

流体江湖风云录（一）：索末菲学派那些事儿

阿诺德·索末菲 (Arnold Sommerfeld), 德国理论物理学家, 量子力学与原子物理学开山始祖之一。提起这个名字, 我们的思绪难免会回溯到一个世纪前那场波澜壮阔的量子革命。在那段星光璀璨的岁月里, 索末菲的慕尼黑学派与尼尔斯·玻尔 (Niels Bohr) 的哥本哈根以及马克斯·波恩 (Max Born) 的哥廷根学派交相辉映, 共同谱写了现代物理学最激动人心的篇章。在索末菲众多弟子中, 走出了五位诺贝尔奖获得者, 其中包括了沃尔夫冈·泡利 (Wolfgang Pauli) 和维尔纳·海森堡 (Werner Heisenberg) 等开宗立派的大师。而他本人则被提名了八十一一次之多, 可谓诺奖界的无冕之王。



阿诺德·索末菲 (1868-1951)

相比于在量子力学上全明星式的表现, 索末菲学派在其他经典物理领域的贡献无疑显得微不足道了。然而, 我们今天要讲的, 正是索末菲学派与一门经典学科之间的渊源与纠葛。世人皆惊叹于大师们在虚幻鬼魅的量子世界中天马行空的想象和洞若观火的解析, 却未必知道, 曾有这样一个经典力学的问题, 困扰了整个学派数十年之久, 穷两代人之力, 亦无法给出一个满意的解答。在索末菲学派的鼎盛时期, 这个问题让众多英才们如鲠在喉, 心结难解。

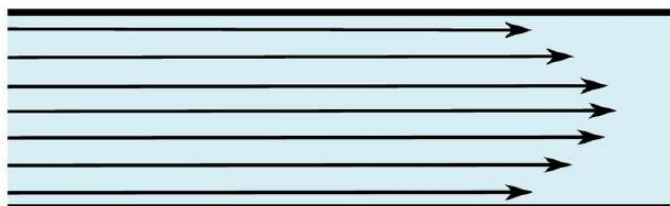
这门学科, 叫做流体力学; 而这个问题, 则是平行流动中的湍流触发机制。

1. 风云初起

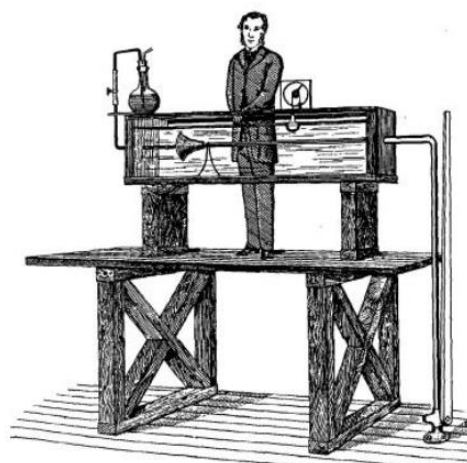
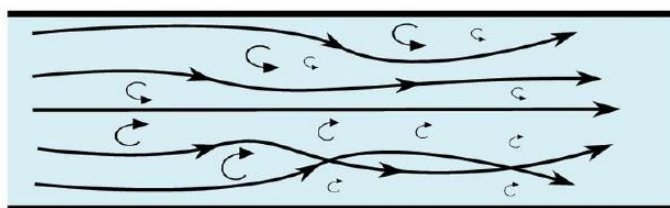
这个故事要从奥斯鲍恩·雷诺 (Osborne Reynolds) 那次著名的实验讲起。1883 年, 雷诺在管流实验中发现, 管道中流体的流动可以呈现两种截然不同的流态。当流速较低时, 流体质

点的轨迹线互相平行，互不掺杂，呈现层状流动的状态。当流速高于一个特定临界值时，流体质点的轨迹线开始变得紊乱，不规则的侧向脉动，伴随着流场中的漩涡的出现。前者被称为层流，后者被称为湍流。可是，湍流为什么以及何时会产生？现象背后的机理究竟是什么？这个问题，雷诺却百思不得其解。

laminar flow 层流



turbulent flow 湍流



奥斯鲍恩·雷诺
(1842-1912)

十余年间，无人理出任何头绪。

2. 初窥门径

索末菲对这一问题的研究始于 1900 年。这一年，索末菲 32 岁，已是亚琛工业大学的教授。在之前的人生中，他受到过费迪南德·林德曼 (Ferdinand Lindemann), 大卫·希尔伯特 (David Hilbert), 埃米尔·维舍特 (Emil Wiechert) 和菲利克斯·克莱因 (Felix Klein) 等数学物理大师的栽培和点拨；此时的他，身兼数派，神功初成，内力浑厚；六年之后，他将接任慕尼黑大学理论物理系的掌门人，在那里建立他的索末菲学派，名震江湖，睥睨天下。

索末菲一定没有忘记几年前在哥廷根跟随克莱因教授勤修苦练的那段日子。那时他人生的最大乐趣就是在数学阅览室里潜心研习克莱因的数学讲义。索末菲清楚地记得，在克莱因谈到雷诺的实验时，写下了这样一段话：“可以试图这样解释湍流模态的发生：当流速高于一个临界值时，层流的平行流动是一种不稳定的状态。这个不稳定性发生的原因却是不清楚的。” (“An explanation for the emergence of turbulent motions in the pipe is sought by saying: Beyond a critical speed the flow in parallel streaks is an ‘instable’ form of motion. Why the instability occurs, is unknown.”)

克莱因认为，湍流的发生机理可以转化为一个稳定性分析问题。当管流流速高于临界值时，层流变成了一种不稳定的状态，一个微小的扰动就足以将规则的层流破坏殆尽，使流场进

入紊乱的状态。这正如常人站在钢丝之上，有一点风吹草动就会失去平衡。然而，如何从数学上描述这种不稳定状态呢？

在索末菲思考这个问题的过程中，他有一个坚定的伙伴：亨德里克·洛伦兹 (Hendrik Lorentz)。此人可谓当时物理学界的全才，他推导的洛伦兹变换后来成为了阿尔伯特·爱因斯坦 (Albert Einstein) 狭义相对论的基础，他本人也因对塞曼效应的解释于 1902 年获得诺贝尔奖。索末菲最初的想法正是始于洛伦兹在 1897 年发表的一篇文章。文章中，洛伦兹推导了在层流场中叠加一个小扰动后流场能量的变化。索末菲循着这一思路展开了自己的研究，然而很快，他便发现这种方法走入了死胡同。索末菲苦恼地向 Lorentz 在信中诉说了这一境况，并在随后 1903 年的一次公众演说中谈到：“这似乎意味着理论流体力学体系在解决实际问题时的失效。至今仍然没有一种精确的理论方法可以计算出这个临界速度以及流速超过临界值时的压力梯度。” (“It seems that theoretical hydrodynamics would have to declare itself bankrupt in view of the practical problems of hydraulics. Still there is no precise theoretical method to determine the critical velocity and the pressure gradient beyond the critical velocity.”)

失望之余，索末菲的思考并没有停止。物理学的研究总是在山重水复中峰回路转，曲径通幽。1906 年，当索末菲读到一篇关于板壳变形失稳的文章时，意识到类似的方法或许适用于自己的问题。于是他开始着手建立这种经典的微扰动理论运用于平行流动稳定性时的数学模型。然而，这一次他发现，虽然建立了方程，却无法找到方程的解。数月之后在给 Lorentz 的信中，他再次提到：“可惜在解决流体力学临界速度这个问题上我仍然一无所获。” (“Unfortunately I still could not make progress with the problem to determine the critical velocity in hydrodynamics.”)

3. 众派之力

尽管身兼当世数位数学大师之长，在接下来的两年里，索末菲面对这个方程仍然一筹莫展。此时，年过不惑的索末菲体力渐衰，已有心余力绌之感。但是他决定，为这个问题再做一次努力。这一次，他决定集江湖各派之力。

于是，索末菲将他近十年来对流动稳定性问题的思考写入了一篇文章，寄往在罗马召开的第四届国际数学大会。这篇文章以对雷诺的致敬开篇：

“假设 ρ 为流体密度， μ 为流体粘性， U 为通过流动横截面的平均流速， b 为管道直径，那么 $R = \rho Ub / \mu$ 则是一个无量纲的纯数字，我们称之为雷诺数。” (“If ρ is the density, μ the viscosity of the fluid, U the mean velocity in a cross section, and b the diameter of the pipe, then $R = \rho Ub / \mu$ is a pure number which we will call the Reynolds number.”)

今世的各位流体力学家们大概不知道，整个流体力学中最重要无量纲数雷诺数 (Reynolds number) 正是在这篇文章中第一次得以命名。后来的研究发现，正是这个由管流密度，粘性，速度和直径组合得出的无量纲数的大小，决定了流动的状态。与其说存在一个临界速

度，更准确的说法是存在一个临界雷诺数 R_c ，当 $R > R_c$ 时流动便由稳定转为不稳定，层流转为湍流。

索末菲继续写道：“我们运用经典的小扰动方法来解决这个问题，但我们的方法与洛伦兹所用的完全不同。” (“It is this problem on which we will focus here, but by a method that is entirely different from that of Lorentz, namely the classical method of small oscillations.”) 接下来，索末菲写下了那个集自己数年之力想出的奥尔-索末菲 (Orr-Sommerfeld) 方程：

$$(U - c) \left(\frac{d^2 \phi}{dy^2} - \alpha^2 \phi \right) - \frac{d^2 U}{dy^2} \phi = -\frac{i}{\alpha R} \left(\frac{d^4 \phi}{dy^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2 \phi}{dy^2} + \alpha^4 \phi \right)$$

这个方程是在流体力学基本方程纳维叶-斯托克斯 (Navier-Stokes) 方程上叠加微小扰动后线性化所得到的，描述的是在层流速度剖面 $U(y)$ 上叠加振幅为 $\phi(y)$ 的微小扰动后，扰动随时间的变化。如果对于某一特定的雷诺数，任意扰动都随时间衰减，那么这个流动就是稳定的。反之则流动是不稳定的。

而在数学上，要表达上述物理描述，仅需两步：（1）找到微分方程的解 $\phi(y)$ 。（2）根据解的存在性条件列出特征方程，从中找到扰动随时间的变化规律，以及临界雷诺数 R_c 。

寥寥数语，天下无人能解。索末菲可能也不会想到，自己写下的这个方程，将会在接下来的数十年里困扰着自己的学派，乃至整个数学和物理界。

当然，我们现在这么说是有些偏颇的。当时的索末菲，思路远没有这么清晰，甚至对这个方程式是否可以有效的描述湍流的发生，也没有十足把握。正如今天连中学生都熟知的牛顿三定律，也是三百年前经过几代人的思考和提炼才得出的。

罗马这次会议的两个个月后，索末菲对自己的方程深感无力，在给同事的一封信中，他写道：“我已经被湍流问题折磨的心力交瘁，几乎将我所有的时间都献给了这个问题，但我始终无法解决它。” (“I have tortured myself continually with the turbulence problem and spent almost all of my time with it, but I could not accomplish it.”) 索末菲个人的挑战，宣告失败。

4. 一代奇才

然而，索末菲并不甘心让这个问题沉寂下去，毕竟，他执掌的慕尼黑学派人才济济。于是，他把问题交给了自己门下的众多弟子们。前两位担此重任的学生叫做路德维希·霍普夫 (Ludwig Hopf) 和弗里茨·诺特 (Fritz Noether)。此二人皆出身于学术世家：前者的表弟海因茨·霍普夫 (Heinz Hopf) 可谓二十世纪最杰出的数学家之一，而后者的姐姐艾米·诺特 (Emmy Noether) 更是被爱因斯坦称为数学史上最重要的女性。尽管家学渊源，师出名门，这两人并没能能在流动稳定性的问题上取得太大的进展。甚至，他们不约而同的认为，由奥尔-索末菲方程计算出来的平行流动在任何微扰动下都是稳定的。因此，必须寻找新的数学模型来描述湍流的发生。



路德维希·霍普夫 (1884-1939)



弗里茨·诺特 (1884-1939)

这个结论无疑为当时本就黯淡的前景又蒙上了一层黑纱。一波未平，一波又起。

索末菲决定另觅人选。环顾身边众多弟子，刚入门的海森堡无疑是最为根骨精奇，天赋过人的一个。在接下来的几年里，索末菲将自己毕生所学倾囊相授，唯望他能不负所托，光大师门。索末菲没有看错。两年后在哥廷根访学的日子里，年仅 21 岁的海森堡初出茅庐便让人印象深刻：马克思·波恩和路德维希·普朗特 (Lugwig Prandtl) 对他刮目相看；尼尔斯·玻尔更是对他抛出橄榄枝，邀他毕业后赴哥本哈根共图伟业。海森堡也的确没有让这些人失望，数年之后，他将携绝学矩阵力学和测不准原理重出江湖，执武林之牛耳。然而在这之前，他必须完成博士答辩，完成他的老师索末菲所托：那个已困扰了整个学派 20 余年的问题。



维尔纳·海森堡 (1901-1976)

之前我们说过，从数学上解决奥尔-索末菲方程仅需两步。然而，海森堡在第一步就遇到了困难。尽管他用巧妙的小参数摄动方法找出了方程的渐进解，但由于这些方法所引出的奇点问题，以及解的收敛性问题却让他顾此失彼，焦头烂额。当时的海森堡，对数学的运用并不像他后来那般纯熟，因此，尽管他的这些解后来被证明是正确的，他当时却未能给出严格的数学证明。对第一步中解的数学性质的理解不足直接导致了第二步中处理特征方程更大的困难。眼看答辩期限将至，海森堡还是一筹莫展。在数学上的捉襟见肘使得海森堡不得不另觅他径：凭借自己的物理直觉，海森堡拼凑出了一个临界雷诺数的解答，在答辩前夕如期上交了论文。

在老师索末菲的庇佑下，这篇论文顺利为海森堡赢得了博士学位。但由于数学分析上的不足，尤其是对于临界稳定区域太过粗略的近似，海森堡这个不严谨的解答并未得到物理学界的认可。

海森堡终究还是失败了，棋差一招，功亏一篑，并非招数不精，实乃内力不足。

索末菲终于心灰意冷了。在一次慕尼黑大学物理系教员会议上，他一脸无奈地说道：“我不该再将如此难的题目交给我的学生作为博士课题的。” *"I could not have suggested a theme of such difficulty for a doctoral dissertation to another of my pupils."* 索末菲学派对流动稳定性的挑战以失败告终，而湍流问题则成了索末菲一生的纠葛。科学巨匠西奥多·冯·卡门 (Theodore von Karman, 钱学森的导师) 在自传中记录了这样一段往事：“阿诺德·索末菲，这位著名的德国理论物理学家，曾经告诉我，在他死前，他希望能够理解两种现象—量子力学和湍流。我相信他更接近于理解引导了现代物理学的量子理论，而对湍流却还知之甚少。” (*"Arnold Sommerfeld, the noted German theoretical physicist of the*

1920s, once told me, for instance, that before he died he would like to understand two phenomena—quantum mechanics and turbulence. I believe he was somewhat nearer to an understanding of the quantum, the discovery that led to modern physics, but no closer to the meaning of turbulence.”)

这段话的另一个版本来自海森堡：“见到上帝时我想问他两个问题：为什么会有相对论？为什么会有湍流？我相信他对第一个问题一定有答案。” (“When I meet God, I am going to ask him two questions: Why relativity? And why turbulence? I really believe he will have an answer for the first.”) 但出处已不可考。

我们回到海森堡的博士论文。尽管他未能完整地解决问题，但这篇论文在当时无疑是一项开创性的最高水平研究。印度裔物理大师苏布拉马尼扬·钱德拉塞卡 (Subrahmanyan Chandrasekhar) 的评价或许最为公正：“尽管海森堡引入了诸多限制和近似，他对奥尔-索末菲方程的处理无疑对后续工作有着建设性的指导。” (“In spite of the limitations and approximations which Heisenberg used ... his treatment of the Orr-Sommerfeld equation has had a major impact on all subsequent developments.”) 然而，海森堡的失败让这个问题沉寂了二十年，物理学家们纷纷知难而退，无人再敢踏入禁区一步。

5. 巅峰之作

二十年后，在遥远的加州理工学院，一名来自中国的博士生向他的老师冯卡门提交了他的博士论文。这个博士生叫林家翘，论文的题目是“论湍流的形成” (“On the development of turbulence”)。文中，林家翘用更为严谨的数学方法得到了奥尔-索末菲方程的解，并严格论证了其收敛性。以此为基础，林家翘又用精妙的渐进方法进一步解出了特征方程，记算出了对于抛物线速度剖面的层流的临界雷诺数在 5300 左右。整个过程丝丝入扣，巧夺天工。



林家翘 (1916-2013)

此文一出，江湖哗然，天下震惊。赞许声，质疑声接踵而至。为平息纷争，在冯卡门的好友约翰·冯·诺依曼 (John von Neumann) 的建议下，当时在哥伦比亚大学任教的路维林·托马斯 (Llewellyn Thomas) 利用刚刚兴起的电子计算机验证了林家翘的解法，并将这个临界雷诺数最终定格在 5772.2。这一年已是 1953 年，距离雷诺的实验已有近一个世纪之久。这个世纪难题终告破解，林家翘的解法也成为了求解这类高阶微分方程的典范。天下太平，四海宾服。

令人难以置信的是，林家翘的这个通过严格数学方法得不稳定解，和海森堡当年根据物理直觉的推测并无大异，定性相符。为此，海森堡在给老师索末菲的信中，不无得意的写道：“我愉快地得知我博士论文的大部分内容依然是基本正确的。很明显，流体力学专家们现在已经同意抛物线速度剖面的流动的确是不稳定的。这正是我当年所声明的，而且我对不稳定区域的计算也是相当正确的。来自中国的科学家林家翘得到了同样的结果。” (“I was amused to find that evidently the main content of my dissertation was still all right. In particular, the specialist on hydrodynamics now apparently agree that the parabolic flow profile is indeed instable, as I had stated at that time, and that also my calculation of the region of instability was essentially correct. The same has been found in America by the Chinese scientist Lin.”) 我们不得不由衷地佩服海森堡天才的物理直觉。在他后来致力于量子力学领域的日子里，还会有几次短暂地回归湍流领域的研究，但这些都是后话了。

如果湍流是一部经典物理至高无上的武学秘笈，那么流动稳定性只能填满其第一章的内容。欲知后面的章节由谁来写，如何来写，请关注我们下回分解。

后记：对于索末菲学派的这段历史，网上流传的版本多有演义和夸张之嫌。本文旨在真实和完整地还原这段往事。尽管查阅了不少资料，但要将拙作呈于众多专家面前，我仍不免心怀惴惴。如果能让流体力学专业的同学们从文中获得一些启发，则我不胜荣幸。而对于其他专业的读者们，我也希望你们能感受到故事的精彩，体会到这门经典学科发展的不易。

为了使科学不显得枯燥乏味，我尽量把语言写的轻松诙谐，不去涉及太多的数学讲解，但同时也争取最大限度地遵循史实和科学。然而由于文字功力有限，有时不得不在故事的流畅性和严谨性上做出一定的取舍。比如，索末菲在罗马会议的文章中第一次推出的方程并非上文中列出的形式，而是对于线性速度剖面的特殊处理；海森堡的失败也并未让此类问题的研究完全“沉寂”二十年 — 1929 年沃尔特·托米恩 (Walter Tollmien) 发表的关于边界层稳定性的研究与海森堡的方法一脉相承。本文名为“索末菲学派那些事儿”，其实并未包涵索末菲学派对于流体力学的所有重大贡献。例如，索末菲大获成功的“润滑理论”，海森堡论文第二部分中对于完全发展湍流的研究，以及他后来对于各向同性湍流的阐释都未列入文中。如有其它疏漏和不足，也欢迎读者们指出。

最后，谨以此文纪念林家翘先生诞辰 100 周年！

2016 年 8 月 5 日