi} \tag{8.133}$$

удовлетворяет условию $0 < a < 1$. Величина a имеет смысл спектрального веса квазичастицы в одночастичной функции Грина (ср. с (4.14) в гл. 4). Единственной величиной, которая не перенормируется взаимодействием, оказывается импульс Ферми, выражающийся через плотность: $p_0 = (3\pi^2 n)^{1/3}$.

Оказывается возможным выяснить, какие диаграммы описывают динамику квазичастиц, и проследить связь с кинетическим уравнением ферми-жидкости. Для этого следует рассмотреть двухчастичные функции Грина и выделить в них вклады, соответствующие электрон-дырочным парам вблизи уровня Ферми. Следуя традиции, будем говорить о двухчастичной амплитуде рассеяния, имея при этом в виду, что другие двухчастичные функции рассматриваются аналогично.

Амплитуда рассеяния Γ есть, как обычно, сумма всех фейнмановских диаграмм с четырьмя концами. Она зависит обычным образом от входящих и выходящих импульсов, а также спинов. Выделим из диаграммного ряда все вклады с определенным количеством двухчастичных сечений, и пересуммируем ряд, как при выводе уравнения Бете–Солпитера (4.20). Для этого требуется использовать так называемую неприводимую вершину $\Gamma^{(0)}$, не содержащую двухчастичных сечений. Пересуммированный ряд для амплитуды Γ изображается графически, как показано на рис. 8.11, где неприводимая вершина $\Gamma^{(0)}$ обозначена заштрихованным кружком.

Отметим, что при этом предполагается, что суммарные импульс $\mathbf{k}$ и частота ω в двухчастичных сечениях малы по сравнению с p_0 и E_F, соответственно. Именно это ограничение на $\mathbf{k}$ и ω позволяет ограничиться лестничными диаграммами, изображенными на рис. 8.11.

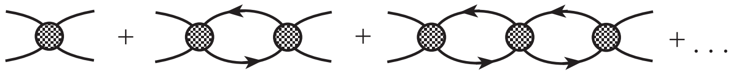

Рис. 8.11

Полученный ряд сводится к интегральному уравнению почти так же, как при выводе уравнения Бете–Солпитера (4.20). Разница состоит только в том, что надо пользоваться причинными функциями Грина, а не запаздывающими. В результате получается уравнение вида

$$\Gamma(p_1, p_2;\, k) = \Gamma^{(0)}(p_1, p_2;\, k) - \\ - i\int \Gamma^{(0)}(p_1, q;\, k)\,\Gamma(q, p_2;\, k)\, G(q)\, G(q+k)\,\frac{d^4q}{(2\pi)^4}, \qquad (8.134)$$

где $p_{1,2}$ — импульсы входящих частиц, а k — передача импульса. Мы для простоты опустили все спиновые индексы и суммирование по ним.

Задача теперь состоит в том, чтобы выделить в (8.134) вклады полюсов функций Грина $G(q)$ и $G(q+k)$, поскольку именно полюсные вклады отвечают квазичастицам. Для этого требуется выполнить еще одно пересуммирование ряда для Γ, в результате которого получается очень похожий ряд, с тем, однако, единственным отличием, что двухчастичные сечения содержат *только* полюсные вклады.

Формально это происходит так. При малых ω и $\mathbf{k}$ в двухчастичных сечениях, произведение функций Грина можно разложить на сингулярную и регулярную части:

$$-iG(q)\,G(q+k) = \frac{2\pi a^2}{v_F}\,\frac{\mathbf{kv}}{\omega - \mathbf{kv}}\,\delta(\varepsilon)\,\delta(|\mathbf{q}| - p_0) + \varphi(q), \qquad (8.135)$$

где $q = (\varepsilon, \mathbf{q})$, $k = (\omega, \mathbf{k})$, $\mathbf{v} = \nabla_{\mathbf{k}}\xi(\mathbf{k})$. Поясним происхождение сингулярного вклада в (8.135). Он возникает в тех случаях, когда полюсы функций Грина $G(q)$ и $G(q+k)$ зажимают контур интегрирования по ε в уравнении (8.134). Зажимание контура происходит, когда полюсы выражения $G(q)G(q+k)$ находятся по разные стороны от вещественной оси. Это имеет место при $|\mathbf{q}| < p_0$ и $|\mathbf{q}+\mathbf{k}| > p_0$, или наоборот. Но поскольку $|\mathbf{k}| \ll p_0$, импульс $\mathbf{q}$ при этом оказывается на малом расстоянии порядка $|\mathbf{k}|$ от ферми-поверхности. А значит, одновременно и $\varepsilon \xi_{\mathbf{q}}$ оказывается почти на уровне Ферми.

Запишем соотношение (8.135) в виде $-iGG\widehat{D} + \widehat{\varphi}$ и проведем пересуммирование ряда на рис. 8.11, используя операторную запись:

$$\Gamma = \Gamma^{(0)} - i\Gamma^{(0)}GG\Gamma^{(0)} + (-i)^2\Gamma^{(0)}GG\Gamma^{(0)}GG\Gamma^{(0)} + \ldots = \\ = \Gamma^{(0)}\left(1 - \left(\widehat{D} + \widehat{\varphi}\right)\Gamma^{(0)}\right)^{-1} = \Gamma^{(0)}\left(1 - \widehat{\varphi}\Gamma^{(0)}\right)^{-1} \times$$

$$\times\left(1 - \widehat{D}\Gamma^{(0)}\left(1 - \widehat{\varphi}\Gamma^{(0)}\right)^{-1}\right)^{-1} = \Gamma_\omega\left(1 - \widehat{D}\Gamma_\omega\right)^{-1}, \qquad (8.136)$$

где введено обозначение $\Gamma_\omega = \Gamma^{(0)}\left(1 - \widehat{\varphi}\Gamma^{(0)}\right)^{-1}$. Обратим внимание, что результат этой цепочки преобразований имеет форму, соответствующую ряду на рис. 8.11. Отличие этого представления от исходного в том, что теперь все несингулярные вклады собраны единым образом в вершину Γ_ω.

Как всегда, элементарные возбуждения определяются полюсами соответствующей функции Грина. В данном случае необходимо рассмотреть полюсы амплитуды рассеяния Γ, как функции ω и $\mathbf{k}$. Из представления (8.136) следует, что полюсам соответствуют нулевые собственные значения оператора $1 - \widehat{D}\Gamma_\omega$. Пользуясь явной формой (8.135) для оператора $\widehat{D}$, уравнение на собственные значения можно записать в виде

$$(\omega - \mathbf{kv})u(\mathbf{p}) = \mathbf{kv}\,\frac{2\pi a^2}{v_F}\,\Gamma_\omega u(\mathbf{p}), \qquad (8.137)$$

где $u(\mathbf{p})$ — соответствующая собственная функция, а действие Γ_ω понимается в операторном смысле. Получившееся уравнение совпадает с кинетическим уравнением ферми-жидкости, причем функция Ландау $F(\mathbf{n}, \mathbf{n}')$ оказывается связанной с амплитудой Γ_ω, взятой на ферми-поверхности:

$$F(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = \frac{2\pi a^2}{v_F}\,\Gamma_\omega(\mathbf{p}, \mathbf{p}')_{|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'| = p_0}. \qquad (8.138)$$

Отметим, что амплитуда Γ_ω получается простым образом из полной амплитуды рассеяния Γ, если рассмотреть предел $\mathbf{kv} \ll \omega$. При этом, согласно (8.135), величина $\widehat{D} \to 0$ и, вследствие этого, $\Gamma_\omega = \Gamma$.

Заметим, что связь между оператором $\widehat{D}$ и кинетикой квазичастиц становится особенно наглядной, если перейти в координатно-временное представление. Чтобы избежать неоднозначностей, связанных с обходом полюсов, рассмотрим запаздывающую величину, заменив ω на $\omega + i0$. Тогда

$$\widetilde{D}(\mathbf{r},\, t) = \int \frac{\mathbf{kv}\,e^{-i\omega t + i\mathbf{kr}}}{\omega - \mathbf{kv} + i0}\,\frac{d\omega}{2\pi}\,\frac{d^3k}{(2\pi)^3} = \begin{cases} \mathbf{v}\nabla_{\mathbf{r}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases} \qquad (8.139)$$

Это вычисление демонстрирует, что сингулярная часть произведения $G(q)G(q+k)$ описывает распространение электрона по прямой между моментами, когда происходит взаимодействие с другими электронами. (Читатель, сталкивавшийся с задачей об определении кинетических коэффициентов из уравнения Больцмана, узнает в $\mathbf{vk}/(\omega - \mathbf{vk})$ стандартное выражение, возникающее при подобных расчетах.)

Следует сказать, что связь между лестничными диаграммами с малым переданным импульсом и кинетическим уравнением, продемонстрированная на примере амплитуды рассеяния Γ, имеет более общий характер. Аналогичные рассуждения применимы к произвольной двухчастичной функции Грина. Примером тому могут служить лестничные диаграммы, рассмотренные в задачах 44–47.

Как мы убедились, теория ферми-жидкости на диаграммном языке соответствует учету определенных диаграмм с малой передачей импульса в двухчастичных сечениях. Исчерпываются ли описанными выше лестничными диаграммами все возможности? Чтобы в этом разобраться, рассмотрим диаграммы с ровно одним двухчастичным сечением. Как видно из рис. 8.12, их всего три.

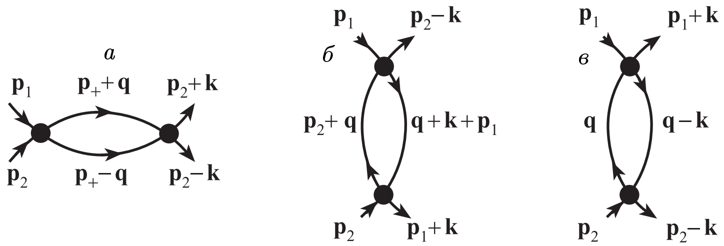

Рис. 8.12

Определим, при каких значениях внешних 4-импульсов p_1, p_2 и k эти диаграммы могут оказаться сингулярными. Как и выше, нас интересуют сингулярности, возникающие из-за интегрирования произведения двух функций Грина. При данном значении энергии ε в петле полюсы этих двух гриновских функций таковы:

$$\varepsilon = \xi_{\mathbf{q}} - i0 \operatorname{sgn} \xi_{\mathbf{q}}, \quad \varepsilon = \omega + \xi_{\mathbf{q}+\mathbf{k}} - i0 \operatorname{sgn} \xi_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}. \tag{8.140}$$

При этом, как всегда, отличный от нуля вклад в интеграл по ε возникает, лишь если полюсы находятся по разные стороны от контура интегрирования (ср. с задачей 24). При определенных значениях внешних импульсов полюсы могут сблизиться и зажать между собой контур интегрирования. Тогда этот контур будет невозможно увести из окрестности полюсов и возникнет сингулярность.

Выясним, при каких условиях это происходит в диаграммах на рис. 8.12. Пренебрегая частотой ω, передаваемой через двухчастичное сечение, получим

а — $|\mathbf{p}_+ + \mathbf{q}| = |\mathbf{p}_+ - \mathbf{q}|$, где $\mathbf{p}_+ = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)/2$;

б — $|\mathbf{p}_2 + \mathbf{q}| = |\mathbf{q} + \mathbf{p}_1 + \mathbf{k}|$;

в — $|\mathbf{q}| = |\mathbf{q} - \mathbf{k}|$.

При этом следует учесть, что сингулярность может исчезнуть при интегрировании по $\mathbf{q}$, если условие выполняется в слишком малой области $\mathbf{q}$. Поэтому условие возникновения сингулярности выглядит теперь следующим образом:

а — $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \approx 0$;

б — $\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 - \mathbf{k} \approx 0$;

в — $\mathbf{k} \approx 0$.

Итак, мы видим, что только диаграмма *в* сингулярна при $k = 0$. Именно она и определяет динамику возбуждений в ферми-жидкости.

Что же касается остальных диаграмм, то диаграмма *б* бывает важна очень редко из-за того, что в ней налагается условие $\mathbf{p}_1 \approx \mathbf{p}_2$. А вот диаграмма *а* оказывается важна в теории сверхпроводимости, и в гл. 10 мы ее подробно изучим. Степень важности диаграммы *а*) и подобных ей более сложных диаграмм оказывается зависящей от знака взаимодействия. В случае притяжения ферми-жидкость исчезает, а взамен образуется сверхпроводящее состояние. В случае же отталкивания все выводы терии ферми-жидкости, полученные без учета диаграммы *а*, остаются в силе.