Глава 10
СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ

10.1. Микроскопическая теория сверхпроводимости

10.1.1. Образование куперовских пар. Сверхпроводимость в металлах возникает из-за электрон-фононного взаимодействия, приводящего к притяжению между электронами. Качественно это можно понять так. Двигаясь в металле, электрон притягивает ионы. За счет этого кристаллическая решетка слегка деформируется. Поэтому в области, через которую прошел электрон, на некоторое время остается нескомпенсированным положительный заряд ионов, который, в свою очередь, притягивает другие электроны.

На первый взгляд, электрон-фононное взаимодействие не должно существенно влиять на физику электронной системы. Ведь ядра решетки тяжелые, и электронам трудно сдвинуть их с места. Как мы выяснили в гл. 6, где обсуждалась теория Мигдала, принимающая во внимание большую разницу масс электронов и ионов, это в каком-то смысле справедливо. Действительно, даже при величине электрон-фононного взаимодействия порядка единицы, поправки к различным физическим величинам оказываются либо малыми, либо сосредоточенными в интервале энергий порядка дебаевской, т. е. много меньше энергии Ферми.

Однако оказывается, что электрон-фононное притяжение весьма эффективно, если импульсы взаимодействующих электронов направлены в противоположные стороны. Один электрон, двигаясь сквозь кристалл, встряхивает решетку вдоль линии своего движения. Колебания решетки — это медленный процесс, поэтому электрон оставляет за собой сравнительно долгоживущий след. Характерная частота колебаний решетки порядка дебаевской частоты $\omega_D \sim \sqrt{m/M}\,\varepsilon_F$, где m/M – отношение массы электрона к массе иона. Поэтому время рассасывания возмущения решетки оказывается примерно в $\sqrt{M/m}$ раз больше, чем время, за которое электрон проходит расстояние между соседними ионами. Это означает, что возмущение решетки, созданное движущимся электроном, образует след, вытянутый вдоль траектории электрона примерно на $\sqrt{M/m}$ межатомных расстояний. Второй электрон, если он движется точно навстречу первому, проходит через те же самые точки пространства, но в обратном порядке. Все то время, пока рассасывается возмущение, этот электрон находится внутри

следа, оставленного первым электроном. Поэтому притяжение между электронами с противоположными импульсами оказывается гораздо сильнее, чем между электронами, движущимися под углом.

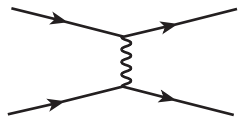

Рис. 10.1

Более формально электрон-электронное притяжение получается так. Взаимодействие между электронами за счет обмена виртуальным фононом описывается диаграммой на рис. 10.1. Мы будем рассматривать этот процесс, как эффективное взаимодействие двух электронов с передачей импульса k. По правилам диаграммной техники, описанным в главах 4 и 6, линии взаимодействия соответствует такое выражение:

$$g^2_{\mathrm{e-ph}} D(\omega, \mathbf{k}) = \frac{g^2_{\mathrm{e-ph}}\omega^2_{\mathbf{k}}}{\omega^2 - \omega^2_{\mathbf{k}}}. \tag{10.1}$$

Интерес для нас представляют процессы, в которых переданный импульс $\mathbf{k}$ порядка фермиевского, а переданная энергия мала: $\omega \ll \omega_D$. Поскольку $\omega_{\mathbf{k}} \approx \omega_D$, выражение (10.1) оказывается равным просто $-g^2_{\mathrm{e-ph}}$. Отрицательный знак амплитуды рассеяния означает, что эффективное взаимодействие является притяжением. Заметим, что передача импульса порядка p_0 возможна лишь если суммарный импульс мал. В противном случае, поскольку все состояния под ферми-поверхностью заняты, а суммарный импульс сохраняется, передача импульса от одной частицы к другой при взаимодействии оказывается малой. (Это наиболее очевидно, если суммарный импульс близок к $2p_0$, т. е. взаимодействующие электроны находятся в близких точках ферми-поверхности. В этом случае возможная величина переданного импульса много меньше p_0.) Таким образом, взаимодействие (10.1) наиболее эффективно для электронов с противоположными импульсами.

Оказывается, что эффективное притяжение приводит к образованию связанного состояния. Электроны группируются в так называемые *куперовские пары* с противоположно направленными импульсами. Спины электронов в паре оказываются при этом направленными в разные стороны, так чтобы спиновая часть волновой функции пары была нечетной, а координатная — четной. При этом выигрыш в энергии пары из-за электрон-фононного взаимодействия максимален. Поэтому куперовская пара представляет собой спиновый синглет, а ее орбитальный момент равен нулю.

Такое спаривание называется s-спариванием. Существуют и другие виды сверхпроводящего спаривания более общего вида, характеризующиеся отличным от нуля орбитальным моментом пары или спином пары равным единице. Подобное спаривание реализуется, например, в ^{3}He, а также в некоторых сверхпроводящих материалах, относящихся к классам так называемых «купратных» и «тяжелофермионных» сверхпроводников.

Наконец, остановимся на связи эффекта спаривания с явлением сверхпроводимости. Заметим, что куперовские пары подчиняются бозе-статистике, и поэтому при низкой температуре они формируют бозе-конденсат. В такой бозе-жидкости из куперовских пар все механизмы рассеяния электронов становятся неэффективными, потому что при рассеянии одного из спаренных электронов пара разрушилась бы. Но разрушение пары требует затраты энергии порядка энергии связи электронов в паре. Поэтому при температуре меньше энергии связи пары рассеяние отдельных электронов оказывается энергетически невыгодным. Вследствие этого при низких температурах электрический ток может течь без диссипации.

Обсудим теперь влияние кулоновского взаимодействия на сверхпроводимость. Можно было бы ожидать, что сверхпроводимость должна подавляться прямым электрон-электронным взаимодействием. Действительно, эффекты кулоновского взаимодействия обычно порядка единицы. При этом фононное притяжение между электронами короткодействующее, а кулоновское отталкивание — дальнодействующее. Поэтому, казалось бы, отталкивание должно перевесить. Однако все не так просто. Дело в том, что кулоновское взаимодействие запаздывает на время порядка обратной плазменной частоты, а электрон-фононное — на время порядка ω_D^{-1}. Иными словами, электрон оставляет вдоль своей траектории фононный след, который не рассасывается относительно долго (см. задачу 64). Поэтому взаимодействие между электронами за счет обмена фононами происходит гораздо дольше, чем кулоновское отталкивание. Следствием этого является относительная малость эффекта кулоновского взаимодействия (см. задачу 61). В результате электрон-фононное взаимодействие оказывается более существенным для сверхпроводимости, чем кулоновское.

Чтобы лучше понять механизм образования пар, мы упростим задачу и, следуя первоначальной идее Купера, рассмотрим всего два взаимодействующих электрона, движущихся на фоне ферми-моря. При этом мы будем пренебрегать эффектом рождения других электрон-дырочных пар, и учтем влияние остальных электронов только в том смысле, что импульсы выбранных нами двух электронов будут обязаны лежать вовне ферми-сферы.

В импульсном представлении состояния пары электронов описываются волновой функцией $\Psi_{\alpha\beta}(\mathbf{p},\mathbf{p}')$, где $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ — импульсы, а α и β — спиновые индексы. Взаимодействие между электронами сохраняет спин, поэтому будем рассматривать только синглетные состояния $\Psi_{\alpha\beta}(\mathbf{p},\mathbf{p}') = \Psi(\mathbf{p},\mathbf{p}')\big(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\big)$. Орбитальная часть волновой функции $\Psi(\mathbf{p},\mathbf{p}')$ удовлетворяет уравнению Шредингера в импульсном пространстве:

$$E\,\Psi(\mathbf{p},\mathbf{p}') = (E_p + E_{p'})\Psi(\mathbf{p},\mathbf{p}') + \sum_{\mathbf{p}+\mathbf{p}'=\mathbf{q}+\mathbf{q}'} V_{\mathbf{pp}'\mathbf{qq}'}\Psi(\mathbf{q},\mathbf{q}'). \qquad (10.2)$$

Здесь $E_p = p^2/2m - \mu$ — одночастичная энергия, а $V_{\mathbf{pp}'\mathbf{qq}'}$ — эффективное взаимодействие между электронами. Как указано выше, мы предполагаем, что импульсы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ находятся снаружи ферми-сферы: $|\mathbf{p}| > p_0$, $|\mathbf{p}'| > p_0$.

Следует заметить, что характерная энергия, переданная при электрон-фононном взаимодействии, не может быть больше дебаевской частоты ω_D. Поэтому будем считать, что взаимодействие $V_{\mathbf{pp}'\mathbf{qq}'}$ отлично от нуля только в узком интервале энергий порядка ω_D:

$$V_{\mathbf{pp}'\mathbf{qq}'} = \begin{cases} -\lambda & \text{при } |E_s| < \omega_D, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \qquad (10.3)$$

где $s = p, p', q, q'$. Здесь мы ввели обозначение для эффективной константы взаимодействия: $\lambda \equiv g^2_{\mathrm{e-ph}}$.

Рассмотрим вначале случай нулевого суммарного импульса пары $\mathbf{P} = \mathbf{p} + \mathbf{p}' = 0$. При этом уравнение (10.2) принимает вид

$$(E - 2E_p)\Psi(\mathbf{p},-\mathbf{p}) = -\lambda \sum_{0<E_q<\omega_D} \Psi(\mathbf{q},-\mathbf{q}). \qquad (10.4)$$

Поскольку правая часть этого уравнения не зависит от $\mathbf{p}$ в области $|E_p| < \omega_D$, решение уравнения есть

$$\Psi(\mathbf{p},-\mathbf{p}) = \frac{a}{E - 2E_p}. \qquad (10.5)$$

Такое решение существует, если

$$-\lambda \sum_{0<E_q<\omega_D} \frac{1}{2E_q - E} = 1. \qquad (10.6)$$

Напомним, что условие $E_q > 0$ в (10.6) возникает, поскольку в задаче присутствует ферми-море, из-за чего рассматриваемые два электрона не могут переходить в состояния под ферми-поверхностью. Условие же $E_q < \omega_D$ в (10.6) отражает тот факт, что электроны обмениваются фононами, и поэтому переданная при взаимодействии энергия не может быть больше ω_D.

Нас интересует связанное состояние электронов пары, поэтому энергия E должна быть отрицательной. Переходя в (10.6) к интегрированию по $\xi = E_q$, имеем

$$1 = \lambda\nu_0 \int\limits_0^{\omega_D} \frac{d\xi}{2\xi + |E|} = \frac{1}{2}\lambda\nu_0 \,\ln\Big(1 + \frac{2\omega_D}{|E|}\Big), \qquad (10.7)$$

где $\nu_0 = mp_0/(2\pi^2\hbar^3)$ — одночастичная плотность состояний на уровне Ферми. Решая уравнение (10.7), получаем энергию связи пары:

$$E_* = -\frac{2\omega_D}{e^{2/\lambda\nu_0} + 1}. \qquad (10.8)$$

При малой константе связи $\lambda\nu_0 \ll 1$ выражение (10.8) превращается в $E_* = -2\omega_D e^{-2/\lambda\nu_0}$. Итак, связанное состояние двух электронов действительно существует. Обратим внимание на существенную роль ферми-статистики. Электроны не могут перейти в занятые состояния под ферми-поверхностью, поэтому в импульсном пространстве они всегда находятся в тонком двумерном сферическом слое между $|\mathbf{p}| = p_0$ и $|\mathbf{p}| \approx p_0 + \omega_D/v_F$. Аналогично можно рассмотреть образование пары с суммарным импульсом $\mathbf{k}$, отличным от нуля. Нетрудно показать, что в этом случае минимальная энергия связи достигается при $\mathbf{k} = 0$.

Отметим интересную аналогию между рассмотренной задачей об одной куперовской паре и задачами 12 и 13, в которых обсуждается образование связанного состояния при движении частицы в поле мелкой ямы. Связанное состояние имеется только в пространстве размерности $D \leqslant 2$, причем при $D = 2$ ситуация логарифмическая, как в (10.6), и энергия связи оказывается экспоненциально малой по глубине ямы. Особая роль размерности $D = 2$ связана с тем, что плотность состояний $\nu(\varepsilon)$ при $D < 2$ расходится при энергии $\varepsilon \to 0$, в то время как при $D = 2$ плотность состояний $\nu(\varepsilon)$ остается конечной при сколь угодно малом ε. В то же время при $D > 2$ плотность состояний обращается в нуль при $\varepsilon \to 0$, чем и объясняется отсутствие связанных состояний в мелкой яме. Нетрудно видеть, что при $D = 2$ задача о мелкой яме формально эквивалентна задаче о куперовской паре. Поэтому иногда говорят, что динамика куперовской пары эффективно двумерна.

Интересно оценить размер куперовской пары. Это можно сделать, например, из соотношения неопределенности. Энергия каждого из электронов в паре имеет неопределенность порядка E_* (потому что фиксирована лишь суммарная энергия). Соответствующая неопределенность импульса есть $\delta p \approx E_*/v_F$ и, следовательно, положение каждого из электронов определено с точностью до

$$\xi = \frac{\hbar}{\delta p} \approx \frac{\hbar v_F}{E_*}. \tag{10.9}$$

Это и есть размер пары. Поскольку при слабом взаимодействии $\lambda\nu_0 \ll \ll 1$ энергия связи E_* экспоненциально мала, расстояние между электронами в паре оказывается гораздо больше, чем среднее расстояние между электронами. Это означает, что пренебрежение взаимодействием электронов пары с электронами ферми-моря, вообще говоря, некорректно. Поэтому рассмотренная нами задача об одной куперовской паре представляет собой лишь наводящее соображение. Тем не менее, как будет показано ниже, полученная оценка энергии связи (10.8) не очень далека от значения, предсказываемого точной теорией. Кроме того, представление о куперовских парах оказывается весьма полезным при качественных рассуждениях.

10.1.2. Квазичастицы в сверхпроводнике. Перейдем к более формальному анализу задачи о сверхпроводящем спаривании. Запишем гамильтониан системы с притяжением:

$$\hat{\mathscr{H}}_{\text{БКШ}} = \sum_p \xi_p\, a_p^+ a_p - \frac{1}{2} \sum_{p+p'=q+q'} V_{p\,p'\,q\,q'}\; a_{p\alpha}^+ a_{p'\beta}^+ a_{q\beta} a_{q'\alpha}. \tag{10.10}$$

Как и раньше, будем считать, что взаимодействие отлично от нуля только вблизи ферми-поверхности:

$$V_{p\,p'\,q\,q'} = \begin{cases} \lambda & \text{при } \xi_{\max} < \omega_D, \\ 0 & \text{при } \xi_{\max} > \omega_D, \end{cases} \tag{10.11}$$

где $\xi_{\max} = \max\{|\xi_p|, |\xi_{p'}|, |\xi_q|, |\xi_{q'}|\}$. Выражение (10.10) называется гамильтонианом теории Бардина–Купера–Шриффера (БКШ).

При слабом взаимодействии между электронами, константу λ можно выразить через безразмерную константу ζ электрон-фононного взаимодействия: $\lambda = g^2_{\text{e-ph}} = \zeta/\nu_0$ (см. с. 111). Следует отметить, что в реальных системах (т. е. при $\zeta \approx 1$) связь между λ и ζ не такая простая. В этом случае из-за сильной перенормировки электронного спектра теория сверхпроводимости должна самосогласованно учитывать все эффекты электрон-фононного взаимодействия, обсуждавшиеся в гл. 6. Тем не менее, гамильтониан БКШ с $\lambda \approx g^2_{\text{e-ph}}$ оказывается вполне разумным приближением даже при $\zeta \approx 1$.

Упростим гамильтониан БКШ, оставив в нем лишь члены, отвечающие за взаимодействие с противоположными импульсами:

$$\hat{\mathscr{H}} = \sum_p \xi_p a_p^+ a_p - \frac{\lambda}{2} \sum_{p\,q} a_{p\,\alpha}^+ a_{-p\,\beta}^+ a_{q\,\beta} a_{-q\,\alpha}. \tag{10.12}$$

Получившийся гамильтониан все еще довольно сложен. Поэтому для его анализа мы воспользуемся теорией среднего поля.

В задаче о сверхпроводящем спаривании теория среднего поля оказывается весьма нетривиальной. Введем операторы $\hat{B}_{\alpha\beta} = \sum_p a_{p\,\alpha}^+ a_{-p\,\beta}^+$, описывающие рождение куперовской пары с конфигурацией спинов $|\alpha\,\beta\rangle$. Взаимодействие в гамильтониане (10.12) можно представить в виде $-(\lambda/2)\sum_{\alpha\beta} \hat{B}_{\alpha\beta}^+ \hat{B}_{\alpha\beta}$. Далее, нетрудно показать, что $\hat{B}_{\uparrow\uparrow} = \hat{B}_{\downarrow\downarrow} = 0$, а $\hat{B}_{\uparrow\downarrow} = -\hat{B}_{\downarrow\uparrow}$. (Для этого надо рассмотреть тождества $\psi_\alpha^+(r)\psi_\alpha^+(r) = 0$ и $\{\psi_\uparrow^+(r),\ \psi_\downarrow^+(r)\}_+ = 0$, и перейти в фурье-представление.) Поэтому взаимодействие в (10.12) можно представить в виде $-\lambda B_{\uparrow\downarrow}^+ \hat{B}_{\uparrow\downarrow}$.

При бозе-конденсации пар все они оказываются в одном и том же квантовом состоянии, поэтому мы предполагаем, что в сверхпроводящем состоянии среднее от оператора рождения пары отлично от нуля: $\langle \hat{B} \rangle \neq 0$. Такое предположение может показаться противоречивым, ведь оператор $\hat{B}$ не сохраняет число частиц, а состояния с различным числом частиц должны быть ортогональными. Дело, однако, заключается в том, что мы рассматриваем систему с очень большим числом частиц N, и изменение N на величину порядка единицы есть в некотором смысле «малая поправка». Поэтому можно считать, что основные состояния с N и с $N+2$ частицами практически тождественны. Более подробно смысл так называемых «аномальных средних» мы обсудим ниже (см. пункты 10.2.1 и 10.2.2), а пока просто заменим в гамильтониане (10.12) операторы $B_{\uparrow\downarrow}^+ = \sum_p a_{p\uparrow}^+ a_{-p\downarrow}^+$ и $\hat{B}_{\uparrow\downarrow} = \sum_p a_{p\downarrow} a_{-p\uparrow}$ на их средние. При этом получается так называемый гамильтониан Боголюбова:

$$\widehat{\mathscr{H}} = \sum_p \left(\xi_p\left(a^+_{p\uparrow}a_{p\uparrow} + a^+_{p\downarrow}a_{p\downarrow}\right) + \Delta a^+_{p\downarrow}a^+_{-p\uparrow} + \Delta^* a_{p\uparrow}a_{-p\downarrow}\right), \tag{10.13}$$

где

$$\Delta = \lambda\sum_q\langle a_{q\downarrow}a_{-q\uparrow}\rangle, \quad \Delta^* = \lambda\sum_q\langle a^+_{q\uparrow}a^+_{-q\downarrow}\rangle. \tag{10.14}$$

(В выражении (10.13) мы пренебрегли несущественной константой $-\lambda|\Delta|^2$.) Гамильтониан (10.13) квадратичен по операторам $a_{p\,\alpha}$, $a^+_{p\,\beta}$, и поэтому его можно легко диагонализовать с помощью канонического преобразования. Введем для этого новые фермионные операторы:

$$c_{p\uparrow} = u_p a_{p\uparrow} + v_p a^+_{-p\downarrow}, \quad c_{p\downarrow} = -v_p a^+_{p\downarrow} + u_p a_{-p\uparrow}. \tag{10.15}$$

Постараемся подобрать u_p и v_p так, чтобы гамильтониан (10.10) перешел в гамильтониан свободных частиц

$$\widehat{\mathscr{H}} = E_0 + \sum_p \varepsilon_p c^+_p c_p. \tag{10.16}$$

Это можно сделать любым из методов, рассмотренных в задачах гл. 1. Получаем

$$u_p^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\xi_p}{\varepsilon_p}\right), \quad v_p^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\xi_p}{\varepsilon_p}\right), \tag{10.17}$$

где $\varepsilon_p = \sqrt{\xi_p^2 + |\Delta|^2}$ (см., например, задачу 2).

Таким образом, мы нашли *квазичастицы* гамильтониана БКШ, упрощенного методом Боголюбова. Как видно из соотношений (10.15) и (10.17), квазичастицы очень сильно отличаются от исходных электронов в интервале энергий $\xi_p \sim \Delta$ вблизи ферми-поверхности, а за пределами этого интервала отличие невелико. На поверхности Ферми $\xi_p = 0$, и поэтому энергия квазичастицы есть Δ, а энергия квазидырки равна $-\Delta$. Таким образом, в спектре квазичастиц открывается щель ширины 2Δ.

Чтобы определить величину Δ, нужно учесть условие самосогласования (10.14). Вычисляя среднее $\langle a_{q\downarrow}a_{-q\uparrow}\rangle$ с помощью преобразования (10.15), получаем

$$\Delta = \lambda\sum_q \frac{\Delta}{2\sqrt{\xi_q^2 + \Delta^2}}. \tag{10.18}$$

В этом выражении можно перейти к интегрированию по ξ:

$$\Delta = \frac{\lambda}{2}\,\Delta\,\nu_0\int\limits_{-\omega_D}^{\omega_D}\frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2+\Delta^2}}. \tag{10.19}$$

При $\Delta \ll \omega_D$ интеграл в правой части (10.19), с логарифмической точностью, есть $\ln(2\omega_D/\Delta)$. Поэтому уравнение (10.19) принимает вид

$\Delta = \lambda\Delta\ln\left(2\omega_D/\Delta\right)$ и соответственно имеет нетривиальное решение

$$\Delta = 2\omega_D e^{-1/\lambda\nu_0}. \tag{10.20}$$

Итак, с помощью канонического преобразования мы диагонализовали гамильтониан БКШ и показали, что в спектре квазичастиц открывается щель. При этом были учтены все эффекты взаимодействия, как над, так и под ферми-поверхностью. Интересно, что при таком более строгом рассмотрении ответ для ширины щели в спектре системы не слишком сильно отличается от результата (10.8) задачи об одной паре.

Отметим интересную аналогию между теорией БКШ и теорией пайерлсовского диэлектрика в одномерной системе электронов, взаимодействующих с фононами (см. разд. 6.4). Можно проследить сходство между гамильтонианами, процедурой их диагонализации, спектрами получающихся квазичастиц, и уравнениями самосогласование для щели в спектре. Несмотря на формальное сходство, физика возникающего из-за взаимодействия основного состояния в этих системах совершенно разная. В теории БКШ спариваются электроны на противоположных участках ферми поверхности, а в теории Пайерлса спариваются электроны и дырки. В первом случае получается сверхпроводник, а во втором — диэлектрик. Сверхпроводящее состояние пространственно однородно, а в пайерлсовском состоянии имеется волна плотности.

10.2. Диаграммная техника для теории Бардина–Купера–Шриффера

10.2.1. Рассеяние в куперовском канале. Образование пар — явление существенно квантовое. Поэтому в задаче о сверхпроводимости формализм функций Грина оказывается весьма подходящим средством. С помощью соответствующим образом введенных гриновских функций теорию сверхпроводимости можно развить весьма далеко и рассмотреть такие вопросы, как термодинамика сверхпроводников, роль кулоновского взаимодействия в спаривании, отклик сверхпроводников на внешнее электромагнитное поле, и т. д. Кроме того, большое значение имеет обобщение теории БКШ на случай так называемых «грязных» сверхпроводников, т. е. металлов с примесями. В последнем случае, как мы увидим, преимущества функций Грина особенно значительны.

В предыдущих главах мы рассматривали либо невзаимодействующие, либо слабо взаимодействующие системы, в которых квантовые эффекты, в основном, возникали из-за квантовой статистики (как, например, в ферми-газе). По этой причине многие из результатов предыдущих глав можно получить, используя вместо функций Грина какой-нибудь обходной прием. (Например, отклик ферми-газа на внешнее поле можно найти либо с помощью кинетического уравнения, либо выписывая явно второй порядок теории возмущений.) Теория же сверхпроводимости имеет дело с сильно взаимодействующей системой, в которой взаимодействие приводит к качественной перестройке основного состояния. Поэтому функции Грина оказываются не только наиболее естественным, но и во многих случаях единственно возможным инструментом.

Рассмотрим теперь, как задача о сверхпроводящем спаривании переводится на язык диаграммной техники. Сначала разберемся, что на языке диаграмм означает утверждение об образовании связанного состояния для пары электронов с противоположными импульсами. Как известно, связанному состоянию соответствует полюс в амплитуде рассеяния (см. задачи 12, 13 в гл. 3), поэтому естественно рассмотреть вершинную часть рассеяния электронов с противоположными импульсами друг на друге. Вклады первого и второго порядка по взаимодействию имеют вид, показанный на рис. 10.2. Первой диаграмме соответствует

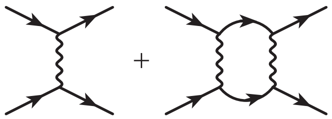

Рис. 10.2

$$\Gamma^0_{\alpha\,\alpha'\,\beta\,\beta'} = \frac{\lambda}{2}\,(\delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\beta\beta'} - \delta_{\alpha\beta'}\delta_{\beta\alpha'}). \tag{10.21}$$

Вторая диаграмма на рис. 10.2, представляющая собой поправку второго порядка теории возмущений, логарифмически расходится:

$$\lambda\,\nu_0\,\ln\frac{2\omega_D}{\omega}\,\Gamma^0_{\alpha\,\alpha'\,\beta\,\beta'}. \tag{10.22}$$

Здесь ω — суммарная энергия взаимодействующих электронов. Соответствующая диаграмма будет вычислена в задаче 58 (см. также [1], § 33).

Диаграммы более высоких порядков, наиболее сингулярные при $\omega \to 0$, образуют такой ряд (рис. 10.3):

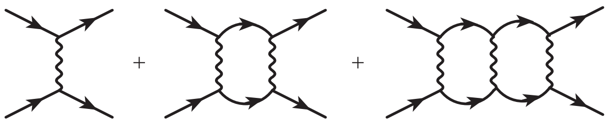

Рис. 10.3

В этом ряде диаграмма n-го порядка имеет $n-1$ «опасных» сечений, импульсы частиц в которых попарно противоположны. Каждое такое сечение приводит к логарифмической расходимости, поэтому n-й член ряда (10.3) ведет себя как $\big(-\lambda\nu_0\,\ln(2\omega_D/\omega)\big)^{n-1}\Gamma^0_{\alpha\,\alpha'\,\beta\,\beta'}$. Суммируя геометрическую прогрессию, получаем

$$\Gamma^C_{\alpha\,\alpha'\,\beta\,\beta'}(\omega) = \frac{1}{1-\lambda\nu_0\,\ln(2\omega_D/\omega)}\,\Gamma^0_{\alpha\,\alpha'\,\beta\,\beta'}. \tag{10.23}$$

Амплитуда рассеяния электронов с противоположными импульсами, даваемая суммой ряда (10.3), называется *амплитудой рассеяния в куперовском канале.* Полюс в выражении (10.23) следует интерпретировать,

как неустойчивость ферми-газа, связанную с образованием куперовских пар.

Оказывается, неустойчивость возникает только при достаточно низкой температуре. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим ферми-газ с притяжением (10.10) и найдем «куперовскую восприимчивость». Введем в гамильтониан (10.10) возмущение

$$H_{\rm pert} = \int \Big\{\psi^+_\uparrow(\mathbf{r})\psi^+_\downarrow(\mathbf{r})\Delta(\mathbf{r}) + \psi_\downarrow(\mathbf{r})\psi_\uparrow(\mathbf{r})\Delta^*(\mathbf{r})\Big\}\,d^3r, \tag{10.24}$$

и определим линейный отклик

$$\chi_C = -\frac{\partial\langle\psi_\uparrow(\mathbf{r})\psi_\downarrow(\mathbf{r})\rangle}{\partial\Delta} \tag{10.25}$$

по отношению к возмущению (10.24). Среднее $\langle\psi_\uparrow(\mathbf{r})\psi_\downarrow(\mathbf{r})\rangle$ представляет собой, как обсуждалось выше, амплитуду куперовских пар, а Δ играет роль вспомогательного внешнего поля.

Операторы $\psi_\uparrow(\mathbf{r})\psi_\downarrow(\mathbf{r})$ и $\psi^+_\uparrow(\mathbf{r})\psi^+_\downarrow(\mathbf{r})$ выглядят несколько непривычно, поскольку они не сохраняют число частиц. Среднее от такого оператора, взятое по состоянию с фиксированным числом частиц, обращается в нуль. Тем не менее, подчеркнем, что куперовская восприимчивость есть корректно определенная величина: в присутствии возмущения (10.24), не сохраняющего число частиц, среднее $\langle\psi_\uparrow(\mathbf{r})\psi_\downarrow(\mathbf{r})\rangle$ отлично от нуля.

Перед тем, как вычислять восприимчивость χ_C, отметим, что она отличается от отклика на воздействие какого-либо реального поля тем, что поле Δ нельзя приложить. Однако нас интересует на самом деле лишь, устойчива ли система по отношению к такому возмущению. Неустойчивость, если она имеется, означает, что система сама перестраивается так, чтобы появился конденсат куперовских пар $\langle\psi_\uparrow(\mathbf{r})\psi_\downarrow(\mathbf{r})\rangle \neq \neq 0$ (а вместе с ним и отличная от нуля Δ).

Покажем, что куперовская восприимчивость χ_C конечна при $T > > T_c$ и обращается в бесконечность при $T = T_c$, где $T_c \approx \Delta$ — температура перехода в сверхпроводящее состояние. Интересующая нас восприимчивость есть термодинамическая величина, поэтому ее следует вычислять с помощью мацубаровских функций Грина. Соответствующая последовательность диаграмм образует так называемую *куперовскую лестницу* (рис. 10.4):

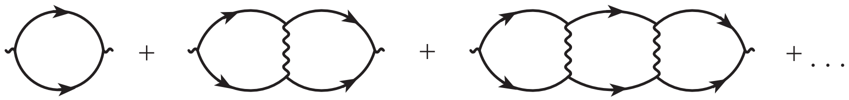

Рис. 10.4

Нетрудно видеть, что эти диаграммы получаются из диаграмм для амплитуды рассеяния замыканием внешних концов. Поэтому восприимчивость χ_C равна

$$\chi_C(i\omega_n) = \Pi_C(i\omega_n) + \lambda\Pi_C^2(i\omega_n) + \ldots = \frac{\Pi_C(i\omega_n)}{1 - \lambda\Pi_C(i\omega_n)}, \tag{10.26}$$

где одна ступень куперовской лестницы есть

$$\Pi_C(i\omega_n) = T\sum_m \int \frac{d^3p}{(i\varepsilon_m + i\omega_n - \xi_p)(-i\varepsilon_m - \xi_p)}. \tag{10.27}$$

Нас интересует статическая восприимчивость, поэтому положим $\omega_n = 0$. Суммируя по m с помощью формулы (7.85) (см. также (7.83)) и переходя к интегрированию по ξ, получаем

$$\Pi_C(0) = \frac{\nu_0}{2}\int\limits_{-\omega_D}^{\omega_D} \operatorname{th}\frac{\xi}{2T}\,\frac{d\xi}{\xi}, \tag{10.28}$$

что с логарифмической точностью равно $\nu_0 \ln \omega_D/T$ (см. задачу 58, а также [1], § 33).

Итак, условие $\lambda\Pi_C(0) = 1$, определяющее температуру, при которой куперовская восприимчивость (10.26) расходится, принимает вид

$$\lambda\nu_0 \,\ln\frac{\omega_D}{T} = 1. \tag{10.29}$$

Решение этого уравнения дает температуру перехода в сверхпроводящее состояние:

$$T_c = \frac{2\gamma}{\pi}\omega_D\; e^{-1/\lambda\nu_0}. \tag{10.30}$$

Здесь $\gamma = e^C$, где $C = 0,577\ldots$ — постоянная Эйлера. Коэффициент $2\gamma/\pi$ в этой формуле получается в результате более аккуратного вычисления (см. задачу 58). Как и следовало ожидать, температура T_c оказывается порядка величины энергетической щели (10.20), отделяющей основное состояние конденсата куперовских пар от возбужденных состояний, а также порядка частоты, при которой куперовская амплитуда рассеяния (10.23) имеет полюс.

10.2.2. Функции Грина в сверхпроводнике. С формальной точки зрения, последовательность диаграмм на рис. 10.3 сильно напоминает ряд, соответствующий уравнению Бете–Солпитера (4.20) для двухчастичной амплитуды рассеяния (см. гл. 4). Важное отличие, однако, состоит в том, что теперь задача многочастичная, а не двухчастичная. (Функции Грина на рисунках 10.2,10.3 учитывают эффекты ферми-статистики.) Многочастичность задачи означает, что в действительности спаривание есть не двухчастичное, а *коллективное* явление. Поэтому для его описания было бы недостаточно просто заменить затравочную амплитуду рассеяния на полную, как мы поступали в одно- и двухчастичных задачах в главах 3 и 4.

Куперовская неустойчивость означает, что при включении взаимодействия основное состояние ферми-газа перестраивается нетривиальным образом. Эта перестройка и есть образование бозе-конденсата куперовских пар. Оказывается, что функции Грина, необходимые для

описания этого явления, совершенно отличаются от обычных функций Грина ферми-системы.

Чтобы правильно ввести гриновские функции, приведем такое наводящее соображение. При ω вблизи полюса выражения (10.23) куперовская лестница, показанная на рис. 10.3, становится «бесконечно длинной». (Имеется в виду, что знаменатель геометрической прогрессии (10.23) близок к единице, поэтому все члены ряда одинаково важны.) Поэтому для вычисления функций Грина нужно суметь просуммировать диаграммы, изображенные на рис. 10.5. Мы намеренно не изобразили на этом рисунке концы лестниц, поскольку их длина оказывается ничем не ограниченной.

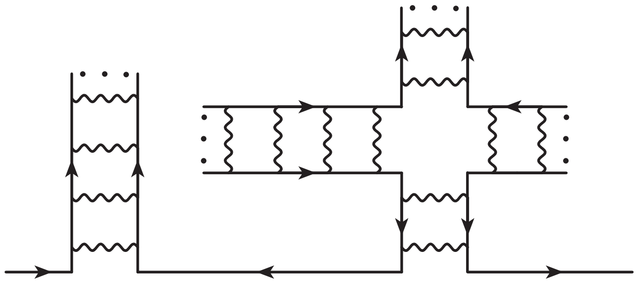

Рис. 10.5

Для суммирования таких диаграмм оказывается удобным ввести две функции Грина:

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}(x, x') &= -i\,\langle \mathrm{T}\psi_\alpha(x)\,\psi_\beta^+(x')\rangle, \\ F_{\alpha\beta}(x, x') &= -i\,\langle \mathrm{T}\psi_\alpha(x)\,\psi_\beta(x')\rangle. \end{aligned} \tag{10.31}$$

Функцию F часто называют *аномальной функцией Грина*, потому что в нормальном металле она равна нулю. Выражение $\langle \mathrm{T}\psi_\alpha(x)\,\psi_\beta(x')\rangle$ выглядит несколько загадочно, поскольку обычно средние от операторов, не сохраняющих число частиц, обращаются в нуль. Однако в сверхпроводнике это не так. Впрочем, при желании можно считать, что F — это просто удобное обозначение, введенное для облегчения суммирования диаграмм, подобных изображенной на рис. 10.5.

Роль функции F можно понять, сравнив переход в сверхпроводящее состояние с переходом в магнетике из парамагнитной фазы в ферромагнитную. При таком переходе возникает спонтанная намагниченность $\mathbf{M}$, причем ориентацию вектора $\mathbf{M}$ нельзя определить из гамильтониана ферромагнетика, обладающего вращательной симметрией. Ниже температуры магнитного перехода симметричное парамагнитное состояние неустойчиво, и произвольно малое внешнее поле $\mathbf{h}$ ориентирует спины $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ по полю, т. е. приводит к $\mathbf{M} = \langle \mathbf{s}(\mathbf{r})\rangle \neq 0$. Формально это выражается в том, что магнитная восприимчивость $\chi = \partial\mathbf{M}/\partial\mathbf{h}$ обращается в бесконечность в точке перехода. Ситуация в сверхпроводнике в значительной мере сходная: роль магнитной восприимчивости играет куперовская восприимчивость χ_C, обсуждавшаяся в п. 10.2.1. Мы видели, что $\chi_C(T)$ расходится при $T = T_c$ (см. (10.30)). Поэтому при $T < T_c$ как угодно малое возмущение может создать конечное аномальное среднее $F(x, x')$.

Какая же симметрия нарушается при этом переходе? В ферромагнетике нарушенная симметрия — это T-инвариантность, а также симметрия по отношению к повороту спинов, а в сверхпроводнике — калибровочная инвариантность. При калибровочном преобразовании $\psi \to \psi e^{i\varphi}$ функция F преобразуется так: $F \to F e^{2i\varphi}$. Поэтому она калибровочно неинвариантна и появление $F \neq 0$ означает нарушение калибровочной инвариантности. Как и в случае магнетика, гамильтониан которого обладает полным набором симметрий, исчезновение калибровочной инвариантности в сверхпроводнике не означает неинвариантность гамильтониана относительно калибровочных преобразований.

Калибровочно неинвариантным оказывается лишь основное состояние сверхпроводника. Вместо калибровочной инвариантности мы имеем теперь калибровочную *ковариантность*. Если при калибровочном преобразовании изменять основное состояние так, что F и Δ будут тоже преобразовываться, то все физические величины останутся неизменными.

Вернемся к гриновским функциям G и F. На рис. 10.5 показаны не все диаграммы, дающие вклад в G и F, а только простейшие. Более сложные диаграммы, которые также надо учесть, получаются вставкой полубесконечных куперовских лестниц в гриновские функции, входящие в куперовские лестницы, показанные на рис. 10.5. Говоря иначе, все гриновские функции в лестницах на рис. 10.5, следует «ужирнить». Формально это выполняется введением в графики нового элемента, внешнего поля $\Delta_{\alpha\beta}$ (рис. 10.6):

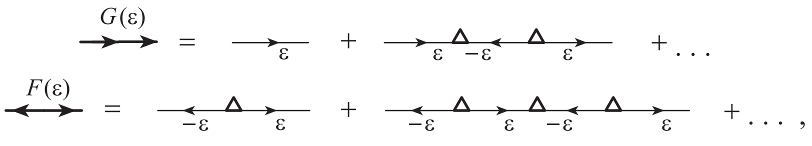

Рис. 10.6

причем $\Delta_{\alpha\beta}$ удовлетворяет уравнению самосогласования (рис. 10.7):

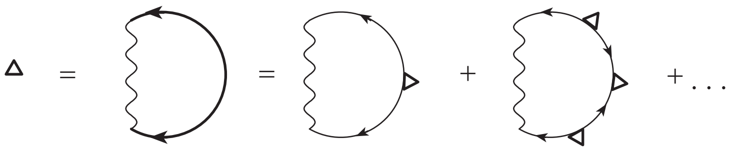

Рис. 10.7

Величина $\Delta_{\alpha\beta}$ имеет смысл амплитуды куперовских пар.

Графики на рисунках 10.6 и 10.7 означают, что функции Грина сверхпроводника $G_{\alpha\beta}$ и $F_{\alpha\beta}$ связаны с гриновской функцией $G^0_{\alpha\beta}(\varepsilon,\,\mathbf{p})$ идеального ферми-газа и полем $\Delta_{\alpha\beta}$ такими уравнениями:

$$G_{\alpha\beta}(\varepsilon,\,\mathbf{p}) = G^0_{\alpha\beta}(\varepsilon,\,\mathbf{p}) + G^0_{\alpha\lambda}(\varepsilon,\,\mathbf{p})\,\Delta^*_{\lambda\mu}\,F_{\mu\beta}(\varepsilon,\,\mathbf{p}), \tag{10.32}$$

$$F_{\alpha\beta}(\varepsilon,\,\mathbf{p}) = G^0_{\alpha\lambda}(-\varepsilon,\,\mathbf{p})\,\Delta_{\lambda\mu}\,G_{\mu\beta}(\varepsilon,\,\mathbf{p}) \tag{10.33}$$

(подразумевается суммирование по спиновым индексам λ и μ).

Прежде чем решать уравнения (10.32), сделаем замечание о спиновой структуре функций G и F. Зависимость G от спина такая же, как в нормальном металле: $G_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}G$. А вот функция F устроена иначе. Поскольку куперовская пара есть спиновый синглет, амплитуда $\Delta_{\alpha\beta} = \Delta(-i)\sigma^y_{\alpha\beta}$. Нетрудно видеть, что уравнения (10.32) совместны только если спиновые структуры $\Delta_{\alpha\beta}$ и $F_{\alpha\beta}$ одинаковы. Поэтому

$$\Delta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\Delta, \quad F_{\alpha\beta}(\varepsilon,\,\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} F(\varepsilon,\,\mathbf{p}). \tag{10.34}$$

С учетом спиновой структуры (10.34) уравнения (10.32) нетрудно решить:

$$G_{\alpha\beta}(\varepsilon,\,\mathbf{p}) = \frac{\varepsilon + \xi_{\mathbf{p}}}{\varepsilon^2 - \xi^2_{\mathbf{p}} - |\Delta|^2}\,\delta_{\alpha\beta} \tag{10.35}$$

$$F_{\alpha\beta}(\varepsilon,\,\mathbf{p}) = \frac{\Delta}{\varepsilon^2 - \xi^2_{\mathbf{p}} - |\Delta|^2}\,i\sigma^y_{\alpha\beta}. \tag{10.36}$$

Из выражений (10.35), (10.36) следует закон дисперсии квазичастиц

$$\varepsilon_{\mathbf{p}} = \sqrt{\xi^2_{\mathbf{p}} + \Delta^2}\,. \tag{10.37}$$

Наконец, с помощью (10.36) можно определить щель из уравнения самосогласования,

$$\Delta_{\alpha\beta} = \lambda \int F_{\alpha\beta}(\varepsilon, \mathbf{p})\,\frac{d\varepsilon\, d^3p}{(2\pi)^4}, \tag{10.38}$$

часто также называемого уравнением Горькова, и таким образом замкнуть теорию (см. рис. 10.7).

Для изучения термодинамики сверхпроводников нам потребуются мацубаровские функции $G_{\alpha\beta}(i\omega_n,\,\mathbf{p})$ и $F_{\alpha\beta}(i\omega_n,\,\mathbf{p})$. Они получаются из нуль–температурных функций (10.35), (10.36) аналитическим продолжением на дискретные частоты, т. е. просто заменой $\varepsilon \to i\omega_n$. При этом уравнение (10.38) принимает вид

$$\Delta = \lambda T \sum_{\omega_n} \int F(i\omega_n, \mathbf{p})\,\frac{d^3p}{(2\pi)^3} = \lambda T \sum_{\omega_n} \int \frac{\Delta}{\omega^2_n + \xi^2_{\mathbf{p}} + \Delta^2}\,\frac{d^3p}{(2\pi)^3}. \tag{10.39}$$

Описанный формализм оказывается весьма эффективным в широком круге задач теории сверхпроводимости.

В заключение отметим, что вычисления гриновских функций сверхпроводника можно «автоматизировать», если работать не с функциями

G и F по отдельности, а с так называемыми матрицами Горькова–Намбу, составленными из них (см. [1], (34.32)). Приведем канонический способ записи этих матриц в температурной технике. Определим функции Грина,

$$G_{\uparrow\uparrow}(r_1, r_2, \tau_1, \tau_2) = -\langle \mathrm{T}_\tau\, \psi_\uparrow(r_1, \tau_1)\psi_\uparrow^+(r_2, \tau_2)\rangle, \tag{10.40}$$

$$G_{\downarrow\downarrow}(r_1, r_2, \tau_1, \tau_2) = -\langle \mathrm{T}_\tau\, \psi_\downarrow(r_1, \tau_1)\psi_\downarrow^+(r_2, \tau_2)\rangle, \tag{10.41}$$

и, аналогично, $F_{\uparrow\downarrow}$, $F_{\downarrow\uparrow}$. Составим из них матричную функцию Грина:

$$\widehat{G}_\omega(r_1, r_2) = \begin{bmatrix} G_{\uparrow\uparrow} & F_{\uparrow\downarrow} \\ F_{\downarrow\uparrow} & G_{\downarrow\downarrow} \end{bmatrix}. \tag{10.42}$$

Матрица $\widehat{G}$ удовлетворяет уравнению

$$\left(i\omega - \tau_z\xi(\widehat{\mathbf{p}}) - \frac{1}{2}(\Delta(r_1)\tau_+ + \Delta^*(r_1)\tau_-)\right)\widehat{G}_\omega(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \widehat{\delta}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \tag{10.43}$$

где τ_z и $\tau_\pm = \tau_x \pm i\tau_y$ — матрицы Паули (мы обозначили их так для того, чтобы отличать от спиновых операторов). Матричное уравнение (10.43) есть сокращенная форма записи уравнений (10.32).

Основное удобство представления Горькова–Намбу заключается в том, что при работе с матричными величинами относительные знаки различных диаграмм, содержащих функции F и G автоматически получаются правильными. Кроме того, матричная запись весьма компактна (см. задачи 59, 63, 64).

В частности, матричный формализм весьма удобен при расчете отклика сверхпроводника на внешнее электромагнитное поле (см. задачи 63, 65). Магнитное поле включается в матричную запись заменой $\widehat{\mathbf{p}} \to \widehat{\mathbf{p}} - \dfrac{e}{c}\tau_z\mathbf{A}$ и соответственно оператор тока есть

$$\widehat{\mathbf{j}}(\mathbf{r}) = c\frac{\delta}{\delta\mathbf{A}(\mathbf{r})}\, \widehat{G}^{-1}\, [\mathbf{A}(\mathbf{r})] \tag{10.44}$$

(ср. с формулой $\widehat{\mathbf{j}} = -c\delta\widehat{H}/\delta\mathbf{A}$).

В теории сверхпроводимости имеется много интересных и красивых явлений. Однако подробное их изложение увело бы нас слишком далеко. В задачах этого раздела мы постарались отразить наиболее важные с нашей точки зрения факты микроскопической теории сверхпроводимости. Физика сверхпроводимости подробно освещается в учебной литературе, к которой мы и отсылаем заинтересованного читателя [1]).

Литература: Относительно компактное изложение основных фактов физики сверхпроводимости содержится в [3], гл. X, а также в [6], гл. V. Метод функций Грина в теории сверхпроводимости подробно рассмотрен в [1], гл. VII.

[1]) *В. В. Шмидт.* Введение в физику сверхпроводимости.—М.: Наука, 1982; *А. А. Абрикосов.* Основы теории металлов.—М.: Наука, 1987; *П. де Жен.* Сверхпроводимость металлов и сплавов.—М.: 1968; *М. Тинкхам.* Введение в сверхпроводимость/ Пер. под ред. *К. Лихарева.*—М.: Атомиздат, 1980.

10.3. Задачи 58–64

Задача 58. (*Куперовская неустойчивость.*) В п. 10.2.1при вычислении температуры перехода мы использовали приближение (10.11), для того чтобы ограничить сверху область интегрирования по энергии $\xi(\mathbf{p})$ (см. также (10.3)). На самом деле, поскольку сверхпроводимость возникает из-за обмена фононами с относительно большим временем запаздывания, более корректно рассматривать нелокальное во времени взаимодействие, которое обрезало бы не интегралы по импульсам, а интегралы по *частотам*.

Рассмотрим мацубаровскую амплитуду рассеяния в куперовском канале $\Gamma^C(i\varepsilon, i\varepsilon')$) (энергии сталкивающихся частиц равны $\pm\varepsilon$, а разлетающихся — $\pm\varepsilon'$). Она дается суммой лестничных графиков, изображенных на рис. 10.8.

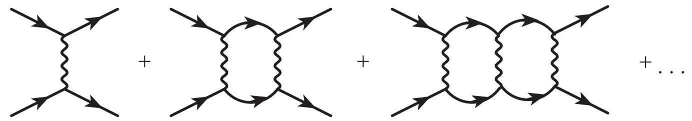

Рис. 10.8

Пусть каждой волнистой линии соответствует множитель $\Gamma^0(i\varepsilon, i\varepsilon')$. Будем считать взаимодействие точечным и соответственно пренебрежем зависимостью Γ^C и Γ^0 от импульсов.

а. Суммируя куперовскую лестницу, выведите интегральное уравнение, определяющее $\Gamma^C(i\varepsilon, i\varepsilon')$.

б. Рассмотрите модель, в которой $\Gamma^0(i\varepsilon, i\varepsilon')$ факторизуется:

$$\Gamma^0(i\varepsilon, i\varepsilon') = \lambda v(i\varepsilon)v(i\varepsilon'), \tag{10.45}$$

где λ — константа взаимодействия, а функция $v(i\varepsilon)$ — формфактор, определяющий масштаб энергий (спиновая структура опущена). Найдите температуру, при которой Γ^C обращается в бесконечность.

в. В случае, когда

$$v(i\varepsilon) = \frac{\omega_D}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega_D^2}}, \tag{10.46}$$

найдите связь между T_c и ω_D.

Модель (10.45) нефизична, поскольку настоящее электрон-фононное взаимодействие приводит к затравочной вершине Γ^0, зависящей от переданной энергии $\varepsilon - \varepsilon'$. Тем не менее, поскольку эта модель учитывает запаздывание притяжения между электронами на временах порядка ω_D^{-1}, она дает качественно правильные предсказания.

Задача 59. (*Температурная зависимость щели* $\Delta(T)$.) Определите температурную зависимость $\Delta(T)$ для запаздывающего взаимодействия (10.45), (10.46). Примите во внимание, что из-за запаздывания щель Δ становится функцией энергии ε спаривающихся частиц.

а. Модифицируйте уравнения (10.38), (10.39), учитывая зависимость Δ от ε. Получите уравнение самосогласования.

б. В найденном уравнении вычислите интеграл по ξ. Изобразите качественное поведение решения уравнения $\Delta(T)$ на графике. Как $\Delta(T)$ ведет себя при $T \to 0$ и при $T \to T_c$?

в. Найдите сверхпроводящую щель $\Delta(T)$ в пределе низких температур ($T \to 0$) и вблизи точки перехода ($T \to T_c$).

Задача 60. (*Теплоемкость при* $T < T_c$.) Покажите, что вклад электронов в термодинамический потенциал Ω сверхпроводящего металла дается диграммным рядом, показанным на рис. 10.9.

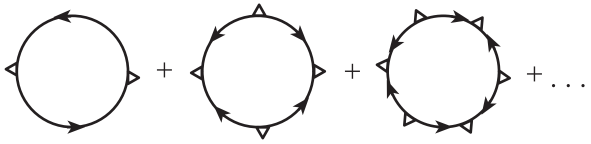

Рис. 10.9

Какие выражения сопоставляются различным диаграммам?

Выразите сумму графиков рис. 10.9 через функцию $\Delta(T)$, считая ее известной. Найдите температурную зависимость теплоемкости сверхпроводника:

а) при $T \ll T_c$;

б) при $T \to T_c$. В этом случае достаточно взять первый график, показанный на рис. 10.9, поскольку вблизи T_c величина Δ мала. Сравните ответ с теплоемкостью нормального металла (см. [1], § 36).

Вычисляя мацубаровскую сумму при низких температурах, удобно пользоваться формулой суммирования Пуассона

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{2\pi i k x}\, dx, \tag{10.47}$$

оставляя в сумме по k лишь члены с $k = 0, \pm 1$. Напомним, что применять формулу Пуассона следует с осторожностью, поскольку она справедлива лишь для функций, аналитических на всей вещественной оси.

Задача 61. (*Влияние кулоновского взаимодействия*[2] *на сверхпроводимость*.) Как уже обсуждалось в п. 10.1.1влияние кулоновского взаимодействия на сверхпроводимость невелико благодаря сильному запаздыванию фононов (см. с. 270). Рассмотрим вопрос об относительной важности электрон-электронного и электрон-фононного взаимодействий более подробно.

[2] *Н. Н. Боголюбов*, *В. В. Толмачев*, *Д. В. Ширков*. Новый метод в теории сверхпроводимости.—М.: Изд-во АН СССР, 1958. § 6.3. С. 84–88; *P. Morel*, *P. W. Anderson*// Phys. Rev. 1962. V. 125. P. 1263.

Оказывается удобным ввести упрощенную модель взаимодействия, в которой между электронами имеется мгновенное отталкивание и запаздывающее притяжение, причем как отталкивание, так и притяжение считаются точечными. При этом затравочная амплитуда рассеяния в куперовском канале имеет вид

$$\Gamma^0(i\varepsilon, i\varepsilon') = \lambda v(i\varepsilon) v(i\varepsilon') - \mu, \tag{10.48}$$

где параметр μ характеризует величину отталкивания между электронами.

Найдите температуру, при которой амплитуда рассеяния в куперовском канале обращается в бесконечность. Покажите, что эффект отталкивания сводится к замене константы λ в выражении (10.30) для T_c на

$$\lambda_* = \lambda - \frac{\mu}{1 + \nu_0 \mu \ln(\varepsilon_F/\omega_D)}. \tag{10.49}$$

Безразмерная величина кулоновского взаимодействия в металле есть $\nu_0\mu \approx e^2/\hbar v_F$ в пределе высокой электронной плотности и $\nu_0\mu \approx 1$ при обычных значениях плотности. Соответственно максимально возможная поправка к эффективной константе взаимодействия λ_*, согласно (10.49), имеет относительную малость $1/\ln(\varepsilon_F/\omega_D)$. Поэтому кулоновское взаимодействие в нормальном металле не может превратить притяжение в отталкивание и, следовательно, не подавляет сверхпроводимость.

Чтобы установить соответствие между моделью (10.48) и реальным кулоновским взаимодействием $V(\mathbf{q})$ в первом приближении достаточно подставить вместо μ среднее значение $V(\mathbf{q})$ в s-канале. Для случая экранированного кулоновского взаимодействия

$$V(\mathbf{q}) = \frac{4\pi e^2}{q^2 + \varkappa^2}, \quad \varkappa^2 = 8\pi\nu_0 e^2 \tag{10.50}$$

(см. задачу 45) получаем следующее выражение:

$$\mu = \langle V_c(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\rangle = \frac{\pi e^2}{p_0^2} \ln\left(1 + \frac{4p_0^2}{\varkappa^2}\right), \tag{10.51}$$

где усреднение производится по положениям импульсов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ на ферми-поверхности.

Задача 62. (*Тождество Уорда в нормальном металле*.) При вычислении электромагнитного отклика сверхпроводника центральное место занимает рассмотренное в гл. 9 тождество Уорда (9.16), следующее из калибровочной инвариантности. Оно приводит к сокращению градиентного и диамагнитного вкладов в электрический ток, с которым мы уже сталкивались в задаче 51 при выводе формулы Друде. Прежде чем заниматься электродинамикой сверхпроводников, изучим тождество (9.16) более подробно в случае нормального металла.

а. Рассмотрим линейный отклик тока $\mathbf{j}$ в идеальном ферми-газе электронов на неоднородный статический векторный потенциал $\mathbf{A}$. В импульсном представлении линейное соотношение между $\mathbf{j}$ и $\mathbf{A}$

записывается как $\mathbf{j_k} = Q(\mathbf{k})\,\mathbf{A_k}$. Калибровочная инвариантность требует, чтобы для ядра $Q(\mathbf{k})$ выполнялось свойство $Q(\mathbf{k}=0) = 0$. Согласно тождеству Уорда, это равенство обеспечивается сокращением градиентной $\langle \mathbf{v}\,G\,\mathbf{v}\,G\rangle$ и диамагнитной частей тока $\mathbf{j} = -(e/mc)\langle\psi^+(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})\rangle\mathbf{A}(\mathbf{r})$ (см. задачу 51).

Проверьте это сокращение еще раз в более общем виде, не предполагая спектр электронов $\xi(\mathbf{p})$ квадратичным, а считая его произвольной функцией. Используйте соотношение $\mathbf{v}(\mathbf{p}) = \nabla_{\mathbf{p}}\xi(\mathbf{p})$.

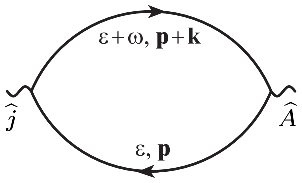

Рис. 10.10

б. (*Диамагнетизм Ландау.*) С помощью тождества Уорда можно найти орбитальную магнитную восприимчивость χ_0 газа невзаимодействующих электронов. Согласно результату части а, разложение $Q(\mathbf{k})$ по $\mathbf{k}$ начинается с члена второй степени: $Q(\mathbf{k}) = a\mathbf{k}^2 + \mathrm{O}(\mathbf{k}^4)$. Разложите петлю, показанную на рис. 10.10, по $\mathbf{k}$ и определите константу a. Как a связана с χ_0? Проверьте, что $\chi_0 = -\chi_{\text{пара}}/3$, где $\chi_{\text{пара}}$ — парамагнитная восприимчивость, найденная в задаче 23 (см. [1], § 37).

Если бы нас интересовало не сокращение $Q(0)$, а одно только вычисление χ_0, можно было бы действовать иначе. Рассмотрим оператор орбитального магнитного момента $\mu = (e/mc)[\mathbf{r}\times\mathbf{p}]$ и найдем его среднее, используя функцию Грина в слабом магнитном поле: $G_H(E, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \exp\left[i(e/\hbar c)\int \mathbf{A}(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'\right] G_0(E, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$. (Интеграл берется по прямому пути, соединяющему $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$.) Восприимчивость χ_0 получится, если выделить из G_H линейный по H член (см. [1], § 38, С. 416).

Задача 63. (*Уравнение Лондонов.*) Найдите отклик тока в сверхпроводнике на статический векторный потенциал. Отличие от задачи 62 состоит в том, что теперь сокращения при $\mathbf{k} = 0$ нет. Положив $\mathbf{k} = 0$ в соотношении $\mathbf{j_k} = Q(\mathbf{k})\,\mathbf{A_k}$, получим так называемое уравнение Лондонов:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\frac{e^2}{mc}\,n_s\mathbf{A}(\mathbf{r}). \tag{10.52}$$

Величина n_s называется сверхтекучей плотностью. Как связаны n_s и Δ при $|T - T_c| \ll T_c$?

Физическая причина отсутствия сокращения вкладов в $Q(0)$ заключается в том, что калибровочная инвариантность в сверхпроводнике спонтанно нарушена. В нормальном металле сокращение $Q(0)$ обеспечивается тождеством Уорда (9.16), следующим из калибровочной инвариантности. А в сверхпроводнике калибровочная инвариантность отсутствует.

Определите глубину проникновения магнитного поля в сверхпроводник. Для этого с помощью уравнения Лондонов решите задачу о проникновении магнитного поля в объем сверхпроводника вблизи поверхности. Покажите, что магнитное поле затухает в глубину по экспоненциальному закону: $H(x) = H(0)\exp(-x/\delta_\Lambda)$, $x > 0$, и найдите связь δ_Λ с n_s.

Покажите, что пренебрегать зависимостью ядра $Q(\mathbf{k})$ от $\mathbf{k}$ законно, если лондоновская глубина проникновения δ_Λ достаточно велика: $\delta_\Lambda \gg \xi_0 = \hbar v_F/\Delta_0$ (см. [1], § 37, п. 1).

Задача 64. (*Теорема Андерсона.*) Обычно говорят, что куперовские пары образованы электронами с противоположными импульсами и спинами. Оказывается, *беспорядок не разрушает куперовские пары*, хоть импульс и становится плохим квантовым числом. Качественно это можно пояснить так. В присутствии примесей электроны двигаются по ломаным, от одной примеси к другой. За каждым электроном вдоль линии его движения остается деформация решетки, представляющая собой шлейф из виртуальных фононов, рассасывающийся за время порядка ω_D^{-1}. Этот «ароматический след» притягивает другие электроны, причем эффект притяжения максимален для электрона, движущегося в точности по той же траектории, но в обратном направлении. Такие состояния есть при любой степени беспорядка, поскольку увеличение концентрации примесей лишь делает траектории более изломанными, но не выделяет определенного направления движения на каждой из них (в отличие, скажем, от траекторий в магнитном поле). Из этого рассуждения видно, что чисто потенциальное рассеяние на примесях, оставляющее систему инвариантной по отношению к обращению времени, не подавляет сверхпроводимость. А магнитное поле, например, подавляет.

Рассмотрите куперовскую восприимчивость χ_C в присутствие примесей. Чтобы получить χ_C, усредните по беспорядку диаграммы куперовской лестницы, изображенные на рис. 10.8. При этом каждый блок куперовской лестницы на рис. 10.8 превращается в диффузионную лестницу, подобную изображенной на рис. 9.7. Покажите, что наличие примесей не меняет $\chi_C(\mathbf{k}=0)$ и, следовательно, не приводит к изменению T_c.

10.4. Трудные задачи 65–67

Физика сверхпроводимости охватывает большое количество различных интересных явлений. При этом количественный анализ многих эффектов оказывается достаточно трудным. В этот раздел вынесены некоторые относительно сложные задачи о сверхпроводниках с примесями.

Задача 65*. (*Лондоновская длина в сплаве*[3].) Рассеяние на примесях уменьшает сверхтекучую плотность n_s в формуле Лондонов (10.52). Чтобы найти зависимость n_s от концентрации примесей, определим ядро $Q(0)$ с учетом беспорядка. Процедура усреднения по беспорядку аналогична рассмотренной в задачах 50 и 51, с той только

[3] См. работы А. А. Абрикосова и Л. П. Горькова, процитированные на с. 227.

разницей, что вместо функций Грина свободных фермионов в сверхпроводнике надо использовать нормальную и аномальную функции (10.35) и (10.36).

а. Усредните по примесям матричную функцию Грина $\widehat{G}$. Используйте введенную в гл. 9 модель δ-функционных примесей. Получите формулу

$$\langle \widehat{G}(i\omega, p)\rangle = \left(\widehat{G}_0(i\omega, \mathbf{p})^{-1} + \frac{i\omega - \Delta\tau_x}{2\tau(\omega^2+\Delta^2)^{1/2}}\right)^{-1}. \qquad (10.53)$$

Не теряя общности, вычисления можно упростить, считая $\Delta^* = \Delta$. При этом в матричной записи $\widehat{G}_0^{-1}(i\omega, \mathbf{p}) = i\omega - \tau_z\xi(\mathbf{p}) - \Delta\tau_x$.

б. Усредните по беспорядку диграмму для $Q(\mathbf{k})$, изображенную на рис. 10.10. Вычислив $\mathrm{Tr}(\,\widehat{\jmath}\,\widehat{G}\,\widehat{\jmath}\,\widehat{G})$ получите $Q(\mathbf{k})$, после чего по $Q(\mathbf{k} = 0)$ определите сверхтекучую плотность (см. [1], формула (39.28)).

Задача 66*. (*Влияние магнитных примесей на сверхпроводимость*[4].) Пусть кроме обычных примесей имеются также и магнитные:

$$H_{\rm int} = \sum_{\mathbf{r}_a} J\psi^+(\mathbf{r}_a)\widehat{\sigma}^k\widehat{S}^k_a\psi(\mathbf{r}_a). \qquad (10.54)$$

Здесь $\widehat{S}^k_a$ — оператор спина a-й примеси. Спины примесей будем считать некоррелированными. Такие примеси нарушают симметрию по отношению к обращению времени и поэтому легко подавляют сверхпроводимость. Найдите T_c как функцию концентрации примесей $n_{\text{маг}}$. Покажите, что сверхпроводимость подавляется при относительно малой концентрации $n_{\text{маг}} \approx T_c/v_F\sigma$, где σ — сечение рассеяния на магнитной примеси.

Задача 67*. (*Верхнее критическое поле H_{c2} в грязном сверхпроводнике*[5].) Сверхпроводимость можно подавить магнитным полем, поскольку оно нарушает симметрию по отношению к обращению времени. Как именно происходит это подавление, зависит от характеристик сверхпроводника. Рассмотрим грязный сверхпроводник, в котором $l \ll \xi_0$, и, начиная с сильного поля H, в котором сверхпроводимость подавлена, будем постепенно уменьшать величину H и определим пороговое значение H, при котором сверхпроводимость восстанавливается. Оказывается, для этого нужно изучить устойчивость системы по отношению к малым *неоднородным* флуктуациям $\Delta(\mathbf{r})$. Формально для этого надо рассмотреть куперовскую лестницу в слабом статическом поле $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, таком что $\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \mathbf{H}$. Записав для этого случая уравнение самосогласования (10.38) в пределе $\Delta \to 0$, найдите, при каком поле существует нетривиальное решение этого уравнения. Это поле называется *верхним критическим полем* H_{c2}.

---

[4] См. работу: *А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков*// ЖЭТФ. 1960. Т. 39. С. 1781.
[5] *Л. П. Горьков*// ЖЭТФ. 1959. Т. 36. С. 1918; *R. Helfand, N. R. Werthammer*// Phys. Rev. Lett. 1964. V. 13. P. 686.

10.5. Решения задач 65–67

58а. Выведем уравнение на $\Gamma^C(i\varepsilon, i\varepsilon')$, суммируя диаграммы на рис. 10.8. Заметим, что в этих диаграммах сумма 4-импульсов $s = p_1 + p_2$ одинакова в каждой петле. Поэтому интегральное уравнение, соответствующее этим диаграммам, имеет вид

$$\Gamma^C(p, p'; s) = \Gamma^0(p, p') + \int \Gamma^0(p, k)G(k)G(s-k)\Gamma^C(k, p'; s)\,\frac{d^4k}{(2\pi)^4} \qquad (10.55)$$

(конечно, по частотам следует брать не интеграл, а мацубаровскую сумму). Это уравнение отличается от аналогичного уравнения теории ферми-жидкости знаком перед интегральным членом. (Отличие возникает из-за того, что ферми-жидкостные диаграммы содержат фермионные петли, а куперовские диаграммы — нет.) Полагая $s = 0$ и пренебрегая зависимостью Γ^0 и Γ^C от пространственного импульса, перепишем уравнение (10.55) так:

$$\Gamma^C(i\varepsilon, i\varepsilon') = \Gamma^0(i\varepsilon, i\varepsilon') + {} + T\sum_{\varepsilon''}\int \Gamma^0(i\varepsilon, i\varepsilon'')G(i\varepsilon'', \mathbf{p})\,G(-i\varepsilon'', -\mathbf{p})\,\Gamma^C(i\varepsilon'', i\varepsilon')\,\frac{d^3p}{(2\pi)^3}. \qquad (10.56)$$

Интеграл по импульсам вычисляется переходом к интегрированию по ξ:

$$\int \frac{1}{(\varepsilon'')^2 + \xi_p^2}\,\frac{d^3p}{(2\pi)^3} = \frac{\pi\nu_0}{|\varepsilon''|}. \qquad (10.57)$$

Поэтому уравнение на куперовскую амплитуду принимает вид

$$\Gamma^C(i\varepsilon, i\varepsilon') = \Gamma^0(i\varepsilon, i\varepsilon') + \pi\nu_0 T\sum_{\varepsilon''}\Gamma^0(i\varepsilon, i\varepsilon'')\Gamma^C(i\varepsilon'', i\varepsilon')/|\varepsilon''|. \qquad (10.58)$$

58б. Уравнение (10.58) можно решить, если зависимость от ε и ε' факторизуется. Тогда уравнение становится вырожденным. Перепишем его, явно выделяя зависимость от ε':

$$\Gamma^C(i\varepsilon, i\varepsilon') = \lambda v(i\varepsilon)\Big(v(i\varepsilon') + \pi\nu_0 T\sum_{\varepsilon''}v(i\varepsilon'')\Gamma^C(i\varepsilon'', i\varepsilon')/|\varepsilon''|\Big). \qquad (10.59)$$

Таким образом, оба члена в уравнении пропорциональны $v(i\varepsilon)$, поэтому $\Gamma^C(i\varepsilon, i\varepsilon') \approx v(i\varepsilon)$. Из соображений симметрии следует, что зависимость от ε' такая же:

$$\Gamma^C(i\varepsilon, i\varepsilon') = \alpha v(i\varepsilon)v(i\varepsilon'), \qquad (10.60)$$

где α — константа, которую можно определить, подставив (10.60) в (10.59):

$$\alpha = \lambda + \pi\nu_0\alpha\lambda T\sum_{\varepsilon''}v^2(i\varepsilon'')/|\varepsilon''|. \qquad (10.61)$$

Таким образом,

$$\alpha = \lambda\Big(1 - \pi\nu_0\lambda T\sum_{\varepsilon''} v^2(i\varepsilon'')/|\varepsilon''|\Big)^{-1}. \tag{10.62}$$

Это выражение обращается в бесконечность, если

$$\pi T\sum_{\varepsilon''} v^2(i\varepsilon'')/|\varepsilon''| = 1/\lambda\nu_0. \tag{10.63}$$

Условие (10.63) и определяет температуру перехода T_c.

58 в. В случае

$$v(i\varepsilon) = \omega_D/(\omega_D^2+\varepsilon^2)^{1/2} \tag{10.64}$$

уравнение (10.63) принимает такой вид

$$2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\omega_D^2}{(\omega_D^2+\pi^2T_c^2(2n+1)^2)(2n+1)} = \frac{1}{\lambda\nu_0}. \tag{10.65}$$

Удобно вначале решить это уравнение с логарифмической точностью, а затем найти T_c более точно. Множитель $v^2(i\varepsilon)$ обрезает сумму в (10.63) при $n \approx n_{\max} = \omega_D/\pi T_c$. Если считать $n_{\max} \gg 1$ и пренебречь множителем $v^2(i\varepsilon)$, заменив верхний предел суммы на $n_{\max}$, получим

$$\sum_{n=0}^{n_{\max}}\frac{1}{n+1/2} = \ln n_{\max} = \frac{1}{\nu_0\lambda}, \tag{10.66}$$

откуда

$$T_c \approx \frac{\omega_D}{\pi}\, e^{-1/\lambda\nu_0}. \tag{10.67}$$

Значение коэффициента в этой формуле таким образом найти нельзя. Для этого надо точнее вычислить сумму в (10.65).

Заметим, что в сумме (10.65) имеются два масштаба: T_c и ω_D, причем, согласно (10.67), $T_c \ll \omega_D$. Поэтому вклады этих масштабов можно разделить, используя следующий стандартный прием. Разобьем сумму на две части: по $n < n_0$ и по $n > n_0$, причем точку разбиения n_0 выберем так, что $n_0 \gg 1$, и одновременно $2\pi T_c n_0 \ll \omega_D$. Найдем сумму по каждой из областей, а затем сложим результаты. В области $n < n_0$ можно заменить функцию $v(i\varepsilon)$ на единицу, после чего эта часть суммы легко вычисляется с помощью тождеств

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}/k = \ln 2, \quad \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}1/k - \ln n\right) = C, \tag{10.68}$$

где $C = 0,577\ldots$ — постоянная Эйлера. Складывая эти два тождества, получаем вклад области $n < n_0$:

$$S(n<n_0) = \sum_{n=0}^{n_0}\frac{2}{2n+1} \approx \ln(2n_0). \tag{10.69}$$

В высокочастотной области $n > n_0$ можно пренебречь T_c по сравнению с ω_D и заменить сумму интегралом, который легко вычисляется:

$$S(n>n_0) = \int_{2\pi T n_0}^{\infty}\frac{\omega_D^2}{\varepsilon^2+\omega_D^2}\,\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = \frac12\ln\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2+\omega_D^2}\bigg|_{2\pi T n_0}^{\infty}. \tag{10.70}$$

В пределе $\omega_D \gg 2\pi n_0 T_c$ находим

$$S(n>n_0) = \ln\frac{\omega_D}{2\pi n_0 T_c}. \tag{10.71}$$

Теперь, суммируя вклады от областей $n < n_0$ и $n \geqslant n_0$, приводим уравнение (10.63) к виду

$$\frac{1}{\lambda\nu_0} = \ln\frac{\omega_D}{\pi T_c} + C. \tag{10.72}$$

Решая его, находим уточненное выражение для температуры перехода T_c:

$$T_c = \frac{2\gamma}{\pi}\,\omega_D e^{-1/\lambda\nu_0}, \tag{10.73}$$

где $\gamma = e^C$.

59 а. Диаграммы на рисунках 10.6, 10.7 показывают, что щель Δ возникает в результате свертки аномальной функции $F(i\varepsilon,\mathbf{p})$ и куперовской вершины $\Gamma^0(i\varepsilon,i\varepsilon')$. Поэтому в общем случае щель зависит от энергии и, соответственно, мы будем использовать обозначение $\widetilde{\Delta}(i\varepsilon)$. При этом уравнение самосогласования принимает следующий вид:

$$\widetilde{\Delta}(i\varepsilon) = T\sum_{\varepsilon'}\Gamma^0(i\varepsilon,i\varepsilon')F(i\varepsilon',\mathbf{r}=\mathbf{r}'), \tag{10.74}$$

а величина $F(i\varepsilon,\mathbf{r}=\mathbf{r}')$ равна

$$F(i\varepsilon,\mathbf{r}=\mathbf{r}') = \int\frac{\widetilde{\Delta}(i\varepsilon)}{\varepsilon^2+\xi_p^2+\widetilde{\Delta}^2(i\varepsilon)}\,\frac{d^3p}{(2\pi)^3}. \tag{10.75}$$

Таким образом, в общем случае щель следует определять из интегрального уравнения. Оно несколько упрощается, если зависимость $\Gamma^0(i\varepsilon,i\varepsilon')$ от энергии факторизуется. Тогда легко видеть, что щель $\widetilde{\Delta}(i\varepsilon)$ пропорциональна $v(i\varepsilon)$. Таким образом, сверхпроводящие эффекты «выключаются» при $|\varepsilon| \gg \omega_D$. Записывая $\widetilde{\Delta}(i\varepsilon)$ в виде

$$\widetilde{\Delta}(i\varepsilon) = \Delta(T)v(i\varepsilon), \tag{10.76}$$

получаем уравнение

$$\Delta(T) = \lambda T\sum_{\varepsilon}\int\frac{v^2(i\varepsilon)\Delta(T)}{\varepsilon^2+\xi_{\mathbf{p}}^2+v^2(i\varepsilon)\Delta^2(T)}\,\frac{d^3p}{(2\pi)^3}. \tag{10.77}$$

59 б. Вычислив интеграл по ξ в соотношении (10.77), получаем

$$\frac{1}{\lambda\nu_0} = \pi T\sum_{\varepsilon}\frac{v^2(i\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon^2+\Delta^2(T)v^2(i\varepsilon)}}. \tag{10.78}$$

Рассмотрим качественно, как ведет себя решение этого уравнения. При $T \ll \Delta(T)$ сумму в правой части можно заменить интегралом. Таким образом, в этом пределе зависимость от T исчезает, и $\Delta(T)$ стремится к постоянному пределу. Зависимость от T должна быть слабой, поскольку для гладкой функции сумма очень хорошо аппроксимирует значение интеграла.

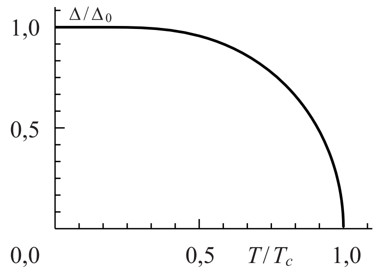

Рис. 10.11

Ясно также, что при увеличении температуры величина щели $\Delta(T)$ будет уменьшаться. Формально это следует из того, что сумма в правой части (10.78) недооценивает значение интеграла тем больше, чем больше расстояние между мацубаровскими частотами. Поэтому для того, чтобы удержать правую часть постоянной, рост температуры следует компенсировать убыванием $\Delta(T)$. Заметим, что при $\Delta = 0$ уравнение (10.78) совпадает с уравнением для определения температуры перехода (10.63), рассмотренным в предыдущей задаче. Это означает, что при $T = T_c$ щель $\Delta(T)$ обратится в нуль. Вблизи T_c правая часть (10.78) зависит линейно от $T - T_c$ и квадратично от $\Delta(T)$. Поэтому $\Delta(T) \approx \sqrt{T_c - T}$. Из этих рассуждений также следует, что $\Delta(0) \approx T_c$. Полученная таким образом качественная зависимость $\Delta(T)$ согласуется с результатом численного решения уравнения Горькова (рис. 10.11).

59в. Теперь вычислим $\Delta(T)$ при $T \to 0$. Вначале мы просто заменим сумму в (10.78) интегралом и получим, что $\Delta_0 \equiv \Delta(T=0)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\nu_0\lambda} = \int\limits_0^\infty \frac{v^2(i\varepsilon)\,d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_0^2 v^2(i\varepsilon)}}. \tag{10.79}$$

Найдем этот интеграл для нашей модельной функции $v(i\varepsilon) = \omega_D/(\varepsilon^2 + \omega_D^2)^{1/2}$. Вычисление сильно упрощается, если заметить, что $\Delta_0 \approx T_c \ll \omega_D$. Множитель $v^2(i\varepsilon)$ в подкоренном выражении важен лишь при $\varepsilon \leqslant \Delta_0$, но при таких энергиях $v^2(i\varepsilon) \approx 1$. С учетом этого обстоятельства уравнение на щель переписывается так:

$$\frac{1}{\nu_0\lambda} = \int\limits_0^\infty \frac{\omega_D^2\,d\varepsilon}{(\varepsilon^2 + \omega_D^2)\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_0^2}}. \tag{10.80}$$

В этом интеграле имеется два существенно разных масштаба энергий: Δ_0 и ω_D. Поэтому можно применить прием, использованный при решении предыдущей задачи: разбить область интегрирования на две части: $\varepsilon < \varepsilon_0$ и $\varepsilon > \varepsilon_0$, причем $\Delta_0 \ll \varepsilon_0 \ll \omega_D$. Тогда интеграл в правой части (10.80) равен

$$\int\limits_0^{\varepsilon_0} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_0^2}} + \int\limits_{\varepsilon_0}^\infty \frac{\omega_D^2\,d\varepsilon}{\varepsilon(\varepsilon^2 + \omega_D^2)} = \ln\frac{2\varepsilon_0}{\Delta_0} + \ln\frac{\omega_D}{\varepsilon_0}. \tag{10.81}$$

Промежуточная энергия ε_0 выпадает. Окончательно получаем

$$\frac{1}{\lambda\nu_0} = \ln\frac{2\omega_D}{\Delta_0}. \tag{10.82}$$

Сравнивая это соотношение с выражением (10.73) для температуры перехода T_c, получаем соотношение

$$\Delta_0 = \frac{\gamma}{\pi}\,T_c. \tag{10.83}$$

Заметим, что коэффициент в формуле (10.73) для T_c связан с конкретной формой обрезания по энергии. Что же касается соотношения (10.83) между Δ_0 и T_c, то при $T_c \ll \omega_D$ оно определяется только физикой низкоэнергетической области $\varepsilon \ll \omega_D$ и поэтому не зависит от выбора обрезающей функции $v(i\varepsilon)$. Кроме того, точно такое же соотношение между Δ_0 и T_c получается и при обрезании по ξ. Таким образом, соотношение (10.83) носит универсальный характер.

Теперь найдем поведение $\Delta(T)$ при конечных, но малых температурах. Для этого надо вычислить отличие суммы в правой части (10.78) от интеграла. Это можно было бы сделать с помощью формулы суммирования Пуассона (10.47). Однако гораздо проще получить ответ, заметив, что самым малым масштабом, на котором меняется правая часть (10.78), является Δ_0. Поэтому при расчете низкотемпературных поправок структурой правой части на масштабе ω_D можно пренебречь. Тогда можно переписать (10.77) как

$$\frac{1}{\lambda\nu_0} = T\sum_\varepsilon \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{d\xi}{\varepsilon^2 + \xi^2 + \Delta^2}. \tag{10.84}$$

Преобразуем правую часть, используя (7.83):

$$\frac{1}{\lambda\nu_0} = \int\limits_0^\infty \operatorname{th}\frac{\sqrt{\xi^2+\Delta^2}}{2T}\,\frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2+\Delta^2}}. \tag{10.85}$$

Этот интеграл логарифмически расходится, но его значение при $T = 0$ мы уже нашли, и сейчас нас интересуют поправки, возникающие при $T \neq 0$, которые, как мы сейчас увидим, описываются сходящимися интегралами. Минимальное значение аргумента гиперболического тангенса есть $\Delta/(2T) \gg 1$, поэтому можно заменить $\operatorname{th} x$ на $\operatorname{sgn} x\,(1 - 2\exp(-|x|))$. Таким образом,

$$\frac{1}{\lambda\nu_0} = \ln\frac{2\omega_D}{\Delta} - 2\int\limits_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2+\Delta^2}}\,\exp\left(-\frac{\sqrt{\xi^2+\Delta^2}}{T}\right). \tag{10.86}$$

Так как при интегрировании второго члена вклад дают лишь $\xi \ll \Delta$, можно разложить квадратные корни следующим образом:

$$\frac{1}{\nu_0\lambda} = \ln\frac{2\omega_D}{\Delta} - 2e^{-\Delta/T}\int_0^\infty e^{-\xi^2/2\Delta T}\left(1-\frac{\xi^2}{2\Delta^2}\right)\frac{d\xi}{\Delta}, \tag{10.87}$$

откуда

$$\ln\frac{\Delta}{\Delta_0} = -\sqrt{\frac{2\pi T}{\Delta}}\,e^{-\Delta/T}\left(1-\frac{T}{8\Delta}\right), \tag{10.88}$$

где $\Delta_0 = \gamma T_c/\pi$ — щель при $T = 0$. Выписанная поправка к Δ_0 понадобится нам при вычислении термодинамического потенциала в задаче 60. (Точность выражения (10.88) может показаться чрезмерной, но оказывается, что главный член в выражении (10.88) не дает вклада в термодинамический потенциал, и нам придется учесть выписанную поправку.) Окончательно получаем

$$\Delta(T \ll T_c) = \Delta_0\left(1-\sqrt{\frac{2\pi T}{\Delta_0}}\,e^{-\Delta_0/T}\left(1-\frac{T}{8\Delta_0}\right)\right). \tag{10.89}$$

Теперь рассмотрим случай $T \to T_c$. В этом пределе $\Delta(T) \ll T$, поэтому правую часть (10.78) можно разложить по Δ:

$$\frac{1}{\lambda\nu_0} = \pi T\sum_\varepsilon\left(\frac{v^2(i\varepsilon)}{|\varepsilon|} - \frac{\Delta^2 v^4(i\varepsilon)}{2|\varepsilon|^3}\right). \tag{10.90}$$

Как показано в задаче 58, первый член в правой части логарифмически зависит от T и сравнивается с левой частью при $T = T_c$. Поэтому его можно объединить с левой частью, получив $\ln T_c/T$. Что же касается второго члена, пропорционального Δ^2, то он определяется областью $\varepsilon \approx \pi T$, и в нем можно заменить $v^4(i\varepsilon)$ на единицу. Таким образом,

$$\ln\frac{T}{T_c} = -\frac{\pi\Delta^2}{2}\,T\sum_{\varepsilon_n}\frac{1}{|\varepsilon_n|^3}. \tag{10.91}$$

Сумма по мацубаровским частотам легко выражается через ζ-функцию:

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^x}, \quad \sum_{n=0}^\infty\frac{1}{(2n+1)^x} = \left(1-\frac{1}{2^x}\right)\zeta(x). \tag{10.92}$$

Разлагая логарифм в левой части, получаем

$$\frac{T-T_c}{T_c} = -\frac{7\zeta(3)}{8\pi^2}\frac{\Delta^2}{T_c^2}, \tag{10.93}$$

откуда

$$\Delta^2_{T\to T_c} = \frac{8\pi^2}{7\zeta(3)}T_c(T_c-T). \tag{10.94}$$

Таким образом, и в этом случае обрезка при $\omega \approx \omega_D$ оказалась несущественной для вычисления щели.

Подводя итог, можно сказать, что конкретный вид обрезания важен в основном для определения T_c. Все остальные физические величины сверхпроводника могут быть выражены через T_c с помощью универсальных соотношений, не зависящих от вида конкретной функции запаздывания $v(i\varepsilon)$. Это происходит потому, что физика сверхпроводника определяется масштабами энергий порядка $T_c \ll \omega_D$. Это оправдывает применение популярной модели, в которой запаздывание на временах порядка ω_D^{-1} учитывается с помощью обрезания интегралов по ξ, а не по ε, т. е. запаздывающее взаимодействие заменяется на взаимодействие нелокальное в пространстве.

60. Приступим теперь к расчету термодинамических величин сверхпроводника[6]. Характерный масштаб энергий, дающих вклад в термодинамику, оказывается порядка $\max\{\Delta_0, T_c\}$, и следовательно эффектами запаздывания на временах порядка ω_D^{-1} можно пренебречь, выражая все величины через T_c или Δ_0.

Рассмотрим диаграммное разложение термодинамического потенциала, показанное на рис. 10.9. Как обычно, продифференцируем термодинамический потенциал по константе связи λ для того, чтобы убрать множитель $1/n$ перед диаграммами. Как нетрудно заметить, если в каждой из диаграмм на рис. 10.9 перерезать одну из электронных линий, то получается одна из диаграмм на рис. 10.6, причем соответствие взаимнооднозначное. Поэтому

$$\frac{\lambda}{V}\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda} = T\sum_{\omega_n}\int G_0^{-1}(i\omega_n,\,\mathbf{p})\Big(G(i\omega_n,\,\mathbf{p}) - G_0(i\omega_n,\,\mathbf{p})\Big)\frac{d^3p}{(2\pi)^3} =$$
$$= -T\sum_{\omega_n}\int\Delta^*\,F(i\omega_n,\,\mathbf{p})\,\frac{d^3p}{(2\pi)^3} = -\frac{|\Delta|^2}{\lambda}. \tag{10.95}$$

Делая преобразование, мы воспользовались соотношениями (10.32) и (10.39).

Термодинамический потенциал получается интегрированием $\partial\Omega/\partial\lambda$ по λ от $\lambda = 0$ до истинного значения. Чтобы проинтегрировать по λ, выразим $d\lambda$ через $d\Delta$ с помощью (10.39):

$$\frac{d\lambda}{\lambda^2} = T\sum_{\omega_n}\int\frac{2\Delta\,d\Delta}{\left(\omega_n^2+\xi_{\mathbf{p}}+\Delta^2\right)^2}\frac{d^3p}{(2\pi)^3}. \tag{10.96}$$

Поэтому

$$\frac{\Omega_s-\Omega_n}{V} = -2\int_0^\Delta T\sum_{\omega_n}\int\frac{\Delta^3 d\Delta}{\left(\omega_n^2+\xi_{\mathbf{p}}^2+\Delta^2\right)^2}\frac{d^3p}{(2\pi)^3}. \tag{10.97}$$

[6] Эту задачу можно решить, вычисляя термодинамический потенциал идеального газа квазичастиц со спектром (10.37). Вместо этого мы воспользуемся диаграммами, чтобы проиллюстрировать некоторые общие положения.

Интегрируя по ξ и Δ, получим

$$\frac{\Omega_s-\Omega_n}{V}=-\pi\,\nu_0\,T\sum_{\omega_n}\left(\sqrt{\omega_n^2+\Delta^2}+\frac{\omega_n^2}{\sqrt{\omega_n^2+\Delta^2}}-2|\omega_n|\right). \qquad (10.98)$$

Снова рассмотрим предельные случаи.

а. $T\to 0$. При очень низкой температуре мацубаровская сумма $T\sum\limits_{\omega_n}\ldots$ хорошо аппроксимируется интегралом $\int\ldots d\omega/2\pi$. Поправки нетрудно найти, перейдя от суммы к интегралу по формуле Пуассона, и удержав в ней только первые три члена:

$$\sum_n f(n)=\int f(x)dx+\int e^{2\pi ix}f(x)dx+\int e^{-2\pi ix}f(x)dx+\ldots \qquad (10.99)$$

Здесь

$$f(x)=\sqrt{(2\pi Tx)^2+\Delta^2}+\frac{\Delta^2}{\sqrt{(2\pi Tx)^2+\Delta^2}}-4\pi T|x|. \qquad (10.100)$$

(Неаналитичность $|x|$ не мешает использовать формулу Пуассона, поскольку для последнего слагаемого сумму в формуле Пуассона можно вычислить явно, не делая никаких приближений.)

После громоздких вычислений, приведенных в конце решения, получим

$$\Omega_s=-\frac{V\,\nu_0\,\Delta^2}{2}\left(1+2\sqrt{\frac{2\pi\,T}{\Delta}}\,e^{-\Delta/T}\left(1+\frac{15}{8}\frac{T}{\Delta}\right)\right). \qquad (10.101)$$

Подставляя сюда $\Delta(T)$ из (10.89), находим

$$\Omega_s=-\frac{\nu_0\,V\,\Delta_0^2}{2}\left(1+4\sqrt{\frac{2\pi\,T^3}{\Delta_0^3}}\;e^{-\Delta_0/T}\right). \qquad (10.102)$$

Обратим внимание на происходящее здесь сокращение главного температурно-зависящего члена. Из (10.102) найдем теплоемкость, дифференцируя энтропию по T:

$$C_s=T\,\frac{\partial S_s}{\partial T}=-T\,\frac{\partial^2\Omega_s}{\partial T^2}=2\,\nu_0\,V\sqrt{\frac{2\pi\,\Delta_0^5}{T^3}}\;e^{-\Delta_0/T}. \qquad (10.103)$$

б. $T\to T_c$. В этом случае достаточно просто разложить (10.98) до четвертого порядка по Δ (член второго порядка обращается в нуль):

$$\frac{\Omega_s-\Omega_n}{V}=-\pi\,\nu_0\,\Delta^4\,T\sum_{\omega_n}\frac{1}{|\omega_n|^3}. \qquad (10.104)$$

Сумма, как и в задаче 59, выражается через ζ-функцию:

$$\frac{\Omega_s-\Omega_n}{V}=-\frac{7\zeta(3)}{16\pi^2}\,\frac{\nu_0\,\Delta^4}{T_c^2}. \qquad (10.105)$$

Подставляя сюда Δ из (10.94), получим

$$\Omega_s-\Omega_n=-\frac{4\pi^2}{7\zeta(3)}\,V\,\nu_0\,(T-T_c)^2. \qquad (10.106)$$

Дифференцируя по температуре, находим теплоемкость:

$$C_s-C_n=\frac{8\pi^2}{7\zeta(3)}\,\nu_0\,T_c\,V. \qquad (10.107)$$

Напомним, что теплоемкость нормального металла есть

$$C_n=\frac{2\pi^2}{3}\,\nu_0\,V\,T, \qquad (10.108)$$

поэтому

$$\frac{C_s-C_n}{C_n}=\frac{12}{7\zeta(3)}. \qquad (10.109)$$

Вычислим сумму в (10.98) при $T\to 0$. Согласно формуле суммирования Пуассона,

$$\frac{\Omega_s-\Omega_n}{V}=-\pi\nu_0\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\sqrt{\omega^2+\Delta^2}+\frac{\omega_n^2}{\sqrt{\omega^2+\Delta^2}}-2|\omega|\right)v\,e^{ik\omega/T}\,\frac{d\omega}{2\pi}. \qquad (10.110)$$

Заметим, что первые два члена — плавные функции ω, поэтому интегралы от них экспоненциально малы. Поэтому нам достаточно удержать их лишь при $k=0,\pm1$. Что же касается последнего члена, то интеграл от него легко вычисляется и равен $-4T^2/k^2$. В результате выражение для термодинамического потенциала приводится к виду

$$\frac{\Omega_s-\Omega_n}{V}=-\nu_0\left[\int\limits_0^{\infty}\left(\sqrt{\omega^2+\Delta^2}+\frac{\omega^2}{\sqrt{\omega^2+\Delta^2}}-2\omega\right)d\omega+\right.$$
$$\left.+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\sqrt{\omega^2+\Delta^2}+\frac{\omega^2}{\sqrt{\omega^2+\Delta^2}}\right)\cos\frac{\omega}{T}\,d\omega-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{T^2}{k^2}\right]. \qquad (10.111)$$

Первый интеграл есть

$$\int\limits_0^{\infty}\left(\sqrt{\omega^2+\Delta^2}+\frac{\omega^2}{\sqrt{\omega^2+\Delta^2}}-2\omega\right)d\omega=\frac{\Delta^2}{2}, \qquad (10.112)$$

а сумма равна

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}. \qquad (10.113)$$

Оставшийся интеграл вычисляется так. Функция $\sqrt{\omega^2+\Delta^2}$ имеет скачок на разрезе, идущем от точки $i\Delta$ до бесконечности. В остальной же части верхней полуплоскости функция аналитична, поэтому контур интегрирования можно деформировать так, чтобы он огибал этот разрез (рис. 10.12).

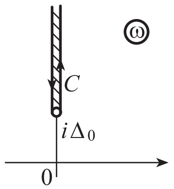

Рис. 10.12

Вводя переменную интегрирования u по формуле $\omega = i\Delta + iu$, приведем интеграл к виду

$$2\int_0^\infty \frac{\Delta^2+2u^2+4u\Delta}{\sqrt{2\Delta u+u^2}}\, e^{-(\Delta+u)/T}\, du. \qquad (10.114)$$

В этот интеграл дают вклад $u \approx T$, поэтому подынтегральное выражение можно разложить по u:

$$2\Delta^2 e^{-\Delta/T}\int_0^\infty \left(1+\frac{15}{4}\frac{u}{\Delta}\right) e^{-u/T}\,\frac{du}{\sqrt{2\Delta\, u}} = \sqrt{2\pi T\Delta^3}\; e^{-\Delta/T}\left(1+\frac{15}{8}\frac{T}{\Delta}\right). \qquad (10.115)$$

В результате

$$\frac{\Omega_s-\Omega_n}{V} = -\frac{\nu_0\,\Delta^2}{2}\left(1+2\sqrt{\frac{2\pi T}{\Delta}}\; e^{-\Delta/T}\left(1+\frac{15}{8}\frac{T}{\Delta}\right)\right)+\frac{\pi^2\nu_0 T^2}{3}. \qquad (10.116)$$

Заметим, что последний член в этой формуле есть не что иное, как взятый с обратным знаком термодинамический потенциал нормального металла.

61. Рассмотрим уравнение (10.58) для куперовской амплитуды рассеяния, полученное в решении задачи 58. Если куперовская амплитуда $\Gamma^C(i\varepsilon, i\varepsilon')$ имеет полюс при $T \to T_c$, то в уравнении (10.58) можно пренебречь свободным членом:

$$\Gamma^C(i\varepsilon, i\varepsilon') = \pi\nu_0 T\sum_{\varepsilon''}\Gamma^0(i\varepsilon, i\varepsilon'')\Gamma^C(i\varepsilon'', i\varepsilon')/|\varepsilon''|. \qquad (10.117)$$

Зависимость от ε' в этом уравнении «сокращается», и поэтому решение факторизуется:

$$\Gamma^C(i\varepsilon, i\varepsilon') = \Phi(i\varepsilon)\Phi(i\varepsilon'). \qquad (10.118)$$

(Зависимость Γ^C от ε и ε' должна быть одинаковой ввиду симметрии куперовской лестницы.) Тогда функция $\Phi(\varepsilon)$ удовлетворяет уравнению

$$\Phi(i\varepsilon) = \pi\nu_0 T\sum_{\varepsilon'}\left(\Gamma^0(i\varepsilon, i\varepsilon')/|\varepsilon'|\right)\,\Phi(i\varepsilon'). \qquad (10.119)$$

Для Γ^0 из условия задачи это интегральное уравнение оказывается вырожденным и легко решается. Видно, что функция $\Phi(\varepsilon)$ содержит два члена: пропорциональный $v(i\varepsilon)$ и не зависящий от ε. Ищем решение в виде

$$\Phi(\varepsilon) = av(i\varepsilon) + b. \qquad (10.120)$$

Подставляя это выражение в (10.119) и приравнивая коэффициенты перед $v(i\varepsilon)$ и перед константой, получаем

$$a = \pi\lambda\nu_0 T\sum_{\varepsilon'}\left[av^2(i\varepsilon') + bv(i\varepsilon')\right]/|\varepsilon'|, \qquad (10.121)$$

$$b = -\pi\mu\nu_0 T\sum_{\varepsilon'}\left[av(i\varepsilon) + b\right]/|\varepsilon'|. \qquad (10.122)$$

На этот раз мы не будем заниматься точным вычислением сумм в этом выражении, а найдем их с логарифмической точностью, поскольку основной интерес будут представлять величины, стоящие перед логарифмами. Суммы, содержащие $v(i\varepsilon)$ и $v^2(i\varepsilon)$ следует обрезать сверху при $\varepsilon \approx \omega_D$. Сумму, не содержащую факторов запаздывания, мы обрежем сверху при $\varepsilon \approx \omega_p$ ($\approx \varepsilon_F$) — на плазменной частоте, которая играет в физике электрон-электронного взаимодействия роль, аналогичную ω_D для электрон-фононного взаимодействия. Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} a &= \nu_0\lambda\ln\frac{\omega_D}{T}\,(a+b), \\ b &= -\mu\nu_0\left[a\ln\frac{\omega_D}{T} + b\left(\ln\frac{\omega_D}{T} + \ln\frac{\omega_p}{\omega_D}\right)\right]. \end{aligned} \qquad (10.123)$$

Перенося во втором уравнении член с $\ln(\omega_p/\omega_D)$ в левую часть, можно переписать его в таком виде, что оно становится похоже на первое:

$$b = -\nu_0\mu_*\ln\frac{\omega_D}{T}(a+b)\ , \quad \mu_* = \frac{\mu}{1+\nu_0\mu\ln(\omega_p/\omega_D)}. \qquad (10.124)$$

Мы ввели здесь эффективную куперовскую амплитуду μ_*, которая отличается от μ из-за запаздывания фононов. Теперь, складывая первое из уравнений (10.123) с уравнением (10.124), приходим к условию совместности системы (10.123):

$$1 = (\lambda-\mu_*)\ln\frac{\omega_D}{T}, \qquad (10.125)$$

из которого находим температуру перехода:

$$T_c \approx \omega_D\; e^{-1/\lambda_*\nu_0}, \quad \lambda_* = \lambda - \mu_*. \qquad (10.126)$$

Таким образом, кулоновское взаимодействие действительно понижает температуру сверхпроводящего перехода, но не очень сильно. При $\nu_0\mu\ln\omega_p/\omega_D \gg 1$ относительная поправка к λ мала как $1/\ln(\omega_p/\omega_D)$.

62 а. Прежде чем вычислять $Q(0)$ для произвольного электронного спектра $\xi(\mathbf{p})$, уточним выражение для тока. Гамильтониан частиц со спектром $\xi(\mathbf{p})$ во внешнем магнитном поле $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ есть

$$\widehat{\mathscr{H}} = \int \psi^+(\mathbf{r})\,\xi\left(\widehat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\,\psi(\mathbf{r})\,d^3\mathbf{r}. \qquad (10.127)$$

где $\widehat{\mathbf{p}} = -i\nabla_{\mathbf{r}}$. Ток, согласно общим принципам, получается варьированием гамильтониана по $\mathbf{A}$:

$$\widehat{\mathbf{j}} = e\,\psi^+(\mathbf{r})\,\nabla_{\mathbf{p}}\xi\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\,\psi(\mathbf{r}). \qquad (10.128)$$

Выделим линейный по $\mathbf{A}$ член:

$$\widehat{\mathbf{j}} = e\,\psi^+(\mathbf{r})\,\nabla_{\mathbf{p}}\xi\,(\mathbf{p})\;\psi(\mathbf{r}) - \frac{e^2}{c}\,\psi^+(\mathbf{r})\,\nabla_{\mathbf{p}}\left[(\mathbf{A}\nabla_{\mathbf{p}})\,\xi(\mathbf{p})\right]\psi(\mathbf{r}). \qquad (10.129)$$

При $\xi(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2m - E_F$ это выражение для тока переходит в обычную квантовомеханическую формулу.

Проще всего вычисляется вклад в $Q(0)$ второго члена:

$$Q^{(2)}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = -\frac{e^2}{c}\left\langle \psi^+ \frac{\partial^2\xi(\mathbf{p})}{\partial p_\alpha \partial p_\beta}\psi \right\rangle = -\frac{e^2}{c}\int \frac{\partial^2\xi(\mathbf{p})}{\partial p_\alpha \partial p_\beta}\, n_F(\xi(\mathbf{p}))\,\frac{2d^3p}{(2\pi)^3}. \tag{10.130}$$

Чтобы найти вклад первого члена, поступим стандартным образом. В линейном по $\mathbf{A}$ приближении взаимодействие тока с полем есть

$$\widehat{\mathscr{H}}_{\text{int}} = -\frac{1}{c}\int \widehat{\mathbf{j}}(\mathbf{r})\,\mathbf{A}(\mathbf{r})\,d^3r. \tag{10.131}$$

Находя, как обычно, поправку первого порядка к функции Грина и вычисляя с ее помощью $\langle\,\mathbf{j}\,\rangle$, получаем, что этот вклад дается петлей:

$$Q^{(1)}_{\alpha\beta}(i\Omega,\,\mathbf{k}) = -\frac{e^2}{c}\lim_{\tau\to+0} T\sum_{\omega_n}\int \frac{v_\alpha(\mathbf{p}+\mathbf{k})\,v_\beta(\mathbf{p})}{i\omega_n - \xi(\mathbf{p})}\,\frac{e^{i\omega_n\tau}}{i\omega_n + i\Omega - \xi(\mathbf{p}+\mathbf{k})}\,\frac{2d^3p}{(2\pi)^3}. \tag{10.132}$$

Мы ввели здесь множитель сходимости $e^{i\omega_n\tau}$ $(\tau\to+0)$, который отвечает за правильный порядок ψ и ψ^+ (ср. с задачей 35).

При $\Omega = 0$ и $\mathbf{k} = 0$ это выражение сводится к такому:

$$Q^{(1)}_{\alpha\beta}(0) = -\frac{e^2}{c}\lim_{\tau\to+0} T\sum_{\omega_n} e^{i\omega_n\tau}\int \frac{v_\alpha(\mathbf{p})\,v_\beta(\mathbf{p})}{(i\omega_n - \xi(\mathbf{p}))^2}\,\frac{2d^3p}{(2\pi)^3}. \tag{10.133}$$

Учитывая, что $\mathbf{v} = \nabla_{\mathbf{p}}\xi(\mathbf{p})$, перепишем $Q^{(1)}_{\alpha\beta}(0)$ в виде

$$Q^{(1)}_{\alpha\beta}(0) = -\frac{e^2}{c}\lim_{\tau\to+0} T\sum_{\omega_n} e^{i\omega_n\tau}\int v_\alpha(\mathbf{p})\,\nabla_\beta\frac{1}{i\omega_n - \xi(\mathbf{p})}\,\frac{2d^3p}{(2\pi)^3}, \tag{10.134}$$

после чего проинтегрируем по частям:

$$Q^{(1)}_{\alpha\beta}(0) = +\frac{e^2}{c}\lim_{\tau\to+0} T\sum_{\omega_n} e^{i\omega_n\tau}\int \nabla_\beta v_\alpha(\mathbf{p})\,\frac{1}{i\omega_n - \xi(\mathbf{p})}\,\frac{2d^3p}{(2\pi)^3} = -Q^{(2)}_{\alpha\beta} \tag{10.135}$$

(суммирование по мацубаровским частотам производится так же, как в выражении (7.59) в решении задачи 35). Итак, $Q_{\alpha\beta}(0) = 0$.

62б. Чтобы найти диамагнитную восприимчивость ферми-газа χ_0, свяжем ее с константой a в разложении $Q(\mathbf{k}) = a\mathbf{k}^2 + \ldots$ По определению $Q(\mathbf{k})$,

$$\mathbf{j} = \widehat{Q}\mathbf{A} = -a\nabla^2\mathbf{A}. \tag{10.136}$$

С другой стороны, ток связан с намагниченностью:

$$\mathbf{j} = c\,\mathrm{rot}\,\mathbf{M} = c\,\mathrm{rot}\,\chi_0\mathbf{B} = \chi_0 c\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}. \tag{10.137}$$

Поскольку $\mathrm{div}\,\mathbf{A} = 0$, ток можно записать так:

$$\mathbf{j} = -\chi_0 c\nabla^2\mathbf{A}. \tag{10.138}$$

Отсюда находим $\chi_0 = a/c$.

Теперь вычислим a. Предположим, что волновой вектор $\mathbf{k}$ направлен вдоль оси z, и найдем Q_{xx}:

$$Q_{xx} = -\lim_{\tau\to+0}\frac{e^2}{c} T\sum_{\omega_n} e^{i\omega_n\tau}\int \frac{v_x(\mathbf{p}+\mathbf{k})\,v_x(\mathbf{p})}{(i\omega_n - \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{k}})\,(i\omega_n - \xi_{\mathbf{p}})}\,\frac{2d^3p}{(2\pi)^3}. \tag{10.139}$$

В отличие от спиновой восприимчивости, орбитальная восприимчивость определяется не только окрестностью поверхности Ферми, но и всеми состояниями под ней, потому что квантование Ландау затрагивает все состояния с $E < E_F$, и конечная восприимчивость χ_0 возникает из-за отличия суммы квантованных энергий от интеграла по непрерывному спектру. Поэтому мы ограничимся случаем $\xi(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2m - E_F$. Разлагая $Q(k)$ по $k_z = k$, и имея в виду, что для квадратичного спектра $v_x(\mathbf{p}+\mathbf{k}) = v_x(\mathbf{p}) = p_x/m$, запишем

$$Q_{xx} = -\frac{e^2k^2}{c} T\sum_{\omega_n} e^{i\omega_n\tau}\int \frac{v_x^2}{i\omega_n - \xi_{\mathbf{p}}}\,\frac{\partial^2}{\partial p_z^2}\,\frac{1}{i\omega_n - \xi_{\mathbf{p}}}\,\frac{2\,d^3p}{(2\pi)^3}. \tag{10.140}$$

Проинтегрировав по частям, получим

$$\chi_0 = \frac{e^2}{c^2} T\sum_{\omega_n} e^{i\omega_n\tau}\int \frac{v_x^2\,v_z^2}{(i\omega_n - \xi_{\mathbf{p}})^4}\,\frac{2d^3p}{(2\pi)^3}. \tag{10.141}$$

Теперь усредним по углам ($\langle v_x^2 v_z^2\rangle = v^4/15$):

$$\chi_0 = \frac{e^2}{15c^2m^4}\, T\sum_{\omega_n} e^{i\omega_n\tau}\int \frac{p^4}{(i\omega_n - \xi_{\mathbf{p}})^4}\,\frac{2d^3p}{(2\pi)^3}. \tag{10.142}$$

Интеграл по модулю импульса трехкратным интегрированием по частям приводится к виду

$$\int\limits_0^\infty \frac{p^6\,dp}{\left(i\omega_n + E_F - p^2/2m\right)^4} = -\frac{5m^3}{2}\int\limits_0^\infty \frac{dp}{i\omega_n + E_F - p^2/2m}, \tag{10.143}$$

после чего суммирование по ω_n дает, как обычно, распределение Ферми (см. формулу (7.59) в решении задачи 35):

$$\chi_0 = -\frac{e^2}{12\pi^2mc^2}\int\limits_0^\infty n_F(\xi_p)\,dp = -\frac{e^2p_0}{12\pi^2mc^2}. \tag{10.144}$$

Используя выражение для спиновой восприимчивости, найденное в задаче 24,

$$\chi_{\text{пара}} = 2\mu_B^2\nu_0 = \frac{e^2}{4m^2c^2}\,\frac{mp_0}{\pi^2}, \tag{10.145}$$

находим соотношение между орбитальной и спиновой восприимчивостью:

$$\chi_0 = -\frac{1}{3}\chi_{\text{пара}}. \tag{10.146}$$

Отметим, что это соотношение не универсально. Как видно из нашего вычисления, вклад в χ_0 дает весь спектр, а не только поверхность Ферми. Поэтому полученное соотношение между χ_0 и $\chi_{\text{пара}}$ верно лишь для квадратичного спектра. При более общем законе дисперсии $\xi(\mathbf{p})$ восприимчивость χ_0 по величине может оказаться даже больше, чем $\chi_{\text{пара}}$. В этом случае нормальный металл оказывается диамагнетиком.

63. В этой задаче мы вычислим $Q(0)$ для сверхпроводника. Основное отличие от вычисления для нормального металла, проделанного в задаче 62, возникает из-за необходимости учесть как нормальные, так и аномальные средние.

Среднее от диамагнитного вклада в ток есть просто

$$Q^{(2)}(0) = -\frac{ne^2}{mc}. \tag{10.147}$$

Что же касается градиентного вклада $Q^{(1)}_{\alpha\beta}(i\Omega,\mathbf{k})$, то он получается усреднением произведения токов и дается следующим выражением:

$$Q^{(1)}_{\alpha\beta}(i\Omega_s,\mathbf{k}) = \frac{1}{2c}\sum_{\sigma,\sigma'}\int\limits_{-\beta}^{\beta} e^{i\Omega\tau}\,d\tau\int e^{i\mathbf{kr}}\,\times$$
$$\times\left\langle \mathrm{T}_\tau\,\psi^+_\sigma(\mathbf{r},\tau)\,\hat{j}_\alpha\psi_\sigma(\mathbf{r},\tau)\,\psi^+_{\sigma'}(0,0)\,\hat{j}_\beta\psi_{\sigma'}(0,0)\right\rangle d^3\mathbf{r} \tag{10.148}$$

(σ, σ' — спиновые индексы, а $\mathbf{j} = -i\dfrac{e}{m}\nabla_{\mathbf{r}}$).

Теперь необходимо спарить ψ-операторы, учитывая как нормальные, так и аномальные средние. При этом теорема Вика по-прежнему справедлива, поскольку операторы ψ и ψ^+ можно выразить линейным образом через операторы рождения и уничтожения квазичастиц сверхпроводника, для которых аномальные средние равны нулю. Таким образом,

$$\left\langle \mathrm{T}_\tau\,\psi^+_\sigma(\mathbf{r},\tau)\,\hat{j}_\alpha\psi_\sigma(\mathbf{r},\tau)\,\psi^+_{\sigma'}(0,0)\,\hat{j}_\beta\psi_{\sigma'}(0,0)\right\rangle =$$
$$= -\hat{j}_\alpha\,G_{\sigma\sigma'}(\mathbf{r},\tau)\,\hat{j}_\beta\,G_{\sigma'\sigma}(-\mathbf{r},-\tau) - \hat{j}_\alpha\,F^+_{\sigma\sigma'}(\mathbf{r},\tau)\,\hat{j}_\beta\,F_{\sigma'\sigma}(-\mathbf{r},-\tau). \tag{10.149}$$

Тогда $Q^{(1)}_{\alpha\beta}(i\Omega,\mathbf{k})$ принимает вид

$$Q^{(1)}_{\alpha\beta}(i\Omega,\mathbf{k}) = -\frac{1}{2c}\int\limits_{-\beta}^{\beta} e^{i\Omega\tau}\,d\tau\int e^{i\mathbf{kr}}\,\times$$
$$\times\left[2\hat{j}_\alpha\,G(\mathbf{r},\tau)\,\hat{j}_\beta\,G(-\mathbf{r},-\tau) + 2\hat{j}_\alpha\,F(\mathbf{r},\tau)\,\hat{j}_\beta\,F^*(-\mathbf{r},-\tau)\,d^3r\right]. \tag{10.150}$$

Заметим, что знаки петель, содержащих функции G и F, оказываются одинаковыми. Переписывая выражение (10.150) в импульсном представлении, получаем

$$Q^{(1)}_{\alpha\beta}(i\Omega,\mathbf{k}) = -\frac{Te^2}{c}\sum_{\omega_n}\int v_\alpha\left(\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}\right)\,v_\beta\left(\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}\right)\left\{G\left(i\omega_n,\,\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\,G\left(i\omega_n+i\Omega,\,\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}\right) + F\left(i\omega_n,\,\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}\right)\,F^*\left(i\omega_n+i\Omega,\,\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}\right)\right\}\frac{2d^3p}{(2\pi)^3}. \tag{10.151}$$

Тогда при $\mathbf{k} = 0$

$$Q^{(1)}(0) = \frac{1}{3}Q^{(1)}_{\alpha\alpha}(0) =$$
$$= -\frac{e^2T}{3m^2c}\sum_{\omega_n}\int\,\mathbf{p}^2\left(G^2(i\omega_n,\,\mathbf{p}) + |F(i\omega_n,\,\mathbf{p})|^2\right)\frac{2d^3p}{(2\pi)^3}. \tag{10.152}$$

Собирая вместе $Q^{(1)}$ и $Q^{(2)}$ и учитывая определение n_s, получим

$$n - n_s = -\frac{2T\nu_0p_0^2}{3m}\sum_{\omega_n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\Delta^2+\xi^2-\omega_n^2}{\left(\omega_n^2+\xi^2+\Delta^2\right)^2}\,d\xi. \tag{10.153}$$

Обратим внимание на то, что при интегрировании по ω выражение (10.153) обращается в нуль, в то время как при интегрировании по ξ этого не происходит. Следовательно, оно не вполне корректно определено. Дело в том, что эта величина не «сидит» на поверхности Ферми, и для правильного учета состояний вдали от уровня Ферми следовало бы брать плотность состояний, зависящую от энергии. Однако сверхтекучая плотность, несомненно, определяется поверхностью Ферми, потому что только там и происходит перестройка электронных состояний. В глубине же фермиевского моря (т. е. при $\xi \sim E_F$) ничего не происходит. Поэтому можно поступить так: вычесть из этого выражения аналогичное выражение с $\Delta = 0$, т. е. для нормального металла. Тогда вклад глубоких состояний выпадет. При этом, как мы знаем, для нормального металла $n_s = 0$. В результате

$$n_s = \frac{2\nu_0p_0^2}{3m}\,T\sum_{\omega_n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\xi^2-\omega_n^2}{\left(\xi^2+\omega_n^2\right)^2} - \frac{\xi^2-\omega_n^2+\Delta^2}{\left(\xi^2+\omega_n^2+\Delta^2\right)^2}\right]d\xi. \tag{10.154}$$

Получившееся выражение можно интегрировать в любом порядке. Лучше всего сначала проинтегрировать по ξ. При этом оказываются полезными следующие соотношения:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^2} = \frac{\pi}{2a^3},\qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\,dx}{\left(x^2+a^2\right)^2} = \frac{\pi}{2a}. \tag{10.155}$$

После интегрирования получаем ответ:

$$n_s = \frac{2\nu_0 p_0^2}{3m} T \sum_{\omega_n} \frac{\pi\Delta^2}{\left(\omega_n^2+\Delta^2\right)^{3/2}}\,. \tag{10.156}$$

Рассмотрим различные предельные случаи:

а) $T \to 0$. Заменим сумму интегралом

$$n_s = \frac{2\nu_0 p_0^2}{3m}\frac{\pi\Delta^2}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{\left(\omega^2+\Delta^2\right)^{3/2}} = \frac{2\nu_0 p_0^2}{3m} = \frac{p_0^3}{3\pi^2} = n. \tag{10.157}$$

Отсюда следует, что при $T=0$ сверхтекучая плотность равна полной, как и должно быть в трансляционно–инвариантной системе.

б) $T \to T_c$. В этом случае достаточно пренебречь Δ в знаменателе. Тогда сумма выражается через ζ-функцию (см. задачу 59), что дает

$$\frac{n_s}{n} = \frac{7\Delta^2}{4\pi^2 T_c^2} = 2\left(1-\frac{T}{T_c}\right). \tag{10.158}$$

Таким образом, при $T\to T_c$ сверхтекучая плотность уменьшается до нуля.

Теперь свяжем n_s с глубиной проникновения. Запишем закон Ампера:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j} = -\frac{4\pi n_s e^2}{mc^2}\mathbf{A}. \tag{10.159}$$

Поскольку $\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$, имеем

$$\nabla^2\mathbf{A} = \frac{4\pi n_s e^2}{mc^2}\mathbf{A}. \tag{10.160}$$

Пусть граница образца перпендикулярна оси x, а магнитное поле параллельно оси z. Тогда

$$A_y(x) = A_y(0)\,e^{-x/\delta_\Lambda}, \tag{10.161}$$

где

$$\delta_\Lambda^2 = \frac{mc^2}{4\pi n_s e^2}. \tag{10.162}$$

Отсюда получаем, что магнитное поле

$$H_z = -\frac{\partial A_y}{\partial x} = \frac{A_y(0)}{\delta_\Lambda}\,e^{-x/\delta_\Lambda} = H_z(0)e^{-x/\delta_\Lambda} \tag{10.163}$$

экспоненциально затухает в глубь сверхпроводника, причем глубина проникновения равна δ_Λ.

В нашем расчете мы пренебрегали дисперсией $Q(k)$. Выясним, при каких условиях это законно, или, иными словами, каков масштаб пространственной дисперсии в сверхпроводнике. Чтобы определить этот масштаб, следует сравнить $\mathbf{kv}$ (это и есть величина, которой мы пренебрегли) со всеми остальными величинами в знаменателях функций G и F в (10.151). Сравнивая ξ с Δ, получаем характерный волновой вектор $k_0 \approx \xi^{-1}(T) \approx \Delta(T)/(\hbar v_F)$. Заметим, однако, что при $T\to T_c$

$\Delta(T)\to 0$ и основную роль в знаменателе играет $\omega_{n=0} = \pi T_c \approx \Delta_0$. Поэтому на самом деле характерный волновой вектор при любых температурах есть $k_0 \approx \xi_0^{-1} \approx \Delta_0/(\hbar v_F)$. Для того чтобы наш расчет был применим, должно быть $\delta_\Lambda \gg \xi_0$. В этом случае сверхпроводник называют лондоновским. Противоположный предельный случай называется пиппардовским.

В заключение покажем, как производить подобные расчеты с помощью матричной функции Грина

$$\widehat{G} = \begin{bmatrix} G_{\uparrow\uparrow} & F_{\uparrow\downarrow} \\ F_{\downarrow\uparrow} & G_{\downarrow\downarrow}\end{bmatrix}. \tag{10.164}$$

Она удовлетворяет такому уравнению:

$$\left(i\omega - \xi(\mathbf{p})\tau_z - \Delta_1\tau_x - \Delta_2\tau_y\right)\widehat{G} = \widehat{1} \tag{10.165}$$

$(\Delta = \Delta_1 + i\Delta_2)$. Оператор тока равен

$$\widehat{\mathbf{j}} = c\,\frac{\delta\widehat{G}^{-1}}{\delta\mathbf{A}} = e\mathbf{v}(\mathbf{p})\,\widehat{1} - \frac{e^2}{mc}\,\mathbf{A}\tau_z. \tag{10.166}$$

Сама $\widehat{G}$ равна

$$\widehat{G} = -\frac{1}{\omega_n^2+\xi^2+\Delta^2}\begin{pmatrix} i\omega_n+\xi & \Delta \\ \Delta^* & i\omega_n-\xi\end{pmatrix}. \tag{10.167}$$

Вычисляя

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}\Big(\widehat{j}_\alpha\,\widehat{G}(i\omega_n,\,\mathbf{p})\,\widehat{j}_\beta\,\widehat{G}(i\omega_n,\,\mathbf{p})\Big) &= \\ = \frac{e^2\,v_\alpha(\mathbf{p})\,v_\beta(\mathbf{p})}{\left(\omega_n^2+\xi^2+\Delta^2\right)^2}\operatorname{Tr}\Big(&(i\omega_n+\xi\tau_z+\Delta\tau_x)\,(i\omega_n+\xi\tau_z+\Delta\tau_x)\Big) = \\ &= 2e^2\,v_\alpha(\mathbf{p})\,v_\beta(\mathbf{p})\,\frac{\Delta^2+\xi^2-\omega_n^2}{\left(\omega_n^2+\xi^2+\Delta^2\right)^2},\end{aligned} \tag{10.168}$$

получим то же выражение, что и ранее (см. (10.156)).

64. Для того чтобы изучить влияние примесей на T_c, рассмотрим диаграммы, образующие один блок куперовской лестницы, и усредним их по беспорядку (рис. 10.13).

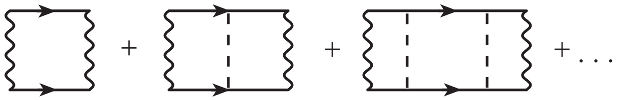

Рис. 10.13

Они имеют ту же структуру, что и диаграммы на рис. 10.8. Отличие состоит в том, что куперовская петля теперь содержит примесную лестницу, описывающую рассеяние куперовской пары на примесях. Поэтому

$$\Gamma^{\mathrm{C}} = -\frac{\lambda}{1+\lambda\Pi_c}, \tag{10.169}$$

где Π_c дается суммой лестничных диаграмм, представленной на рис. 10.14. По сути дела, такая сумма уже была вычислена нами

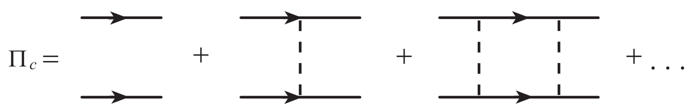

Рис. 10.14

в задаче 54. Напомним, что усредненная по беспорядку функция Грина в грязном металле равна

$$G(i\omega_n,\,\mathbf{p}) = \frac{1}{i\omega_n - \xi_p + (1/2\tau)\,\operatorname{sgn}\omega_n}. \tag{10.170}$$

Каждая ступенька куперовской лестницы, состоящая из двух функций Грина, взятая при $\Omega = 0$, $\mathbf{s} = 0$, есть

$$B_c(i\omega_n) = \int G(i\omega_n,\,\mathbf{p})\,G(-i\omega_n,\,-\mathbf{p})\,\frac{d^3p}{(2\pi)^3} = \\ = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu_0\,d\xi}{(\omega_n + (1/2\tau)\,\operatorname{sgn}\omega_n)^2 + \xi^2} = \frac{2\pi\nu_0\tau}{1 + 2\tau|\omega_n|}. \tag{10.171}$$

Суммировать B_c по ω_n не следует, поскольку столкновения с примесями — упругие.

Теперь вычислим всю примесную лестницу. При этом полезно вспомнить, что примесная штриховая линия равна $nu_0^2 = (2\pi\nu_0\tau)^{-1}$ (см. гл. 9). Суммируя геометрическую прогрессию, получаем

$$L(i\omega_n) = B_c(i\omega_n) + \frac{1}{2\pi\nu_0\tau}B_c^2(i\omega_n) + \ldots = \\ = \frac{B_c(i\omega_n)}{1 - B_c(i\omega_n)/(2\pi\nu_0\tau)} = \frac{\pi\nu_0}{|\omega_n|}. \tag{10.172}$$

Как мы видим, τ полностью исчезло из этой формулы. Отметим, что выпадение τ из ответа формально обязано тому же сокращению, которое обеспечивает сохранение числа частиц при вычислении коррелятора плотность–плотность в ферми газе с примесями:

$$\langle n(\omega,\,\mathbf{q})n(-\omega,\,-\mathbf{q})\rangle_{\mathbf{q}=0} = \frac{\pi\nu_0}{i\omega} \tag{10.173}$$

(см. задачу 52). Находим куперовскую петлю:

$$\Pi_c = -T\sum_{\omega_n} L(i\omega_n) = -2\pi\nu_0 T\sum_{\omega_n>0}\frac{1}{\omega_n} = -\nu_0\ln\frac{2\gamma\omega_D}{\pi T}. \tag{10.174}$$

Поэтому

$$T_c = \frac{2\gamma}{\pi}\,\omega_D e^{-1/\lambda\nu_0}, \tag{10.175}$$

как и в отсутствие примесей.

65 а. Начнем с усреднения функций Грина сверхпроводника по примесям. Для этого мы вычислим матричную собственно-энергетическую часть (рис. 10.15). При этом матричное выражение для примесной линии таково:

$$nu_0^2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi\nu_0\tau}\,\widehat{1} \tag{10.176}$$

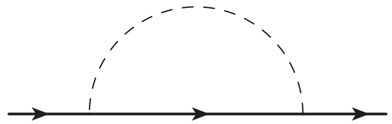

Рис. 10.15

(примеси одинаково хорошо рассеивают как электроны, бегущие как вперед, так и назад, и при этом не переводят одно из спаривающихся состояний в другое, поскольку у них разный спин). Вычисляем собственно-энергетическую часть в первом порядке по концентрации примесей, следуя методу задачи 50:

$$\widehat{\Sigma}(i\omega_n) = \frac{1}{2\pi\nu_0\tau}\int\widehat{G}(i\omega_n,\mathbf{p})\,\frac{d^3p}{(2\pi)^3} = -\frac{1}{2\pi\nu_0\tau}\int\frac{i\omega_n\widehat{1} + \xi_{\mathbf{p}}\widehat{\tau}_z - \Delta\widehat{\tau}_x}{\omega_n^2 + \Delta^2 + \xi_{\mathbf{p}}^2}\,\frac{d^3p}{(2\pi)^3}. \tag{10.177}$$

Интегрируя по ξ, получаем

$$\widehat{\Sigma}(i\omega_n) = -\frac{1}{2\tau}\,\frac{i\omega_n\,\widehat{1} + \Delta\widehat{\tau}_x}{\sqrt{\omega_n^2 + \Delta^2}}. \tag{10.178}$$

Таким образом,

$$\widehat{G}^{-1} = \widehat{G}_0^{-1} - \widehat{\Sigma} = i\widetilde{\omega}_n\widehat{1} - \xi\widehat{\tau}_z - \widetilde{\Delta}\widehat{\tau}_x, \tag{10.179}$$

где

$$\widetilde{\omega}_n = \omega_n\left(1 + \frac{1}{2\tau\sqrt{\omega_n^2 + \Delta^2}}\right), \quad \widetilde{\Delta} = \Delta\left(1 + \frac{1}{2\tau\sqrt{\omega_n^2 + \Delta^2}}\right). \tag{10.180}$$

Обратим внимание, что

$$\frac{\widetilde{\omega}_n}{\widetilde{\Delta}} = \frac{\omega_n}{\Delta}. \tag{10.181}$$

Как мы убедимся в дальнейшем, это свойство очень важно.

При вычислении $\widehat{\Sigma}$ мы использовали затравочные функции Грина G и F. Что произойдет, если теперь подставить исправленные функции Грина в выражение для $\widehat{\Sigma}$? Оказывается, $\widehat{\Sigma}$ при этом не изменится. Это легко видно из (10.178), поскольку при изменении в этом выражении ω_n и Δ в одно и то же число раз величина $\widehat{\Sigma}$ не меняется. Поэтому полученный нами ответ автоматически оказался решением интегрального уравнения для $\widehat{\Sigma}$, точно так же, как и для нормального металла (см. задачу 50).

Щель в грязном сверхпроводнике следует определять, решая уравнение самосогласования (10.38), принимающее вид

$$\Delta = \lambda T\sum_{\omega_n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\nu_0\,d\xi\,\widetilde{\Delta}}{\widetilde{\omega}_n^2 + \widetilde{\Delta}^2 + \xi^2}. \tag{10.182}$$

Интегрируя по ξ, приходим к уравнению

$$\Delta = \pi\lambda\nu_0 T\sum_{\omega_n}\frac{\widetilde{\Delta}}{\sqrt{\widetilde{\omega}_n^2+\widetilde{\Delta}^2}} = \pi\lambda\nu_0 T\sum_{\omega_n}\frac{\Delta}{\sqrt{\omega_n^2+\Delta^2}}, \qquad (10.183)$$

не содержащему концентрации примесей. (Во втором равенстве мы использовали (10.181).) Таким образом, примеси не влияют не только на T_c, но и на термодинамику сверхпроводника вообще. Так происходит потому, что для термодинамических свойств существенна лишь полная плотность состояний (или, грубо говоря, сколько длин волн укладывается на каждой квазичастичной траектории) и совершенно не важно, как эти состояния устроены (т. е. по каким конкретно траекториям движутся квазичастицы, по прямым, или по ломаным, рассеиваясь на примесях).

65б. Теперь рассмотрим отклик сверхтекучего тока на внешнее магнитное поле. В отличие от T_c, эта величина гораздо более чувствительна к форме траекторий и сильно изменяется даже при малых концентрациях примесей. (Достаточно, чтобы длина свободного пробега стала меньше, чем размер куперовской пары ξ_0.) Определим сверхтекучую плотность. Как и в задаче 51, для вычисления отклика достаточно провести вычисления с усредненными по примесям функциями Грина, потому что диаграмма с примесной линией, соединяющей разные функции Грина, равна нулю (из-за того, что вершина взаимодействия с электромагнитным полем векторная). Усредненные же функции Грина отличаются от затравочных лишь заменой $\omega_n \to \widetilde{\omega}_n$, $\Delta \to \widetilde{\Delta}$. Поэтому можно сразу написать формулу для n_s по аналогии с задачей 50:

$$\frac{n-n_s}{n} = T\sum_{\omega_n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi^2+\widetilde{\Delta}-\widetilde{\omega}_n^2}{\left(\xi^2+\widetilde{\Delta}+\widetilde{\omega}_n^2\right)^2}\,d\xi. \qquad (10.184)$$

Как и ранее, вычтем из этого выражения его значение при $\Delta = 0$, $\tau = \infty$, чтобы исключить вклад ферми-моря. Интегрирование по ξ дает

$$\frac{n_s}{n} = \pi T\sum_{\omega_n}\frac{\widetilde{\Delta}^2}{\left(\widetilde{\omega}^2+\widetilde{\Delta}^2\right)^{3/2}}. \qquad (10.185)$$

Итак,

$$\frac{n_s}{n} = \pi T\sum_{\omega_n}\frac{\Delta^2}{\left(\omega_n^2+\Delta^2\right)^{3/2}\left(1+\dfrac{1}{2\tau\sqrt{\omega_n^2+\Delta^2}}\right)}. \qquad (10.186)$$

При малой концентрации примесей, когда $\tau\Delta \gg 1$, это выражение воспроизводит результат задачи 63, а в противоположном «грязном»

пределе $\tau\Delta \ll 1$ дает следующее:

$$\frac{n_s}{n} = 2\pi\tau T\sum_{\omega_n}\frac{\Delta^2}{\left(\omega_n^2+\Delta^2\right)^2} = \pi\tau\Delta\,\mathrm{th}\,\frac{\Delta}{2T}. \qquad (10.187)$$

Интересно, что в грязном сверхпроводнике даже при $T \to 0$ сверхтекучая плотность много меньше полной:

$$\frac{n_s(T\to 0)}{n} = \pi\tau\Delta \ll 1. \qquad (10.188)$$

Это связано с нарушением трансляционной инвариантности и «торможением» электронов примесями.

Подставляя n_s в формулу для глубины проникновения δ_Λ, получаем

$$\delta_\Lambda = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mc^2}{e^2\,\Delta\tau\,\mathrm{th}(\Delta/2T)}}. \qquad (10.189)$$

66. Вначале найдем усредненную по парамагнитным примесям функцию Грина. Для того чтобы ее вычислить, мы используем модифицированную крестовую технику. Введем четырехкомпонентные функции Грина

$$\widehat{G} = -\begin{pmatrix}\langle \mathrm{T}_\tau\,\psi_\alpha^+(\mathbf{r},\,\tau)\psi_\beta(0,0)\rangle & \langle \mathrm{T}_\tau\,\psi_\alpha(\mathbf{r},\,\tau)\psi_\beta(0,0)\rangle\\ \langle \mathrm{T}_\tau\,\psi_\alpha^+(\mathbf{r},\,\tau)\psi_\beta^+(0,0)\rangle & \langle \mathrm{T}_\tau\,\psi_\alpha(\mathbf{r},\,\tau)\widehat{\psi}_\beta^+(0,0)\rangle\end{pmatrix} \qquad (10.190)$$

(α и β – спиновые индексы). При этом функция Грина в отсутствие примесей равна

$$\widehat{G}_0 = -\frac{1}{\omega_n^2+\xi^2+\Delta^2}\begin{pmatrix}(i\omega_n+\xi)\delta_{\alpha\beta} & -\Delta_{\alpha\beta}\\ -\Delta_{\alpha\beta}^+ & (i\omega_n-\xi)\delta_{\alpha\beta}\end{pmatrix}, \qquad (10.191)$$

а $\Delta_{\alpha\beta} = i\Delta\sigma_{\alpha\beta}^y$($\sigma_{\alpha\beta}^i$ — спиновые матрицы Паули). Как и в предыдущей задаче, найдем собственно-энергетическую часть из диаграммы на рис. 10.16. В случае парамагнитных примесей штриховая линия имеет нетривиальную спиновую структуру. Ее можно найти, вычислив коррелятор флуктуаций примесного потенциала:

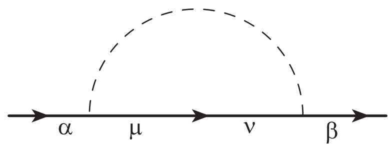

Рис. 10.16

$$\Big\langle\sum_a J\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a)\sigma_{\alpha\beta}^i S_i^a\sum_b J\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_b)\sigma_{\mu\nu}^k S_k^b\Big\rangle = n_{\text{маг}}J^2\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\times$$
$$\times\langle S^iS^k\rangle\sigma_{\alpha\beta}^i\sigma_{\mu\nu}^k = \frac{S(S+1)}{3}n_{\text{маг}}J^2\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\sigma_{\alpha\beta}^i\sigma_{\mu\nu}^i. \qquad (10.192)$$

Стоящее здесь скалярное произведение матриц Паули можно преобразовать, используя тождество Фирца (см. [9], § 28):

$$\sigma^i_{\alpha\beta}\sigma^i_{\mu\nu} = 2\delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu} - \delta_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu}. \tag{10.193}$$

Таким образом,

$$\widehat{\Sigma}_{\alpha\beta}(i\omega_n) = -\frac{n_{\text{маг}}}{3}J^2 S(S+1)\,(2\delta_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu} - \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu})\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widehat{G}_{\mu\nu}(i\omega_n,\,\xi)\,\nu_0\,d\xi. \tag{10.194}$$

Подставим вначале в этот интеграл $\widehat{G}_0$. Интегрирование производится довольно просто, и мы получаем

$$\widehat{\Sigma}_{\alpha\beta}(i\omega_n) = -\frac{1}{2\pi\tau_s}\frac{i\omega_n\widehat{1} - 2\delta_{\alpha\beta}\Delta_{\mu\nu}\delta_{\mu\nu}\widehat{\tau}_x + \Delta_{\alpha\beta}\widehat{\tau}_x}{\sqrt{\omega_n^2+\Delta^2}}, \tag{10.195}$$

где

$$\tau_s = \frac{3}{\pi\nu_0 n J^2 S(S+1)} \tag{10.196}$$

— время релаксации спина на примесях. Поскольку $\Delta_{\mu\nu}\delta_{\mu\nu} = 0$, то мы получаем таким образом, что $\widehat{G}^{-1} = \widehat{G}_0^{-1} - \widehat{\Sigma}$ отличается от $\widehat{G}_0$ заменой ω_n и Δ на

$$\begin{gathered}\widetilde{\omega}_n = \omega_n\left(1 + \frac{1}{2\tau_s\sqrt{\omega_n^2+\Delta^2}}\right),\\ \widetilde{\Delta} = \Delta\left(1 - \frac{1}{2\tau_s\sqrt{\omega_n^2+\Delta^2}}\right).\end{gathered} \tag{10.197}$$

Заметим, что, в отличие от задачи 64,

$$\frac{\widetilde{\omega}}{\widetilde{\Delta}} \neq \frac{\omega}{\Delta}. \tag{10.198}$$

Поэтому если теперь подставить $\widehat{G}$ в (10.194), то получится другое значение $\widehat{\Sigma}$. Попробуем решить задачу самосогласованно, подставляя в (10.194) $\widehat{G}$ с неизвестными $\widetilde{\omega}$ и $\widetilde{\Delta}$. Тогда

$$\widehat{\Sigma}_{\alpha\beta}(i\omega_n) = -\frac{1}{2\pi\tau_s}\frac{i\widetilde{\omega}_n\widehat{1} - \widetilde{\Delta}_{\alpha\beta}\widehat{\tau}_x}{\sqrt{\widetilde{\omega}_n^2+\widetilde{\Delta}^2}}. \tag{10.199}$$

Уравнение Дайсона теперь приводит к условию самосогласования, определяющему $\widetilde{\omega}$ и $\widetilde{\Delta}$:

$$\widetilde{\omega} = \omega + \frac{\widetilde{\omega}}{2\tau_s\sqrt{\widetilde{\omega}^2+\widetilde{\Delta}^2}}, \tag{10.200}$$

$$\widetilde{\Delta} = \Delta - \frac{\widetilde{\Delta}}{2\tau_s\sqrt{\widetilde{\omega}^2+\widetilde{\Delta}^2}}. \tag{10.201}$$

Теперь запишем уравнение Горькова (10.38), определяющее щель:

$$\begin{aligned}\Delta &= \lambda T\sum_{\omega_n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\nu_0\,d\xi\,F(i\omega_n,\,\xi) =\\ &= \lambda T\sum_{\omega_n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\widetilde{\Delta}\,\nu_0\,d\xi}{\widetilde{\omega}_n^2+\widetilde{\Delta}^2+\xi^2} = \pi\lambda\nu_0 T\sum_{\omega_n}\frac{\widetilde{\Delta}}{\sqrt{\widetilde{\omega_n}^2+\widetilde{\Delta}^2}}.\end{aligned} \tag{10.202}$$

Из-за того, что $\widetilde{\omega}/\widetilde{\Delta} \neq \omega/\Delta$, это уравнение отличается от уравнения для чистого сверхпроводника.

Выведем отсюда уравнение, определяющее температуру перехода сверхпроводника с парамагнитными примесями. Полагая $\Delta \to 0$, решим уравнения (10.200), (10.201):

$$\widetilde{\omega} = \omega + \frac{1}{2\tau_s}\operatorname{sgn}\omega, \tag{10.203}$$

$$\widetilde{\Delta}\left(1 + \frac{1}{2\tau_s|\widetilde{\omega}|}\right) = \Delta. \tag{10.204}$$

Тогда уравнение на T_c выглядит так:

$$\begin{aligned}1 = 2\pi\lambda\nu_0 T_c\sum_{\omega_n>0}\frac{\widetilde{\Delta}}{\Delta\widetilde{\omega}_n} &= 2\pi\lambda\nu_0 T_c\sum_{\omega_n>0}\frac{1}{\widetilde{\omega}_n+1/2\tau_s} =\\ &= 2\pi\lambda\nu_0 T_c\sum_{\omega_n>0}\frac{1}{\omega_n+1/\tau_s}.\end{aligned} \tag{10.205}$$

Остановимся на физическом смысле этой формулы. При рассеянии на парамагнитной примеси спин электрона может перевернуться, и τ_s есть среднее время между двумя переворотами спина, т. е. время жизни куперовской пары. Знаменатель в (10.205) описывает развал куперовских пар из-за рассеяния на магнитных примесях и уменьшение эффективного времени взаимодействия.

Если τ_s велико по сравнению с $\hbar/T_c$, то парамагнитные примеси лишь слегка сдвигают T_c. Но при $\tau_s \approx \hbar/T_c$ сверхпроводимость полностью подавляется. Найдем критическое τ_s^*, полагая $T_c = 0$ и заменяя сумму на интеграл:

$$\frac{1}{\lambda\nu_0} = \ln\frac{2\gamma\omega_D}{\pi T_c} = \int\limits_0^{\omega_D}\frac{d\omega}{\omega+1/\tau_s^*} = \ln(\omega_D\tau_s^*), \tag{10.206}$$

откуда

$$\tau_s^* = \frac{2\gamma\hbar}{\pi T_c^{(0)}}. \tag{10.207}$$

Таким образом, парамагнитные примеси даже в малых концентрациях могут существенно повлиять на свойства сверхпроводника и даже полностью подавить сверхпроводимость. При этом оказывается, что в определенном интервале по концентрации примесей существует режим так называемой бесщелевой сверхпроводимости, в котором сопротивление металла равно нулю, но энергетическая щель отсутствует. Так получается из-за того, что примеси меняют энергию связи электронов в паре по-разному в разных частях образца. Читатель, интересующийся этим эффектом, может обратиться к оригинальной работе[7].

67. Как и в задаче 64, мы вначале найдем куперовскую примесную лестницу, а затем подставим ее в уравнение самосогласования. Вычисление куперовской лестницы во внешнем магнитном поле в общем случае довольно сложно. Однако если поле медленно меняется на длине свободного пробега, эта задача сильно упрощается. Заметим, что две ступеньки примесной лестницы находятся друг от друга на расстоянии порядка l. Это позволяет пренебречь изменением поля на одной ступеньке и рассмотреть ступеньку в постоянном поле. Изменение поля мы учтем, переходя к суммированию ступенек, каждая из которых чувствует магнитное поле на своем отрезке траектории.

Поскольку нас интересуют неоднородные решения уравнения самосогласования, мы вначале вычислим примесную лестницу при ненулевом суммарном импульсе $\mathbf{s}$ в нулевом магнитном поле. Это можно сделать так же, как и в задаче 54. Одна ступенька лестницы есть

$$B_c = \iint \frac{\nu_0\,d\xi}{(i\omega - \xi + (i/2\tau)\,\operatorname{sgn}\omega)\,(-i\omega - \xi + \mathbf{sv} - (i/2\tau)\,\operatorname{sgn}\omega)}\,\frac{d\Omega}{4\pi} =$$

$$= \int \frac{2\pi\nu_0\tau}{1 + 2|\omega|\tau + i\tau\mathbf{sv}}\,\frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{2\pi\nu_0\tau}{1 + 2|\omega|\tau + \tau D\mathbf{s}^2} \qquad (10.208)$$

(D — коэффициент диффузии). Суммируя лестницу, получаем

$$C_\omega(\mathbf{s}) = \frac{B_c}{1 - B_c/2\pi\nu_0\tau} = \frac{2\pi\nu_0}{2|\omega| + D\mathbf{s}^2}. \qquad (10.209)$$

Теперь попробуем учесть магнитное поле. Пусть сначала его векторный потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ постоянен. Тогда его учет сведется к сдвигу импульсов $\mathbf{p} \to \mathbf{p} - e\mathbf{A}/c$ в функциях Грина. Поэтому в примесной лестнице $\mathbf{s}$ заменится на $\mathbf{s} - 2e\mathbf{A}/c$. Следовательно,

$$\widehat{C}_\omega = \frac{2\pi\nu_0}{2|\omega| + D\left(\mathbf{s} - \dfrac{2e}{c}\mathbf{A}\right)^2}. \qquad (10.210)$$

Удобно записать это выражение в координатном представлении. Будем считать $C_\omega(\mathbf{r},\,\mathbf{r}')$ функцией начальной и конечной точек. Заменяя $\mathbf{s}$ на $-i\nabla_{\mathbf{r}}$, перепишем выражение для куперона в форме дифференциального уравнения:

[7] *А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков*// ЖЭТФ. 1960. Т. 39. С. 178.

$$\left[2|\omega| + D\left(-i\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\right)^2\right] C_\omega(\mathbf{r},\,\mathbf{r}') = 2\pi\nu_0\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \qquad (10.211)$$

Что изменится, если $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ — медленно меняющаяся функция? Если мы намерены учитывать лишь первые два порядка по $\mathbf{A}$ в знаменателе (10.210), то легко понять, что все возможные усложнения связаны с появлением членов, зависящих от $\operatorname{div}\mathbf{A}$, поскольку это единственная вращательно инвариантная комбинация из производных $\mathbf{A}$. (Иными словами, если $\mathbf{A}$ становится функцией $\mathbf{r}$, возникает вопрос о порядке операторов $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ и ∇ в купероне.) Но выбирая калибровку, в которой $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$, мы всегда можем добиться исчезновения подобных поправок. Поэтому для того чтобы вычислить примесную лестницу, достаточно решить уравнение

$$\left[2|\omega| + D\left(-i\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} - \frac{2e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r})\right)^2\right] C_\omega(\mathbf{r},\,\mathbf{r}') = 2\pi\nu_0\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \qquad (10.212)$$

Это уравнение можно вывести и напрямую. Для этого надо рассмотреть такие поправки к одной «ступеньке»:

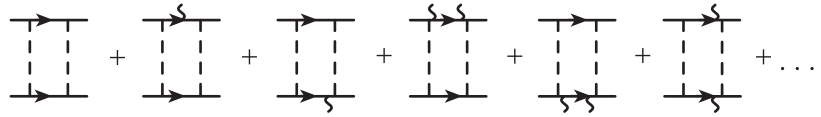

Рис. 10.17

(Волнистые линии на этом рисунке изображают взаимодействие с внешним магнитным полем.) После этого суммирование лестницы дает уравнение (10.212).

Теперь запишем уравнение самосогласования, полагая $\Delta \to 0$. Вблизи H_{c2} состояние неоднородно, поэтому Δ зависит от $\mathbf{r}$. Уравнение Горькова имеет вид

$$\Delta(\mathbf{r}) = \lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega,\,\mathbf{r},\,\mathbf{r})\,\frac{d\omega}{2\pi}. \qquad (10.213)$$

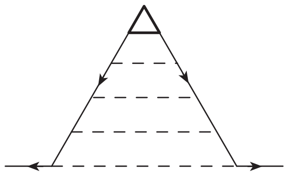

Рис. 10.18

Аномальная гриновская функция $F(\omega,\,\mathbf{r},\,\mathbf{r})$ дается при $\Delta \to 0$ единственной диаграммой (рис. 10.18). Сравнивая ее с диаграммой для примесной лестницы, находим

$$F(\omega,\,\mathbf{r},\,\mathbf{r}) = \int \Delta(\mathbf{r}')\,C_\omega(\mathbf{r},\,\mathbf{r}')\,d^3r'. \qquad (10.214)$$

Поэтому уравнение самосогласования записывается так:

$$\Delta(\mathbf{r}) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int C_\omega(\mathbf{r},\, \mathbf{r}')\, \Delta(\mathbf{r}')\, d^3r'. \qquad (10.215)$$

Чтобы найти его решения, удобно разложить $\Delta(\mathbf{r})$ по нормированным собственным функциям $\varphi_n(\mathbf{r})$ оператора в левой части (10.212). Эти функции обладают такими свойствами:

$$D\left(-i\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \frac{2e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r})\right)^2 \varphi_n(\mathbf{r}) = \mu_n \varphi_n(\mathbf{r}), \qquad (10.216)$$

$$\int \varphi_n(\mathbf{r})\, \varphi_m^*(\mathbf{r})\, d^3r = \delta_{nm} \qquad (10.217)$$

(μ_n — n-е собственное значение). Запишем $\Delta(\mathbf{r})$ в виде

$$\Delta(\mathbf{r}) = \sum_n \Delta_n\, \varphi_n(\mathbf{r}). \qquad (10.218)$$

Куперон можно выразить через $\varphi_n(\mathbf{r})$:

$$C_\omega(\mathbf{r},\, \mathbf{r}') = 2\pi\nu_0 \sum_n \frac{\varphi_n(\mathbf{r})\, \varphi_n^*(\mathbf{r}')}{2|\omega| + \mu_n}. \qquad (10.219)$$

Это соотношение легко проверить, заметив, что эта функция в силу (10.216) удовлетворяет уравнению при $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$, а при $\mathbf{r} \to \mathbf{r}'$ левая часть уравнения совпадает с δ-функцией, поскольку интеграл от нее по $\mathbf{r}$ равен 1 в силу (10.217).

Тогда уравнение (10.215) перепишется так:

$$\Delta_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi\nu_0\, \lambda\, \Delta_n}{2|\omega| + \mu_n} \frac{d\omega}{2\pi}. \qquad (10.220)$$

Оно имеет нетривиальное решение при

$$\frac{1}{\nu_0\lambda} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2|\omega| + \mu_n}. \qquad (10.221)$$

Интеграл следует обрезать сверху при $\omega = \omega_D$, как и ранее. В результате

$$\frac{1}{\nu_0\lambda} = \ln\frac{2\omega_D}{\mu_n}. \qquad (10.222)$$

Найдем собственные значения μ_n. Для этого нужно решить уравнение (10.216). Выберем калибровку $A_y = -Hx$. Заметим, что уравнение (10.216) совпадает с уравнением Шредингера для частицы с массой $m = (2D)^{-1}$, зарядом $q = 2e$ и энергией μ_n в магнитном поле H. Из квантовой механики известно, что в этом случае собственные значения таковы:

$$E_n = \omega_H\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}; \quad \omega_H = \frac{qH}{mc}. \qquad (10.223)$$

Это означает, что

$$\mu_n = \frac{4DeH}{c}\left(n + \frac{1}{2}\right) + Dk_z^2. \qquad (10.224)$$

Поскольку собственные значения растут с ростом H, критическое магнитное поле определяется наименьшим собственным значением. Оно равно $\mu_0 = 2DeH/c$. Таким образом,

$$\frac{1}{\nu_0\lambda} = \ln\frac{\omega_D c}{DeH_{c2}}. \qquad (10.225)$$

Выражая λ через T_c с помощью (10.73), получаем окончательно

$$H_{c2} = \frac{\pi}{2\gamma}\frac{T_c c}{De} = \frac{\pi}{\gamma}\frac{T_c}{\hbar D}\Phi_0, \qquad (10.226)$$

где $\Phi_0 = \hbar c/2e$ — квант потока.

Заметим, что собственные функции, отвечающие минимальному собственному значению, локализованы:

$$\varphi_{n,k_y}(x,\, y,\, z) = \frac{1}{\pi^{1/4} l_H^{1/2}}\, e^{ik_y y}\, e^{-(x-x_0)^2/2l_H^2}, \qquad (10.227)$$

где

$$l_H = \sqrt{\frac{\hbar c}{qH}}, \quad x_0 = \frac{ck_y}{qH}. \qquad (10.228)$$

Таким образом, сверхпроводимость возникает в «нитях»толщины l_H. При понижении поля концентрация нитей быстро возрастает, пока они не заполнят собой весь объем.

В каких случаях переход от сверхпроводимости к нормальному металлу в магнитном поле устроен так, как описано в решении? Чтобы ответить на этот вопрос, надо сравнить магнитные поля, соответствующие различным сценариям разрушения сверхпроводимости. Мы вычислили магнитное поле, соответствующее разрушению сверхпроводимости неоднородным образом. Оценим поле, соответствующее разрушению сверхпроводимости сразу во всем объеме. Для этого надо сравнить энергию магнитного поля в объеме сверхпроводника с энергией конденсации. Энергия магнитного поля на единицу объема есть

$$E = \frac{H^2}{8\pi}. \qquad (10.229)$$

Энергию конденсации легко оценить, считая, что частицы в интервале энергий Δ за счет конденсации понижают свою энергию на Δ. Число таких частиц в единице объема есть $\nu_0\Delta$, поэтому энергия конденсации равна

$$E_c \approx \nu_0\Delta^2 \approx \nu_0 T_c^2. \qquad (10.230)$$

Таким образом, магнитное поле, соответствующее однородному разрушению сверхпроводимости (*термодинамическое критическое поле*), есть

$$H_c \approx T_c \sqrt{\nu_0}\,. \tag{10.231}$$

Сравним его с H_{c2}:

$$\frac{H_c}{H_{c2}} \approx \sqrt{De\nu_0}\,c \approx \frac{v_F l \sqrt{mp_F/\hbar^3}}{c} \approx l\sqrt{\frac{e^2 p_F^3}{mc^3\hbar^3}} \approx \frac{l}{\delta_\Lambda}, \tag{10.232}$$

где δ_Λ — лондоновская глубина проникновения в чистом сверхпроводнике, определенная в (10.162). Таким образом, $H_{c2} \gg H_c$ при $l \ll \delta_\Lambda$. В этом случае H_{c2} действительно определяет границу сверхпроводящей фазы. Если же $H_{c2} \ll H_c$ (т. е. $\delta_\Lambda \ll l$), то переход происходит однородно по всему объему при поле H_c. В этом случае при $H = H_{c2} < H_c$ ничего особенного не происходит.