

Der Geometrieinfluß auf den transversalen magnetischen Widerstandseffekt bei rechteckförmigen Halbleiterplatten

VON HANS JOACHIM LIPPMANN und FRIEDRICH KUHRT

Aus dem Laboratorium der Zentralwerksverwaltung der Siemens-Schuckertwerke AG, Nürnberg
(Z. Naturforsch. 13 a, 462—474 [1958]; eingegangen am 20. März 1958)

Die Widerstandserhöhung eines Elektronenleiters im transversalen Magnetfeld hat zwei Ursachen: Abnahme der Trägerbeweglichkeit (physikalischer Widerstandseffekt) und Ablenkung der Strombahnen (geometrischer Widerstandseffekt). Für rechteckige Halbleiterplatten wird der Geometrieanteil der Widerstandserhöhung durch Lösung des Randwertproblems einer stromdurchflossenen Platte im transversalen Magnetfeld berechnet. Die Methode der konformen Abbildung führt für den Widerstand auf einen Integralausdruck, der für kleine und große HALL-Winkel Θ entwickelt wird. Der Geometrieinfluß auf die Widerstandserhöhung ist für kleine Magnetfelder quadratisch in Θ , für große Magnetfelder und endliche Seitenverhältnisse der rechteckförmigen Platten dagegen stets linear in $\text{tg } \Theta$. Das Übergangsgebiet zwischen kleinen und großen HALL-Winkeln wird durch numerische Auswertung des Integralausdruckes erschlossen. Für den Spezialfall quadratischer Platten wird die Feldabhängigkeit des Widerstandes durch eine für alle Θ gültige elementare Funktion beschrieben.

Bringt man einen Elektronenleiter in ein transversales magnetisches Feld, so nimmt sein Widerstand zu. Dieser experimentelle Befund wird als transversaler magnetischer Widerstandseffekt, im folgenden kurz als Widerstandseffekt bezeichnet. Der Widerstandseffekt ist um so größer, je höher die Elektronenbeweglichkeit des elektrischen Leiters ist. Materialien mit einem großen Widerstandseffekt sind neben Wismut mit einer Elektronenbeweglichkeit von $6000 \text{ cm}^2/\text{V sec}$, die durch WELKER und Mitarbeiter bekanntgewordenen III-V-Verbindungen, insbesondere Indiumantimonid und Indiumarsenid mit Elektronenbeweglichkeiten von etwa $60\,000 \text{ cm}^2/\text{V sec}$ bzw. $20\,000 \text{ cm}^2/\text{V sec}$ ¹.

Die Widerstandserhöhung eines Elektronenleiters im transversalen Magnetfeld hat zwei Ursachen, den „physikalischen“ und den „geometrischen“ Widerstandseffekt².

Der physikalische Widerstandseffekt beschreibt die Abnahme der spezifischen Leitfähigkeit σ eines Stoffes im transversalen Magnetfeld B . Durch die ablenkende Wirkung des Magnetfeldes werden die Elektronen daran gehindert, während des freien Fluges zwischen zwei Stößen der angelegten elektrischen Feldstärke mit der vollen, dem magnetfeldfreien Fall entsprechenden Driftgeschwindigkeit zu folgen. Die geringere Driftgeschwindigkeit der Elektronen entspricht einer kleineren Beweglichkeit μ und damit einer Abnahme der spezifischen Leitfähigkeit σ .

Nur bei langgestreckten Proben ist der physikalische Widerstandseffekt die alleinige Ursache für die Widerstandserhöhung im Magnetfeld. Für die Messung der Materialgröße σ als Funktion des Magnetfeldes B müssen daher möglichst lang gestreckte Proben verwendet werden.

Zu dem beschriebenen „physikalischen“ Widerstandseffekt tritt zusätzlich eine Widerstandserhöhung, die durch die Ablenkung der makroskopischen Strombahnen verursacht wird. Der Strom durchsetzt den Leiter also nicht mehr auf dem kürzesten Wege von einer Elektrode zur anderen, sondern je nach der Geometrie der Probe werden die Strombahnen mehr oder weniger seitlich abgedrängt. Die durch die Verlängerung der Strombahnen und die Verkleinerung ihrer Querschnitte bedingte Widerstandserhöhung wird als „geometrischer“ Widerstandseffekt bezeichnet.

Vergleicht man den „physikalischen“ und „geometrischen“ Widerstandseffekt hinsichtlich ihrer Größe, so findet man, daß der überwiegende Anteil der Widerstandserhöhung durch den Geometrieeffekt bedingt ist. Während z. B. bei Indiumantimonid mit einer Beweglichkeit von $40\,000 \text{ cm}^2/\text{V sec}$ der spezifische Widerstand bei einem Magnetfeld von $10\,000 \text{ G}$ auf das 1,5-fache ansteigt, beträgt die Widerstandserhöhung endlicher Proben bei geeigneter Wahl der Probenform das 10–20-fache des Widerstandswertes beim Magnetfeld Null.

Im folgenden wird der geometrische Widerstandseffekt bei rechteckförmigen Proben, d. h. der Geometrieinfluß auf die Widerstandserhöhung von

¹ H. WELKER, Elektrotechn. Z. 76, 513 [1955].

² H. WEISS u. H. WELKER, Z. Phys. 138, 322 [1954].

rechteckförmigen, stromdurchflossenen Platten im transversalen Magnetfeld berechnet. Dabei gehen in die Berechnung als elektrische Eigenschaften des Probenmaterials HALL-Konstante R_h und Leitfähigkeit σ ein, wobei σ wegen des physikalischen Widerstandseffektes als Funktion von B , also $\sigma = \sigma(B)$, gegeben ist.

1. Grundgleichungen und Invarianz des Hall-Winkels

Der Zusammenhang zwischen Stromdichte \mathbf{j} und elektrischer Feldstärke \mathfrak{E} wird im stromdurchflossenen Leiter durch das OHMSche Gesetz $\mathbf{j} = \sigma \mathfrak{E}$ beschrieben. Bei Vorhandensein eines Magnetfeldes \mathfrak{B} tritt an Stelle dieser einfachen Proportionalität zwischen Stromdichte \mathbf{j} und elektrischer Feldstärke \mathfrak{E} die um das LORENTZ-Glied $\sigma R_h [\mathbf{j}, \mathfrak{B}]$ erweiterte Gleichung

$$\mathbf{j} = \sigma \mathfrak{E} + \sigma R_h [\mathbf{j}, \mathfrak{B}]. \quad (1)$$

Im stationären Zustand ($d\mathfrak{B}/dt = 0$) muß das elektrische Feld wirbelfrei, also

$$\text{rot } \mathfrak{E} = 0 \quad (2)$$

sein, und der Satz von der Erhaltung der Ladung reduziert sich auf

$$\text{div } \mathbf{j} = 0. \quad (3)$$

Die Grundgl. (1) bis (3) beschreiben das Verhalten eines stromdurchflossenen Leiters im Magnetfeld vollständig³ und bilden den Ausgang für alle weiteren Überlegungen.

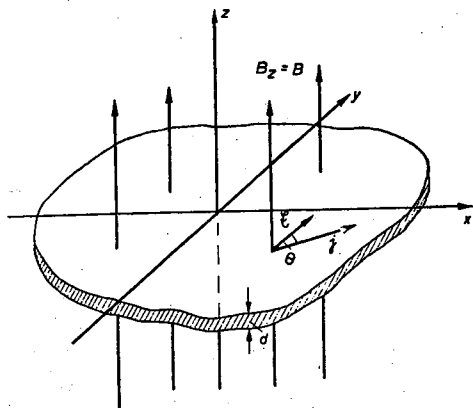


Abb. 1. Halbleiterplatte im transversalen Magnetfeld.

³ Das magnetische Eigenfeld des stromdurchflossenen Leiters wird dabei als klein gegen das von außen angelegte Magnetfeld vernachlässigt.

Als stromdurchflossenen Leiter betrachten wir eine ebene Platte der Dicke d parallel zur xy -Ebene (s. Abb. 1). Das angelegte Magnetfeld soll senkrecht auf der Plattenebene stehen (z -Richtung) und in der z -Richtung konstant sein. Dann sind die in der xy -Ebene liegenden Vektoren \mathfrak{E} und \mathbf{j} unabhängig von z , also nur noch Funktionen von x und y (zweidimensionales Problem). Multipliziert man Gl. (1) vektoriell mit \mathfrak{E} , so erhält man

$$[\mathbf{j}, \mathfrak{E}] = \sigma R_h [[\mathbf{j}, \mathfrak{B}], \mathfrak{E}] = \sigma R_h (\mathbf{j}, \mathfrak{E}) \mathfrak{B}.$$

Es muß also stets

$$|\mathbf{j}| |\mathfrak{E}| \sin \sphericalangle (\mathbf{j}, \mathfrak{E}) = \sigma R_h B |\mathbf{j}| |\mathfrak{E}| \cos \sphericalangle (\mathbf{j}, \mathfrak{E})$$

sein oder $\text{tg } \sphericalangle (\mathbf{j}, \mathfrak{E}) = \text{tg } \Theta = \sigma R_h B. \quad (4)$

Gl. (4) bringt einen allgemeinen Zusammenhang zwischen Stromfeld und elektrischem Feld zum Ausdruck: In jedem Punkt (x, y) der stromdurchflossenen Platte ist der Winkel zwischen \mathbf{j} und \mathfrak{E} , der sogenannte HALL-Winkel Θ , durch die magnetische Induktion B an dieser Stelle eindeutig bestimmt. Ist das Magnetfeld homogen, d. h. über die ganze Plattenebene konstant, so ist auch der HALL-Winkel Θ in jedem Punkt derselbe, also eine Invariante.

2. Berechnung des Widerstandes $R(B)$ einer rechteckförmigen Platte

2.1. Definition des Randwertproblems

Aus den Grundgl. (1) bis (3) folgt auf Grund einfacher vektoranalytischer Operationen

$$\text{rot } \mathbf{j} = 0 \quad (5) \quad \text{und} \quad \text{div } \mathfrak{E} = 0. \quad (6)$$

Gln. (2) und (5) besagen, daß elektrisches Feld \mathfrak{E} und Stromfeld \mathbf{j} Potentialfelder sind. Für das elektrische Potential $\varphi(x, y)$ bzw. das Strompotential $\psi(x, y)$ gelten wegen (6) bzw. (5) die Potentialgleichungen

$$\Delta \varphi(x, y) = 0 \quad (7) \quad \text{und} \quad \Delta \psi(x, y) = 0. \quad (8)$$

Für die Berechnung des geometrischen Widerstandseffektes interessiert die Potentialfunktion $\varphi(x, y)$ für eine rechteckförmige Platte mit den Seitenabmessungen a und b , deren elektrische Eigenschaften durch Leitfähigkeit $\sigma(B)$ und HALL-Konstante R_h beschrieben werden.

Die metallisch leitenden Elektroden (hohe Leitfähigkeit bei kleiner Trägerbeweglichkeit) erstrecken sich über die gesamte Breite b der Platte.

Zur Bestimmung der Potentialfunktion $\varphi(x, y)$ für die rechteckförmige Probe (Abb. 2) muß die Differentialgl. (7) mit folgenden Randbedingungen gelöst werden. Die Elektroden müssen Äquipotentiallinien sein, d. h. längs der beiden b -Ränder muß die Potentialfunktion konstante vorgegebene Werte annehmen. Ist U die an die Probe angelegte Spannung,

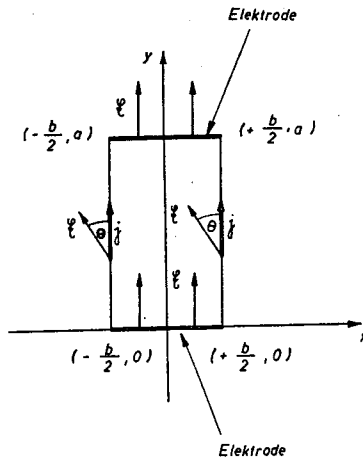


Abb. 2. Verhalten von \mathcal{E} und j auf den Rändern einer mit Elektroden versehenen rechteckigen Halbleiterplatte.

dann kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit gefordert werden, daß die untere Elektrode auf dem Potential U , die obere auf dem Potential Null liegt. Bei Wahl des Koordinatensystems nach Abb. 2 muß die x -Komponente der Stromdichte längs der in y -Richtung verlaufenden Ränder (a -Ränder) verschwinden, d. h. der Stromdichtevektor j weist in Richtung der Längsseiten a . Wegen der Invarianz des HALL-Winkels Θ bildet die elektrische Feldstärke \mathcal{E} mit der Stromdichte j den Winkel Θ . Auf den a -Rändern muß also gelten:

$$-\frac{E_x}{E_y} \Big|_{x=\pm b/2} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} / \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{x=\pm b/2} = \sigma R_h B. \quad (9)$$

Das Randwertproblem ist somit wie folgt definiert: Gesucht ist eine Funktion, $\varphi(x, y)$, die

1. im Inneren des Rechteckes mit den Seiten a und b

$$\Delta\varphi(x, y) = 0 \quad (7)$$

- und 2. auf den Rändern

$$\varphi(x, 0) = U, \quad \varphi(x, a) = 0$$

$$\text{sowie} \quad -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} / \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{x=\pm b/2} = \sigma R_h B \quad (10)$$

erfüllt.

2.2. Der Schwarz-Christoffelsche Satz

Die Randwertaufgabe unter 2.1. ist ein ebenes Potentialproblem. Für die Bestimmung der Funktion $\varphi(x, y)$ bietet sich daher die Methode der konformen Abbildung an.

Für die weiteren Überlegungen benötigen wir den SCHWARZ-CHRISTOFFELschen Satz der Funktionentheorie. Er sagt aus: In der $z = (x + iy)$ -Ebene sei ein Polygon mit den n Ecken z_1, z_2, \dots, z_n und den Außenwinkeln $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ (s. Abb. 3 a) vorgegeben. Dann läßt sich stets eine Funktion $z(\zeta)$ angeben, die das Innere des Polygons (schraffierter Bereich in Abb. 3 a) auf die obere Halbebene ($\eta > 0$) einer $\zeta = (\xi + i\eta)$ -Ebene (s. Abb. 3 b) abbildet. Bei dieser Abbildung geht der im

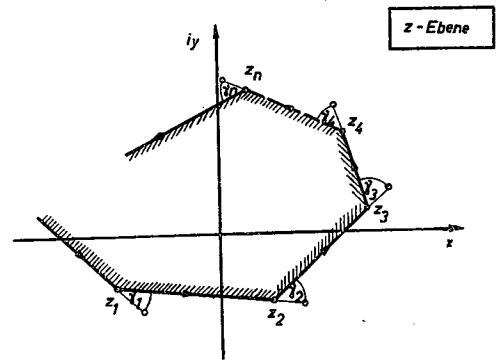


Abb. 3 a

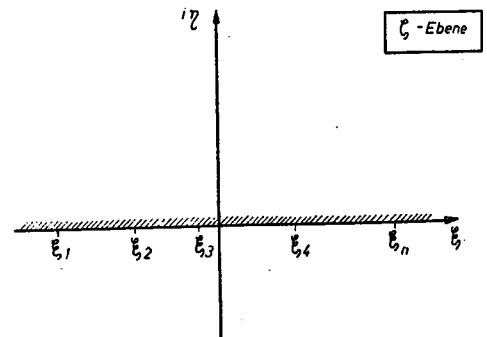


Abb. 3 b

Abb. 3. Abbildung des Inneren eines Polygonzuges in der z -Ebene auf die obere ζ -Halbebene.

mathematisch positiven Sinne durchlaufene Rand des Polygons in die ebenfalls mathematisch positiv durchlaufene reelle Achse (ξ -Achse) der ζ -Ebene über. Die Abbildungsfunktion kann so gewählt werden, daß die vorgegebenen Eckpunkte z_1, z_2, \dots, z_n in beliebige wählbare Punkte $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ übergehen. Die Abbildungsfunktion $z(\zeta)$ lautet

$$z(\zeta) = C \int_{\zeta_0}^{\zeta} (\zeta - \xi_1)^{-\gamma_1/\pi} (\zeta - \xi_2)^{-\gamma_2/\pi} \dots (\zeta - \xi_n)^{-\gamma_n/\pi} d\zeta. \quad (11)$$

n ist C eine endliche Konstante und ζ_0 der Bildpunkt des Koordinatenursprungs der z -Ebene.

Abbildung der rechteckförmigen Platte auf die obere ζ -Halbebene

Das xy -Koordinatensystem in Abb. 2 deuten wir mehr als komplexe $z = (x + iy)$ -Ebene (s. Abb. 4a). Eckpunkte des Rechtecks haben dann die Koordinaten $z_1 = b/2$; $z_2 = b/2 + ia$; $z_3 = -b/2 + ia$;

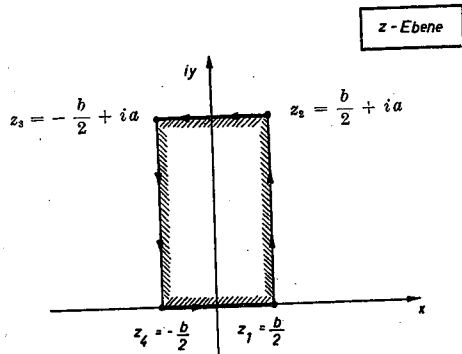


Abb. 4 a.

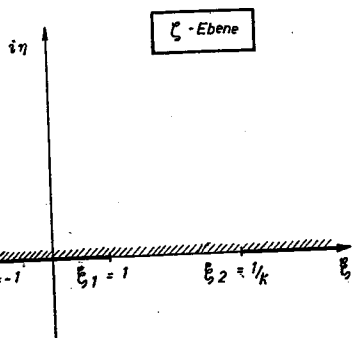


Abb. 4 b.

Funktion, die diese Abbildung vermittelt, lautet:

$$z(\zeta) = C \int_0^\zeta (\zeta - 1)^{-1/2} (\zeta - 1/k)^{-1/2} \cdot (\zeta + 1/k)^{-1/2} (\zeta + 1)^{-1/2} d\zeta \quad (12 a)$$

$$\text{oder } z(\zeta) = C k \int_0^\zeta \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} \quad (12 b)$$

Da die Abbildung den Punkt $z_1 = +b/2$ in den Punkt $\xi_1 = +1$ überführt, folgt als Bestimmungsgleichung für die Konstante C in (12):

$$\frac{b}{2} = C k \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} \quad (13)$$

Das Integral in (13) ist das vollständige elliptische Integral erster Gattung $K(k)$ als Funktion des Moduls k . Aus (13) folgt daher:

$$C = \frac{b}{2} \frac{1}{k K(k)} \quad (13 a)$$

Da die Seite a mit den Endpunkten $z_1 = b/2$ und $z_2 = b/2 + ia$ auf das Stück der reellen Achse von $\xi_1 = 1$ bis $\xi_2 = 1/k$ abgebildet wird, folgt aus (12 b):

$$a = C k \int_1^{1/k} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi^2-1)(1-k^2\xi^2)}} \quad (14)$$

Die Transformation des Integrals (14) mit Hilfe der Substitutionsgleichung $1 - k^2 \xi^2 = k'^2 \xi'^2$ (mit $k' = \sqrt{1 - k^2}$ komplementärer Modul) ergibt:

$$a = C k \int_0^1 \frac{d\xi'}{\sqrt{(1-\xi'^2)(1-k'^2\xi'^2)}} = C k K(k') \quad (14 a)$$

Durch Division von (14 a) und (13 a) folgt für den Zusammenhang zwischen dem Seitenverhältnis a/b und der in die Abbildungsfunktion (12) eingehenden Konstanten k

$$\frac{a}{b} = \frac{K(k')}{2 K(k)} \quad (15)$$

Abb. 5 zeigt den durch (15) beschriebenen Zusammenhang zwischen a/b und dem Modul k . Für $a/b = 0$ wird der Modul $k = 1$, für $a/b \rightarrow \infty$ geht k gegen Null. Während der durch Gl. (15) beschriebene allgemeine Zusammenhang zwischen a/b und dem Modul k transzendent ist, können für kleine a/b sowie für große a/b unter Benutzung der Entwicklungen⁴ der vollständigen elliptischen Integrale $K(k)$

⁴ F. OBERHETTINGER u. W. MANGNUS, Anwendung der elliptischen Funktionen in Physik und Technik, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1949, S. 3.

$z_4 = -b/2$. Die Abbildung dieses Rechtecks auf die obere ζ -Halbebene wird nach dem SCHWARZ-CHRISTOFFEL'Schen Satz so gewählt, daß die Eckpunkte z_1 bis z_4 in die Punkte $\xi_1 = +1$; $\xi_2 = +1/k$; $\xi_3 = -1/k$; $\xi_4 = -1$ und der Koordinatenursprung $z = 0$ in $\xi = 0$ übergehen. Die Bedeutung der Größe k folgt aus der weiteren Rechnung. Die untere Elektrode ($-b/2 \leq x \leq +b/2$; $y = 0$) geht bei dieser Abbildung in die Strecke $-1 \leq \xi \leq +1$ der reellen Achse der ζ -Ebene, die obere Elektrode ($-b/2 \leq x \leq +b/2$; $y = a$) dagegen in die beiden sich über den Punkt $\xi = \infty$ schließenden Strecken $1/k \leq \xi \leq \infty$ und $-\infty \leq \xi \leq -1/k$ über. Die

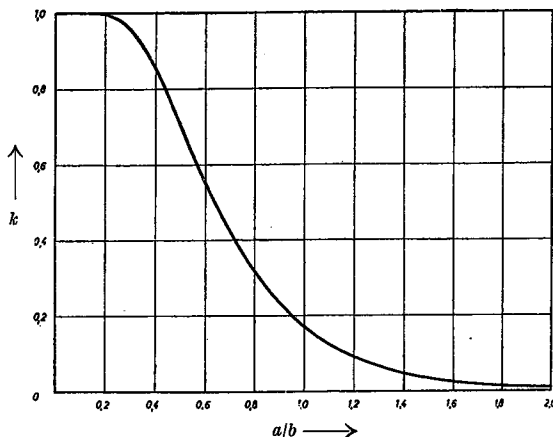


Abb. 5. Zusammenhang zwischen Seitenverhältnis a/b und Modul k .

bzw. $K(k')$ einfache Näherungsausdrücke angegeben werden. Für kleine a/b ergibt sich

$$k = 1 - 8 e^{-(\pi/2)(b/a)} \quad (15 a)$$

gültig im Bereich $0 \leq a/b \leq 0,35$ mit einer Genauigkeit von 1%.

Die Näherung für große a/b lautet

$$k = 4 e^{-\pi(a/b)} \quad (15 b)$$

gültig im Bereich $0,85 \leq a/b \leq \infty$ mit der Genauigkeit von 1%.

2.4. Bestimmung des elektrischen Potentials $v(\xi, \eta)$ in der oberen ζ -Halbebene

Bei der durch Gl. (12 b) beschriebenen konformen Abbildung geht das elektrische Potential $\varphi(x, y)$ über in eine Potentialfunktion $v(\xi, \eta)$. Auf der reellen Achse der ζ -Ebene gelten dann für $v(\xi, \eta)$ die Randbedingungen

$$v(\xi, 0) = U \text{ für } -1 \leq \xi \leq +1, \quad (16 a)$$

$$v(\xi, 0) = 0 \text{ für } 1/k \leq \xi \leq \infty \text{ und } -\infty \leq \xi \leq -1/k$$

sowie
$$-\left(\frac{\partial v}{\partial \eta} / \frac{\partial v}{\partial \xi}\right) = \sigma R_h B \quad (16 b)$$

für $1 \leq \xi \leq 1/k$ und $-1/k \leq \xi \leq -1$.

Die elektrischen Feldlinien haben daher in der ζ -Ebene den in Abb. 6 qualitativ dargestellten Verlauf. Sie beginnen senkrecht auf der Strecke $-1 \leq \xi \leq +1$ der reellen ξ -Achse (untere Elektrode) bzw. unter dem HALL-Winkel Θ auf der Strecke $1 \leq \xi \leq 1/k$ (rechter a -Rand) und fallen senkrecht auf den Strecken $1/k \leq \xi \leq \infty$ und $-\infty \leq \xi \leq -1/k$ (obere Elektrode) bzw. unter dem Winkel Θ auf der Strecke $-1/k \leq \xi \leq -1$ (linker a -Rand) ein.

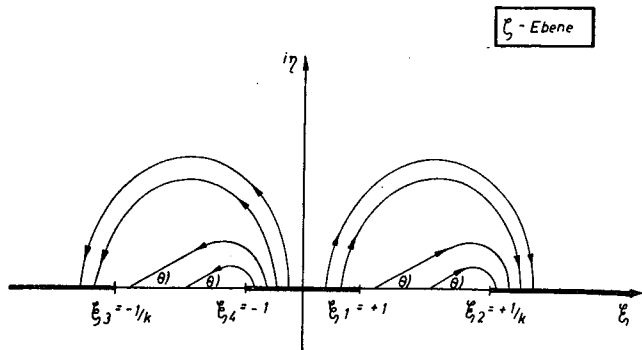


Abb. 6. Schematische Darstellung der Feldlinien in der oberen ζ -Halbebene.

Die Potentialfunktion $v(\xi, \eta)$, die diese Randbedingung erfüllt, findet man nach einem Vorschlag von WICK⁵ durch die konforme Abbildung eines unter dem Winkel Θ gegen die imaginäre Achse geneigten Parallelogramms A, B, C, D in einer $w = (u + iv)$ -Ebene (Abb. 7) auf die obere ζ -Halbebene. Das Koordinatennetz $v = \text{const}$ und $u = \text{const}$ in der w -Ebene erfüllt dann die Randbedingungen (senkrecht

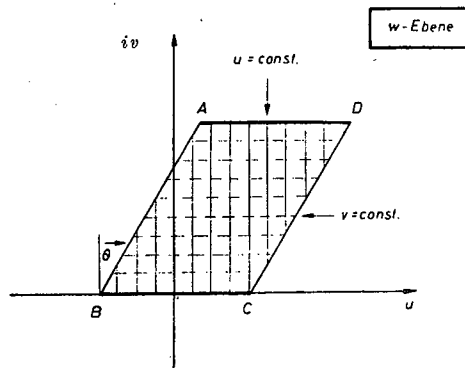


Abb. 7. Feld- und Äquipotentiallinien in der w -Ebene.

ter Einfall der Feldlinien auf den Elektroden und Einfall unter dem Winkel Θ auf den Längsseiten). Wählt man daher die Abbildung so, daß die Ecken A, B, C, D in die Punkte $\xi_1 = +1$, $\xi_2 = +1/k$, $\xi_3 = -1/k$ und $\xi_4 = -1$ der reellen ξ -Achse übergehen, dann ist der Imaginäranteil der Abbildungsfunktion $w(\zeta) = u(\xi, \eta) + i v(\xi, \eta)$ gleich der gesuchten Potentialfunktion $v(\xi, \eta)$ in der ζ -Ebene. Auf Grund des SCHWARZ-CHRISTOFFELSchen Satzes lautet die Abbildungsfunktion $w(\zeta)$ explizit:

$$w(\zeta) = C' \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{d\zeta}{\{(\zeta-1)(\zeta+1/k)\}^{1/2-\Theta/\pi} \{(\zeta+1)(\zeta-1/k)\}^{1/2+\Theta/\pi}} \quad (17)$$

⁵ R. F. WICK, J. Appl. Phys. 25, 741 [1954].

ξ_0 und C' sind Konstante, die von der Wahl der Eckpunkte A, B, C, D abhängen; für die Berechnung des Widerstandes $R(B)$ sind diese Konstanten jedoch ohne Bedeutung.

2.5. Berechnung des Widerstandes $R(B)$

Für den Differentialquotienten der Abbildungsfunktion (17)

$$\frac{dw}{d\zeta} = \frac{\partial w}{\partial \xi} + i \frac{\partial w}{\partial \eta}$$

läßt sich auf Grund der RIEMANNschen Differentialgleichungen unter Berücksichtigung von $\mathfrak{E}_\xi = -\partial v/\partial \xi$ und $\mathfrak{E}_\eta = -\partial v/\partial \eta$ schreiben:

$$\frac{dw}{d\zeta} = -i(\mathfrak{E}_\xi - i \mathfrak{E}_\eta).$$

Der Absolutbetrag des Differentialquotienten ist somit gleich dem Absolutbetrag der elektrischen Feldstärke in der ζ -Ebene:

$$\left| \frac{dw}{d\zeta} \right| = |\mathfrak{E}|. \quad (18)$$

Der Widerstand $R(B)$ ist der Quotient aus der Spannung U zwischen den Elektroden und dem die Platte durchfließenden Strom J . Die Spannung U läßt sich als Integral der Tangentialkomponente von \mathfrak{E} über den rechten a -Rand, d. h. über die ξ -Komponente von \mathfrak{E} in der ζ -Ebene entlang der Strecke $1 \leq \xi \leq 1/k$ der ξ -Achse darstellen, also

$$U = \int_1^{1/k} |\mathfrak{E}| \cos \Theta \, d\xi. \quad (19)$$

Aus (17) und (18) folgt daher für U

$$U = \cos \Theta \cdot C' \int_1^{1/k} \frac{d\xi}{|(\xi-1)(\xi+1/k)|^{1/2-\Theta/\pi} |(\xi+1)(\xi-1/k)|^{1/2+\Theta/\pi}}. \quad (19 a)$$

Der Strom J ist das mit der Plattendicke d multiplizierte Integral über die Normalkomponente der Stromdichte \mathfrak{j} entlang der unteren Elektrode ($-1 \leq \xi \leq +1$)

$$J = d \int_{-1}^{+1} \mathfrak{j}_n \, d\xi = d \cos \Theta \int_{-1}^{+1} |\mathfrak{j}| \, d\xi. \quad (20)$$

Man kann $|\mathfrak{j}|$ auf $|\mathfrak{E}|$ zurückführen, indem man Gl. (1) skalar mit \mathfrak{j} multipliziert. Da das Skalarprodukt $([\mathfrak{j}, \mathfrak{B}], \mathfrak{j})$ verschwindet, erhält man

$$(\mathfrak{j}, \mathfrak{j}) = \sigma(\mathfrak{E}, \mathfrak{j})$$

$$\text{oder mit (4)} \quad |\mathfrak{j}| = \sigma \cos \Theta |\mathfrak{E}|. \quad (21)$$

Aus (20) und (21) folgt unter Berücksichtigung von (18) und der Abbildungsfunktion (17) für den Strom J

$$J = d \sigma \cos^2 \Theta \cdot C' \int_{-1}^{+1} \frac{d\xi}{|(\xi-1)(\xi+1/k)|^{1/2-\Theta/\pi} |(\xi+1)(\xi-1/k)|^{1/2+\Theta/\pi}}. \quad (20 a)$$

Für den Widerstand $R(B)$ der rechteckförmigen Halbleiterplatte erhält man somit

$$R(B) = \frac{1}{d \sigma(B) \cos \Theta} \frac{Z}{N}, \quad (22)$$

$$Z = \int_1^{1/k} \frac{d\xi}{|(\xi-1)(\xi+1/k)|^{1/2-\Theta/\pi} |(\xi+1)(\xi-1/k)|^{1/2+\Theta/\pi}}, \quad (23)$$

$$N = \int_{-1}^{+1} \frac{d\xi}{|(\xi-1)(\xi+1/k)|^{1/2-\Theta/\pi} |(\xi+1)(\xi-1/k)|^{1/2+\Theta/\pi}}. \quad (24)$$

Die Konstante C' fällt, wie in 2.4. erwähnt, bei der Bestimmung des Widerstandes heraus.

3. Herleitung analytischer Ausdrücke für $R(B)$ durch Entwicklungen

Da eine geschlossene Auswertung der Integrale (23) und (24) nicht möglich ist, beschränken wir uns im folgenden auf Entwicklungen dieser Integrale, die für kleine Θ und für $\Theta \rightarrow \pi/2$ zu analytischen Ausdrücken für $R(B)$ führen.

3.1. Entwicklung von $R(B)$ für kleine Θ

3.1.1. Die Integrale Z und N . Das Zählerintegral Z (23) kann unter Berücksichtigung der durch die Betragstriche im Integranden festgelegten Vorzeichen geschrieben werden

$$Z = \int_1^{1/k} \frac{d\xi}{\{(\xi-1)(1/k+\xi)\}^{1/2-\Theta/\pi} \{(\xi+1)(1/k-\xi)\}^{1/2+\Theta/\pi}}. \quad (25)$$

Für kleine Θ läßt sich das Integral in eine TAYLOR-Reihe nach Θ/π entwickeln. Erweitert man den Integranden gleichzeitig mit dem Modul k , dann folgt für die Entwicklung bis zum quadratischen Glied in Θ/π :

$$Z = k \left\{ \int_1^{1/k} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi^2-1)(1-k^2\xi^2)}} + \frac{\Theta}{\pi} L(k) + \frac{1}{2} \left(\frac{\Theta}{\pi} \right)^2 M(k) \right\} \quad (25 a)$$

mit

$$L(k) = \int_1^{1/k} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi^2-1)(1-k^2\xi^2)}} \ln \frac{(\xi-1)(1+k\xi)}{(\xi+1)(1-k\xi)},$$

$$M(k) = \int_1^{1/k} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi^2-1)(1-k^2\xi^2)}} \left(\ln \frac{(\xi-1)(1+k\xi)}{(\xi+1)(1-k\xi)} \right)^2.$$

Das erste Glied der Entwicklung erweist sich nach Durchführung der Transformation $k'^2 \xi'^2 = 1 - k^2 \xi^2$ als vollständiges elliptisches Integral des komplementären Moduls $K(k')$.

Der Koeffizient $L(k)$ des zweiten Gliedes der Entwicklung verschwindet. Führt man nämlich in $L(k)$ die Substitution

$$\lambda = \frac{(\xi+1)(1-k\xi)}{(\xi-1)(1+k\xi)} \quad (26)$$

durch, so wird

$$L(k) = - \int_0^\infty \frac{\ln \lambda}{\sqrt{\lambda}} \frac{d\lambda}{\sqrt{(1-k)^2(1-\lambda)^2 + 4k(1+\lambda)^2}}$$

$$= - \int_0^\infty F(\lambda) d\lambda.$$

Aus der Zerlegung des Integrationsintervalles

$$L(k) = - \int_0^1 F(\lambda) d\lambda - \int_1^\infty F(\lambda) d\lambda$$

folgt mit der Substitution $\lambda = 1/\lambda'$

$$\int_1^\infty F(\lambda) d\lambda = - \int_0^1 F(\lambda') d\lambda'$$

und somit $L(k) \equiv 0$.

Mit der Substitution (26) geht das dritte Integral $M(k)$ in analoger Weise über in

$$M(k) = 2 \int_0^1 \frac{(\ln \lambda)^2}{\sqrt{\lambda}} \frac{d\lambda}{\sqrt{(1-k)^2(1-\lambda)^2 + 4k(1+\lambda)^2}}.$$

Die weitere Substitution $\lambda = e^{-2\nu}$ ergibt dann die Form

$$M(k) = 8 \int_0^\infty \frac{\nu^2 d\nu}{\sqrt{4k + (1+k)^2 \operatorname{Cof}^2 \nu}}. \quad (27)$$

Das Integral (27) für $M(k)$ führt für große a/b ($a/b \rightarrow \infty, k \rightarrow 0$) und kleine a/b ($a/b \rightarrow 0, k \rightarrow 1$) auf einfache Ausdrücke. Beschränkt man sich nämlich bei dem quadratischen Glied in Θ/π für das Integral Z im Hinblick auf seine k -Abhängigkeit auf die erste Näherung, so kann $M(k) = M(0)$ für große

a/b und $M(k) = M(1)$ für kleine a/b gesetzt werden. (27) liefert für $k=0$

$$M(0) = 8 \int_0^\infty \frac{\nu^2}{\operatorname{Cof} \nu} d\nu = 28 S_3$$

mit $S_3 = \frac{8}{7} \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)^3} = 1,2021$

und für $k=1$

$$M(1) = 4 \int_0^\infty \frac{\nu^2}{\operatorname{Cof} \nu} d\nu = 16 \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{2}.$$

Zusammenfassend gilt also für das Zählerintegral Z für große a/b

$$Z = k \left\{ K(k') + 14 S_3 \left(\frac{\Theta}{\pi} \right)^2 \right\} = k K(k') \left\{ 1 + \Theta^2 \frac{14 S_3}{\pi^2 K(k')} \right\} \quad (28 a)$$

und für kleine a/b

$$Z = k \left\{ K(k') + \frac{\pi^3}{4} \left(\frac{\Theta}{\pi} \right)^2 \right\} = k K(k') \left\{ 1 + \Theta^2 \frac{\pi}{4 K(k')} \right\}. \quad (28 b)$$

Das Nennerintegral N nach (24) läßt sich unter Berücksichtigung der durch die Betragstriche im Integranden festgelegten Vorzeichen schreiben:

$$N = \int_{-1}^{+1} \frac{d\xi}{\{(1-\xi)(1/k+\xi)\}^{1/2-\Theta/\pi} \{(1+\xi)(1/k-\xi)\}^{1/2+\Theta/\pi}}. \quad (29)$$

Für kleine Θ/π erhält man in Analogie zu Gl. (25 a)

$$N = 2k \left\{ K(k) + \frac{1}{2} \left(\frac{\Theta}{\pi} \right)^2 I(k) \right\} \quad (29 a)$$

mit

$$I(k) = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} \left(\ln \frac{(1-\xi)(1+k\xi)}{(1+\xi)(1-k\xi)} \right)^2.$$

Das lineare Glied in Θ/π verschwindet identisch, da der Integrand eine ungerade Funktion ist.

Mit Hilfe der Substitution (26) geht der Integralausdruck für $I(k)$ über in

$$I(k) = \int_0^1 \frac{(\ln \lambda)^2}{\sqrt{\lambda}} \frac{d\lambda}{\sqrt{(1-k)^2(1+\lambda)^2 + 4k(1-\lambda)^2}}$$

und mit $\lambda = e^{-2\nu}$ in

$$I(k) = 4 \int_0^\infty \frac{\nu^2 d\nu}{\sqrt{(1-k)^2 + (1+k)^2 \operatorname{Cof}^2 \nu}}. \quad (30)$$

⁶ F. TÖLKE, Praktische Funktionenlehre, Springer-Verlag, Berlin 1950, S. 364.

In Analogie zu Gl. (27) können für den Integralausdruck (30) für große a/b und kleine a/b wieder einfache Näherungsausdrücke angegeben werden; und zwar erhält man für große a/b

$$I(0) = 4 \int_0^{\infty} \frac{\nu^2}{\mathfrak{E} \sin \nu} d\nu = \frac{\pi^3}{2}$$

und für kleine a/b

$$I(1) = 2 \int_0^{\infty} \frac{\nu^2}{\mathfrak{E} \sin \nu} d\nu = 7 S_3.$$

Das Nennerintegral (29 a) lautet damit für große a/b

$$N = 2k K(k) \left\{ 1 + \Theta^2 \frac{\pi}{4K(k)} \right\} \quad (31 a)$$

und für kleine a/b

$$N = 2k K(k) \left\{ 1 + \Theta^2 \frac{7S_3}{2\pi^2 K(k)} \right\}. \quad (31 b)$$

3.1.2. Analytische Ausdrücke für $R(B)$ und deren Gültigkeit. Unter Verwendung der Entwicklungen für das Zählerintegral (28 a, b) und das Nennerintegral (31 a, b) ergeben sich für den Widerstand $R(B)$ einer rechteckigen Halbleiterplatte gemäß Gl. (22) für kleine HALL-Winkel Θ die Ausdrücke (32 a) und (32 b)

$$R(B) = \frac{1}{d\sigma(B)(1-\frac{1}{2}\Theta^2)} \frac{K(k') \left\{ 1 + \Theta^2 \frac{14S_3}{\pi^2 K(k')} \right\}}{2K(k) \left\{ 1 + \Theta^2 \frac{\pi}{4K(k)} \right\}} \quad \text{für große } a/b, \quad (32 a)$$

$$R(B) = \frac{1}{d\sigma(B)(1-\frac{1}{2}\Theta^2)} \frac{K(k') \left\{ 1 + \Theta^2 \frac{\pi}{4K(k')} \right\}}{2K(k) \left\{ 1 + \Theta^2 \frac{7S_3}{2\pi^2 K(k)} \right\}} \quad \text{für kleine } a/b. \quad (32 b)$$

Mit Hilfe der Gln. (15) und (15 b) sowie der Näherungsausdrücke des vollständigen elliptischen Integrals $K(k)$ für $k \rightarrow 0$ und $k \rightarrow 1$ folgt aus (32 a)

$$R(B) = \frac{a}{d\sigma(B)b} \left\{ 1 + \Theta^2 \frac{14S_3}{\pi^2} \frac{b}{a} \right\}. \quad (33)$$

Dieser Entwicklungsausdruck gilt mit einem Fehler bis zu ca. 1% für den Wertebereich $1,0 \leq a/b \leq \infty$ und $0 \leq \Theta \leq 0,45$. Entsprechend erhält man für (32 b) mit den Gln. (15) und (15 a)

$$R(B) = \frac{a}{d\sigma(B)b} \left\{ 1 + \Theta^2 \left(1 - \frac{14S_3}{\pi^2} \frac{a}{b} \right) \right\} \quad (34)$$

mit dem Gültigkeitsbereich $0 \leq a/b \leq 0,35$ und $0 \leq \Theta \leq 0,45$.

3.2. Entwicklung von $R(B)$ für $\Theta \rightarrow \pi/2$

3.2.1. Die Integrale Z und N für $\Theta \rightarrow \pi/2$. Wir beginnen mit der Entwicklung des Nennerintegrals (24). Als Entwicklungsgröße wird $\varepsilon = \frac{1}{2} - \Theta/\pi$ gewählt. Unter Berücksichtigung der durch die Betragstriche im Integranden festgelegten Vorzeichen folgt aus (24)

$$N = \int_{-1}^{+1} \frac{d\xi}{\{(1+\xi)(1/k-\xi)\}^{1-\varepsilon} \{(1-\xi)(1/k+\xi)\}^{\varepsilon}}. \quad (35)$$

Der Integrand hat im Integrationsbereich Singularitäten bei $\xi = +1$ und $\xi = -1$. Die Singularität bei $\xi = +1$ ist integrierbar, während das Integral über die Singularität bei $\xi = -1$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ divergiert. Da eine Entwicklung des Integrals für $\varepsilon \rightarrow 0$ angestrebt wird, das Verhalten des Integrals für $\varepsilon \rightarrow 0$ aber entscheidend durch die Singularität bei $\xi = -1$ beherrscht wird, spalten wir einen Term $N_0(\varepsilon)$ ab, der diese Singularität in geschlossen integrierbarer Form enthält.

$$N = N_0(\varepsilon) + N_1(\varepsilon), \quad (35 a)$$

mit
$$N_0(\varepsilon) = c \int_{-1}^{+1} \frac{d\xi}{(1+\xi)^{1-\varepsilon}}$$

und

$$N_1(\varepsilon) = \int_{-1}^{+1} \left[\frac{1}{\{(1+\xi)(1/k-\xi)\}^{1-\varepsilon} \{(1-\xi)(1/k+\xi)\}^{\varepsilon}} - \frac{c}{(1+\xi)^{1-\varepsilon}} \right] d\xi.$$

Die Konstante c wird so bestimmt, daß für $\xi = -1$ der Zähler des Integranden von $N_1(\varepsilon)$ verschwindet, und damit der Integrand von N_1 bei $\xi = -1$ regulär wird. Diese Bedingung liefert

$$c = \frac{k}{2\varepsilon(1+k)} \left\{ \frac{1+k}{1-k} \right\}^{\varepsilon}$$

und daher für

$$N_0(\varepsilon) = c \int_{-1}^{+1} \frac{d\xi}{(1+\xi)^{1-\varepsilon}} = \frac{k}{1+k} \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \frac{1+k}{1-k} \right\}^{\varepsilon}$$

oder für kleine ε entwickelt

$$N_0(\varepsilon) = \frac{k}{1+k} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} + \ln \frac{1+k}{1-k} \right\}.$$

$N_1(\varepsilon)$ kann kein Entwicklungsglied mit $1/\varepsilon$ mehr enthalten. Das nächsthöhere Glied in der Entwicklung nach Potenzen von ε ist das von ε freie Glied.

Das Integral $N_1(\varepsilon)$ liefert zu diesem Glied den Beitrag

$$N_1(\varepsilon=0) = \int_{-1}^{+1} \left\{ \frac{1}{(1+\xi)(1/k-\xi)} - \frac{k}{1+k} \frac{1}{1+\xi} \right\} d\xi.$$

Durch Partialbruchzerlegung des ersten Terms in diesem Integral erhält man

$$N_1(\varepsilon=0) = \frac{k}{1+k} \ln \frac{1+k}{1-k}.$$

Die Summe aus der Entwicklung für $N_0(\varepsilon)$ und dem Ausdruck $N_1(\varepsilon=0)$ liefert nach (35 a) die Entwicklung des Nennerintegrals N bis zum 2. Glied, also

$$N = \frac{k}{1+k} \frac{1}{\varepsilon} \left\{ 1 + 2\varepsilon \ln \frac{1+k}{1-k} \right\}. \quad (36)$$

Der Integrationsbereich des Zählerintegrals Z (23) wird durch die Substitution

$$\xi' = -\frac{2k}{1-k} \xi + \frac{1+k}{1-k}$$

in den Bereich von -1 bis $+1$ übergeführt. Unter Berücksichtigung der durch die Betragstriche im Integranden festgelegten Vorzeichen erhält man für Z

$$Z = \frac{2k}{1-k} \int_{-1}^{+1} \frac{d\xi'}{\{(1-\xi')(A-\xi')\}^\varepsilon \{(1+\xi')(B-\xi')\}^{1-\varepsilon}} \quad (37)$$

mit $A = \frac{3+k}{1-k}$ und $B = \frac{1+3k}{1-k}$.

Durch Abspalten der für das Integral wesentlichen Singularität bei $\xi = +1$ folgt in Analogie zur Auswertung des Nennerintegrals für das Zählerintegral die Entwicklung

$$Z = \frac{k}{1+k} \frac{1}{\varepsilon} \left\{ 1 + 2\varepsilon \ln \frac{1+k}{2\sqrt{k}} \right\}. \quad (38)$$

3.2.2. Analytischer Ausdruck für $R(B)$ und seine Gültigkeit. Durch Einsetzen der Entwicklungen (38) und (36) in Gl. (22) folgt für den Plattenwiderstand bei gleichzeitiger Entwicklung von $\cos \Theta = \pi \varepsilon \pm \dots$

$$R(B) = \frac{1}{d \sigma(B) \pi \varepsilon} \frac{1 + 2\varepsilon \ln \frac{1+k}{2\sqrt{k}}}{1 + 2\varepsilon \ln \frac{1+k}{1-k}}. \quad (39)$$

Im Ausdruck (39) für $R(B)$ sind Zähler und Nennerentwicklungen in ε bis zum linearen Glied. Um den Wertebereich der Variablen a/b und Θ angeben zu können, für den Gl. (39) mit einem Fehler kleiner ca. 1% gilt, muß die Gültigkeit der Entwicklun-

⁷ Daß diese Abschätzung des Gültigkeitsbereiches erlaubt ist, zeigt der Vergleich der durch die Entwicklung gewon-

gen für Zähler und Nenner getrennt bestimmt werden. Wenn das lineare Glied $2\varepsilon \ln \frac{1+k}{2\sqrt{k}} < 0,1$ bleibt,

wird das quadratische Glied in ε von der Größenordnung 0,01 sein⁷. Diese Bedingung wird oberhalb der im Θ - a/b -Diagramm (Abb. 8) eingezeichneten Kurve 1 erfüllt. In gleicher Weise gilt für die Gültigkeit des Nenners $2\varepsilon \ln \frac{1+k}{1-k} < 0,1$ (Gültigkeitsbereich oberhalb der Kurve 2 in Abb. 8). Für die Entwicklung von $\cos \Theta$ gilt schließlich $\pi \varepsilon < 0,24$ (Bereich oberhalb der in Abb. 8 zur Abszisse parallelen Geraden 3). Für die Gültigkeit des Aus-

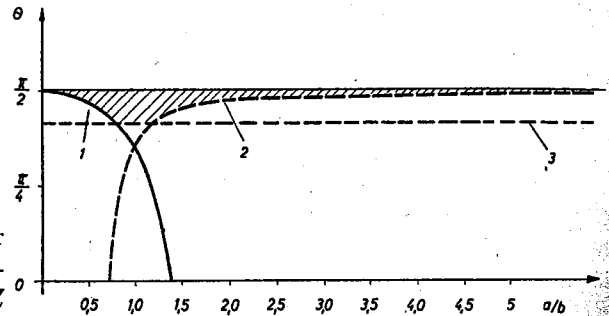


Abb. 8. Gültigkeitsbereich der Entwicklung für große Felder ($\Theta \rightarrow \pi/2$).

drucks (39) müssen alle drei Bedingungen gleichzeitig erfüllt sein. Als Gültigkeitsbereich für Ausdruck (39) resultiert daher das in Abb. 8 schraffierte Gebiet.

Für den Widerstand einer rechteckförmigen Platte erhält man somit in dem vorangehend abgegrenzten Wertebereich mit $1/\pi \varepsilon = \operatorname{tg} \Theta$

$$R(B) = \frac{1}{d \sigma(B)} \left\{ \operatorname{tg} \Theta + \frac{2}{\pi} \ln \frac{1-k}{2\sqrt{k}} \right\}. \quad (40)$$

4. Der Widerstand $R(B)$ einer quadratischen Halbleiterplatte

Wendet man auf die Integrale (23) und (24) im Ausdruck (22) für den Widerstand $R(B)$ unmittelbar die Substitution (26) an und anschließend auf das Zählerintegral Z nochmals die Substitution $\lambda = e^{-2\nu}$, auf das Nennerintegral N dagegen die Substitution $\lambda = e^{+2\nu}$, so wird

$$Z = \frac{2k}{1+k} \int_0^\infty \frac{\operatorname{Coj} \left(2 \frac{\Theta}{\pi} \nu \right)}{\sqrt{\frac{4k}{(1+k)^2} + \operatorname{Si}^2 \nu}} d\nu \quad (41)$$

nenen Ergebnisse mit exakter numerischer Auswertung von (22) mit (23) und (24); vgl. auch Abschn. 5.

und
$$N = \frac{2k}{1+k} \int_0^\infty \frac{\cos\left(2\frac{\Theta}{\pi}\nu\right)}{\sqrt{\frac{(1-k)^2}{(1+k)^2} + \sin^2\nu}} d\nu. \quad (42)$$

Einsetzen von (41) und (42) in (22) liefert somit für den Widerstand

$$R(B) = \frac{1}{d\sigma(B)\cos\Theta} \frac{\int_0^\infty \frac{\cos\left(2\frac{\Theta}{\pi}\nu\right)}{\sqrt{\frac{4k}{(1+k)^2} + \sin^2\nu}} d\nu}{\int_0^\infty \frac{\cos\left(2\frac{\Theta}{\pi}\nu\right)}{\sqrt{\frac{(1-k)^2}{(1+k)^2} + \sin^2\nu}} d\nu}. \quad (43)$$

Die Schreibweise (43) für den Widerstand $R(B)$ läßt unmittelbar erkennen, daß $R(B)$ unabhängig vom Vorzeichen des Magnetfeldes B ist; bei Umkehr des Magnetfeldes geht Θ über in $-\Theta$; Θ tritt in (43) aber nur unter dem trigonometrischen und hyperbolischen Cosinus auf.

Zähler- und Nennerintegral in (43) sind von gleichem Bau. Sie unterscheiden sich lediglich durch die konstanten Terme

$$4k/(1+k)^2 \quad \text{und} \quad (1-k)^2/(1+k)^2.$$

Die Integrale werden identisch für

$$4k = (1-k)^2. \quad (44)$$

Gl. (44) wird für $k = 3 - \sqrt{8}$ erfüllt. Für eine Widerstandsprobe mit einem a/b -Verhältnis, das nach Gl. (15) diesem k -Wert entspricht, gilt dann als exakte Lösung des Randwertproblems

$$R(B) = \frac{1}{d\sigma(B)\cos\Theta} = \frac{1}{d\sigma(B)} \sqrt{1 + \tan^2\Theta}. \quad (45)$$

Da Gl. (45) für alle Θ gilt, also auch für $\Theta = 0$, sieht man an dem Widerstand für $B = 0$

$$R(0) = \frac{1}{d\sigma(0)},$$

daß (45) der geschlossene Ausdruck für den Widerstand einer Platte mit dem Seitenverhältnis $a/b = 1$, also einer quadratischen Probe ist.

5. Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse

Die Lösung des Randwertproblems einer rechteckförmigen, stromdurchflossenen Platte im transversalen Magnetfeld führt auf einen Integralausdruck für den Probenwiderstand $R(B)$. Die Entwicklung die-

ses Integralausdruckes liefert einfache analytische Beziehungen, die das Verhalten des Plattenwiderstandes $R(B)$ für große und kleine Magnetfelder beschreiben. In Abb. 9 sind in einem Θ - a/b -Diagramm die Gültigkeitsbereiche für die in Abschnitt 4 hergeleiteten Entwicklungen schraffiert eingezeichnet. Der Wertevorrat zerfällt danach in drei nicht zusammenhängende Bereiche I, II und III. I ist der Gültigkeitsbereich für Gl. (34), II der Gültigkeitsbereich für (33) und schließlich III der Gültigkeitsbereich für Gl. (40). Der Gültigkeitsbereich der angeführten Entwicklungen ist dadurch definiert, daß für den Wertevorrat der einzelnen Bereiche der Fehler kleiner ca. 1% bleibt. Ferner wurde in Abschn. 4 für das spezielle Seitenverhältnis $a/b = 1$ die exakte Lösung (45) für den Plattenwiderstand $R(B)$ angegeben. Der Wertevorrat, für den die Beziehung (45) gilt, erscheint in Abb. 9 als eine zur Ordinate parallele Gerade durch $a/b = 1$. Der durch diese schraffierten Bereiche nicht überdeckte Wertevorrat im Θ - a/b -Diagramm (Abb. 9) wurde durch numerische Auswertung der Integrale (23) und (24) erschlossen.

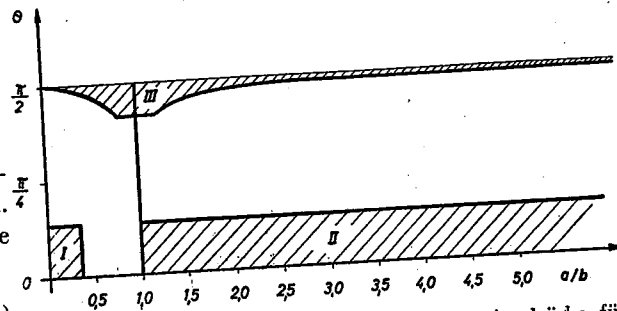


Abb. 9. Gültigkeitsbereiche der analytischen Ausdrücke für $R(B)$.

Für die zusammenfassende Darstellung der Ergebnisse schreiben wir die in Abschnitt 3 und 4 abgeleiteten Beziehungen für den Plattenwiderstand $R(B)$ auf den relativen Widerstand $r(B) = R(B)/R(0)$ um. Für $r(B)$ folgt aus (33) und (34) für kleine HALL-Winkel Θ (Wertebereich I und II in Abb. 9)

$$r(B) = \frac{\sigma(0)}{\sigma(B)} \{1 + \Theta^2 g(a/b)\} \quad (46)$$

mit
$$g(a/b) = 1 - \frac{14 S_3}{\pi^3} \frac{a}{b} \quad \text{für kleine } a/b$$

und
$$g(a/b) = \frac{14 S_3}{\pi^3} \frac{b}{a} \quad \text{für große } a/b.$$

Der relative Widerstand $r(B)$ einer rechteckförmigen Platte läßt sich somit nach (46) darstellen als Pro-

dukt aus dem Widerstand einer unendlich langen Probe $r_\infty(B) = \sigma(0)/\sigma(B)$ (physikalischer Widerstandseffekt) und einem zweiten Faktor, der den Geometrieinfluss beschreibt. Während der physikalische Widerstandseffekt ausschließlich vom Probenmaterial abhängt, geht die Materialeigenschaft in den geometrischen Widerstandseffekt wegen

$$\operatorname{tg} \Theta = \sigma(B) R_h B = \frac{3\pi}{8} \mu(B) B$$

nur implizit in den HALL-Winkel Θ ein. Für kleine HALL-Winkel Θ besteht für den geometrischen Widerstandseffekt quadratische Abhängigkeit in Θ , also quadratische Abhängigkeit vom Magnetfeld B . Das gleiche gilt nach der FRÖHLICHschen Formel⁸ für die physikalische Widerstandsänderung, so daß bei rechteckförmigen Halbleiterplatten für kleine Magnetfelder die Widerstandsänderung in jedem Falle quadratisch in B ist.

In Abb. 10 ist der Entwicklungskoeffizient $g(a/b)$ des quadratischen Gliedes in Θ als Funktion von a/b dargestellt. Die ausgezogenen Kurven zeigen den

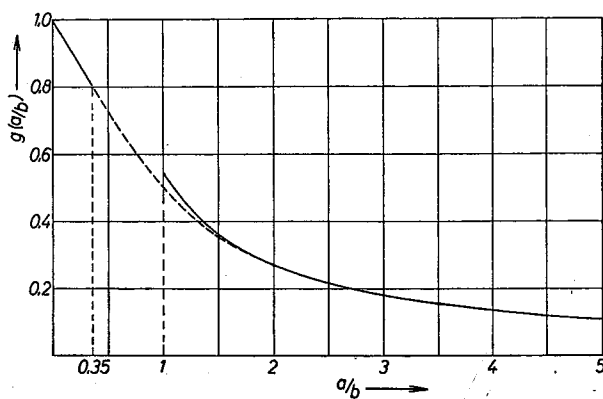


Abb. 10. Der Entwicklungskoeffizient $g(a/b)$ als Funktion des Seitenverhältnisses.

Verlauf des Koeffizienten für große und kleine a/b , wie er durch die Entwicklungsausdrücke (46) beschrieben wird. Die beiden Kurvenäste gehen infolge der beschränkten Gültigkeit der durchgeführten Entwicklungen nicht stetig ineinander über. Die gestrichelt eingezeichnete Übergangskurve zwischen beiden Ästen wurde durch numerische Auswertung

gewonnen. Für $a/b \rightarrow \infty$, d. h. für unendlich lang gestreckte Proben, verschwindet $g(a/b)$ wie b/a , und der relative Widerstand $r(B)$ geht in den rein physikalischen Widerstandseffekt $\sigma(0)/\sigma(B)$ über. Für $a/b \rightarrow 0$ nimmt $g(a/b)$ seinen größten Wert an, nämlich $g(a/b) = 1$, und (46) wird identisch mit dem Ausdruck, den man für den Widerstand einer CORBINO-Scheibe^{2, 9} bei kleinen Θ erhält.

Man kann allgemein zeigen¹⁰, daß bei beliebig vorgegebenem Θ der relative Widerstand einer rechteckigen Platte mit $a/b \rightarrow 0$ in den Widerstand einer CORBINO-Scheibe beim gleichen HALL-Winkel Θ übergeht.

Das Verhalten des relativen Widerstandes $r(B)$ für große Magnetfelder (d. h. $\Theta \rightarrow \pi/2$) bei vorgegebenem Seitenverhältnis $a/b \neq 0$ wird dagegen nach (40) durch

$$r(B) = \frac{\sigma(0)}{\sigma(B)} \frac{b}{a} \left\{ \operatorname{tg} \Theta + \frac{2}{\pi} \ln \frac{1-k}{2\sqrt{k}} \right\} \quad (47)$$

beschrieben. Die Gültigkeit dieser Beziehung ist im Bereich III (Abb. 9) gewährleistet, wobei k durch die transzendente Gleichung (15) (siehe Abb. 5) bestimmt ist. Der relative Widerstand für große Magnetfelder ist wiederum gleich dem Produkt aus dem relativen Widerstand des unendlich langen Streifens und einem Faktor, der den Geometrieinfluss beinhaltet. Nach (47) verhält sich der Geometriefaktor einer rechteckigen Platte mit fest vorgegebenem Seitenverhältnis $a/b \neq 0$ für große Magnetfelder ($\Theta \rightarrow \pi/2$) stets linear in $\operatorname{tg} \Theta$. Trägt man den Geometriefaktor $\sigma(B)/\sigma(0) \cdot r(B)$ über $\operatorname{tg} \Theta$ auf, so wird sein asymptotisches Verhalten für $\Theta \rightarrow \pi/2$ durch eine Gerade mit dem Anstieg b/a und dem Ordinatenabschnitt $\frac{2}{\pi} \frac{b}{a} \ln \frac{1-k}{2\sqrt{k}}$ beschrieben.

In Abb. 11 ist der Ordinatenabschnitt als Funktion des Seitenverhältnisses a/b aufgetragen. Für große a/b ist der Ordinatenabschnitt positiv, für kleine a/b dagegen negativ und wechselt bei $a/b = 1$ sein Vorzeichen. Das asymptotische Verhalten des Geometriefaktors einer quadratischen Probe wird daher über $\operatorname{tg} \Theta$ aufgetragen durch eine Nullpunktgerade unter 45° beschrieben. Für große a/b erhält man für den relativen Widerstand durch Einsetzen der Näherungs-

⁸ H. FRÖHLICH, Elektronentheorie der Metalle, Springer-Verlag, Berlin 1936, S. 232 ff.

⁹ O. M. CORBINO, Phys. Z. 12, 561 [1911].

¹⁰ Der Grenzübergang $a/b \rightarrow 0$ (d. h. $k \rightarrow 1$) läßt sich in einfacher Weise an (43) für den Widerstand $R(B)$ durchführen. Dieser Grenzübergang ist nur dann sinnvoll, wenn

man vorher (43) in den relativen Widerstand $r(B)$ umschreibt. — Der relative Widerstand einer unendlich breiten Platte ($a/b = 0$) läßt sich auch elementar berechnen. Dabei kommt man zum gleichen Ergebnis wie bei der CORBINO-Scheibe.

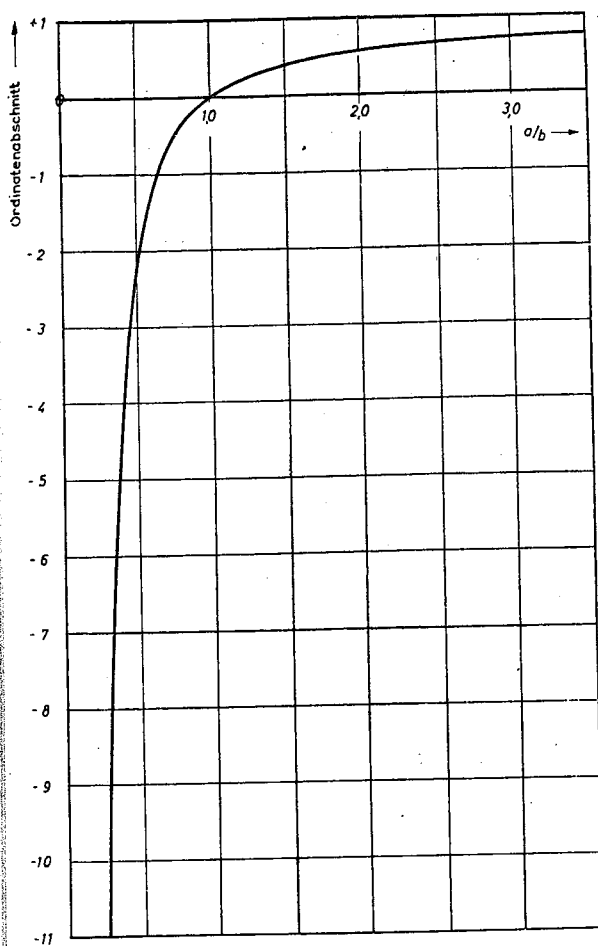


Abb. 11. Ordinatenabschnitt der asymptotischen Entwicklung ($\Theta \rightarrow \pi/2$) in Abhängigkeit vom Seitenverhältnis a/b .

$$\text{Ordinatenabschnitt } \frac{2}{\pi} \frac{b}{a} \ln \frac{1-k}{2\sqrt{k}}$$

formel (15 b) in (47)

$$r(B) = \frac{\sigma(0)}{\sigma(B)} \left\{ 1 + \frac{b}{a} \left(\text{tg } \Theta - \frac{4}{\pi} \ln 2 \right) \right\}. \quad (47 a)$$

Nach Gl. (47 a) geht der relative Widerstand einer rechteckförmigen Probe auch für große Felder ($\text{tg } \Theta \gg 1$) mit $a/b \rightarrow \infty$ wiederum in den relativen Widerstand des unendlich langen Streifens $\sigma(0)/\sigma(B)$ über.

Für die quadratische Probe ($a/b = 1$) kann der Integralausdruck (22) für den Widerstand $R(B)$ geschlossen ausgewertet werden und liefert als exakte Lösung Gl. (45), die auf den relativen Widerstand $r(B)$ umgeschrieben

$$r(B) = \frac{\sigma(0)}{\sigma(B)} \sqrt{1 + \text{tg}^2 \Theta} \quad (48)$$

lautet. Im Bereich kleiner HALL-Winkel Θ ($0 \leq \Theta \leq 0,45$) können Wurzel und Tangens entwickelt werden und man erhält

$$r(B) = \frac{\sigma(0)}{\sigma(B)} \left(1 + \frac{\Theta^2}{2} \right). \quad (48 a)$$

Im gleichen Θ -Bereich wurde als allgemeine Entwicklung Gl. (46) angegeben. Setzt man in (46), und zwar in die Form für große Seitenverhältnisse, $a/b = 1$, so beträgt die Abweichung zwischen (48 a) und (46) im Bereich $0 \leq \Theta \leq 0,45$ weniger als 1%. — Als asymptotische Entwicklung von (48) für $\text{tg } \Theta \gg 1$ ($\Theta \rightarrow \pi/2$) wird

$$r(B) = \frac{\sigma(0)}{\sigma(B)} \text{tg } \Theta = \sigma(0) R_h B. \quad (48 b)$$

Der relative Widerstand einer quadratischen Probe ist somit für $\Theta \rightarrow \pi/2$ proportional der magnetischen Induktion B , wobei der Proportionalitätsfaktor das Produkt aus Leitfähigkeit beim Magnetfeld Null und HALL-Konstante ist. Dieses Ergebnis ist bereits in der allgemeinen Entwicklung (47) enthalten; Gl. (47) geht nämlich für $a/b = 1$ und dem zugehörigen k -Wert $k = 3 - \sqrt{8}$ in (48 b) über.

Neben dem geschlossenen Ausdruck (48) für den relativen Widerstand der quadratischen Probe ist die Beziehung für den Widerstand einer CORBINO-Scheibe bereits bekannt⁸

$$r(B) = \frac{\sigma(0)}{\sigma(B)} (1 + \text{tg}^2 \Theta). \quad (49)$$

Zwischen dem Widerstand der CORBINO-Scheibe $r_{\circ}(B)$ und dem Widerstand der quadratischen Probe $r_{\square}(B)$ besteht wegen (48) und (49) der einfache Zusammenhang

$$r_{\square}(B) = \sqrt{r_{\infty}(B) r_{\circ}(B)} \quad (50)$$

mit $r_{\infty}(B) = \sigma(0)/\sigma(B)$ als Widerstand der unendlich lang gestreckten Platte. Der Widerstand einer quadratischen Platte im Magnetfeld ist danach das geometrische Mittel aus dem Widerstand des unendlich langen Streifens (kleinstmögliche Widerstandsänderung) und dem Widerstand einer CORBINO-Scheibe (größtmögliche Widerstandsänderung). Gl. (50) bietet ein Verfahren zur Bestimmung des physikalischen Widerstandseffektes $\sigma(0)/\sigma(B)$ und damit des Beweglichkeitsverhältnisses $\mu(0)/\mu(B)$ an. Man mißt den relativen Widerstand einer quadratischen Platte und einer aus dem gleichen Material hergestellten CORBINO-Scheibe als Funktion des Magnet-

feldes B . Aus (50) folgt dann für das Beweglichkeitsverhältnis

$$\frac{\mu(0)}{\mu(B)} = \frac{r_{\square}^2(B)}{r_{\circ}(B)} \quad (50 a)$$

In Abb. 12 sind die Ergebnisse der numerischen Auswertung¹¹ des Integralausdrucks (22) mit (23) und (24) für den Widerstand rechteckförmiger Proben in einer Kurvenschar zusammengestellt. Aufgetragen wurde der Geometriefaktor $\sigma(B)/\sigma(0) \cdot r(B)$ über $\operatorname{tg} \Theta$. Kurvenparameter ist das Seitenverhältnis a/b . Für kleine HALL-Winkel Θ verlaufen alle Kurven quadratisch in Θ , während für $\operatorname{tg} \Theta \gg 1$ das bereits diskutierte lineare Verhalten in $\operatorname{tg} \Theta$ erkennbar ist. Die in Abb. 12 zusammengefaßten numerischen Auswertungen bilden eine Abrundung der theoretischen Behandlung des Geometrieinflusses auf den transversalen Widerstandseffekt rechteckförmiger Halbleiterplatten. Sie erschließen quantitativ den durch die hergeleiteten analytischen Entwicklungsausdrücke nicht erfaßten Übergangsbereich zwischen kleinen und großen HALL-Winkeln Θ in Abb. 9.

Die gewonnenen theoretischen Ergebnisse stehen in quantitativer Übereinstimmung mit den Messungen des Widerstandseffektes an rechteckförmigen Proben aus Indiumantimonid nach WEISS und WELKER².

¹¹ Für die numerische Auswertung der Integrale (23) und (24) danken wir den Herren H. HÖFFMANN und G. ZEGLIN

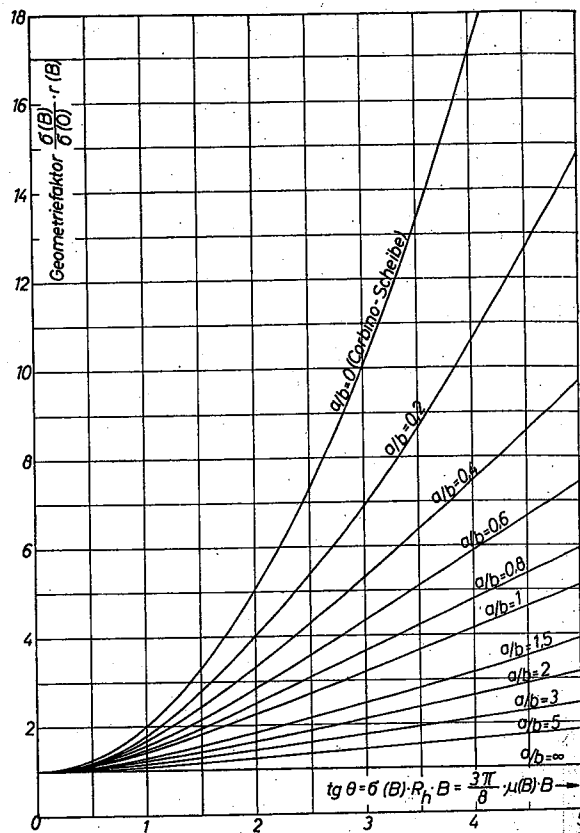


Abb. 12. Geometriefaktor $\sigma(B)/\sigma(0) \cdot r(B)$ rechteckiger Halbleiterplatten als Funktion von $\operatorname{tg} \Theta$ mit a/b als Parameter.

vom Mathematischen Institut der Siemens-Schuckertwerke AG, Erlangen.

Der Geometrieinfluss auf den Hall-Effekt bei rechteckigen Halbleiterplatten

VON HANS-JOACHIM LIPPMANN und FRIEDRICH KUHRT

Aus dem Laboratorium der Zentralwerksverwaltung der Siemens-Schuckertwerke AG, Nürnberg
(Z. Naturforsch. 13 a, 474—483 [1958]; eingegangen am 20. März 1958)

Die HALL-Spannung einer rechteckigen, stromdurchflossenen Halbleiterplatte im transversalen Magnetfeld wird durch Lösung des Potentialproblems berechnet. Der sich für die HALL-Spannung ergebende Ausdruck ist das Produkt aus der HALL-Spannung der unendlich langgestreckten Platte und einer Geometriefunktion, die vom Seitenverhältnis a/b des Rechtecks und dem HALL-Winkel Θ abhängt. Für kleine und große HALL-Winkel werden analytische Ausdrücke für die Geometriefunktion abgeleitet, während das Übergangsgebiet zwischen kleinen und großen Θ -Werten durch numerische Auswertung der in der Geometriefunktion auftretenden Integrale erschlossen wird.

Der bekannte Ausdruck für die HALL-Spannung eines Elektronenleiters im transversalen Magnetfeld B

$$U_{\text{hoo}} = \frac{R_h}{d} i_s B \quad (1)$$

gilt nur für unendlich langgestreckte Platten. Hierin ist R_h die HALL-Konstante des Elektronenleiters, d die Dicke der Platte und i_s der die Probe durchfließende Steuerstrom. Bei rechteckigen Halbleiter-