Часть II

Методы теории многих тел

Глава 8.

Теория ферми-жидкости

Теория ферми-жидкости изучает систему, состоящую из макроскопически большого числа взаимодействующих фермионов. Гамильтониан ферми-жидкости $\widehat{\mathcal{H}} = \widehat{\mathcal{H}}_0 + \widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}}$ есть сумма кинетической энергии фермионов и потенциальной энергии их взаимодействия. Выражения для $\widehat{\mathcal{H}}_0$ и $\widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}}$, записанные в импульсном представлении через операторы вторичного квантования $a^+_{\mathbf{p},\sigma}$ и $a_{\mathbf{p},\sigma}$, имеют такой вид:

$$\widehat{\mathcal{H}}_0 = \sum_{\mathbf{p},\sigma} \xi(\mathbf{p}) a^+_{\mathbf{p},\sigma} a_{\mathbf{p},\sigma}\,, \qquad \widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}} \rho_{\mathbf{k}} \rho_{-\mathbf{k}}\,, \tag{8.1}$$

где $\xi(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2m - \mu$ — спектр свободных частиц, $V_{\mathbf{k}}$ — фурье-образ потенциала взаимодействия $V(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, а $\rho_{\mathbf{k}} = \sum\limits_{\mathbf{p},\sigma} a^+_{\mathbf{p}+\mathbf{k},\sigma} a_{\mathbf{p},\sigma}$ — фурье-гармоники оператора плотности фермионов. Как правило предполагается, что ферми-жидкость однородна и имеет фиксированную плотность.

Главная задача теории ферми-жидкости — выяснить характер основного состояния и возбуждений системы, описываемой гамильтонианом (8.1). Вообще говоря, характер основного состояния весьма сильно зависит от свойств взаимодействия между фермионами. В некоторых случаях может возникать сверхпроводящее или ферромагнитное состояние, вигнеровский кристалл, волна зарядовой или спиновой плотности, и т. п. Однако большинство взаимодействующих ферми-систем устроено относительно просто — их свойства в основном подобны свойствам невзаимодействующего ферми-газа. В таких случаях принято говорить о *ферми-жидкостном* состоянии. Элементарные возбуждения ферми-жидкости — это электрон-дырочные пары в окрестности ферми-поверхности. Эффекты взаимодействия проявляются лишь в перенормировке нескольких констант, определяющих теплоемкость, сжимаемость и другие свойства. Кроме того, в ферми-жидкости имеются специфические ветви коллективных возбуждений — нуль-звук, плазмоны, спиновые волны.

Существует несколько подходов к проблеме ферми-жидкости, отличающихся степенью «квантовомеханичности». Во-первых, имеется квазиклассическая (или феноменологическая) теория ферми-жидкости (см. разделы 8.1 и 8.2). Существует также более микроскопическая теория, основанная на так называемом *приближении случайных фаз* (см. разд. 8.3). И, наконец, наиболее строгая микроскопическая теория строится с помощью функций Грина (см. разд. 8.7). Хотя результаты всех трех теорий, по существу, одинаковы, каждая из них имеет свои методические достоинства. Поэтому в задачах этой главы мы уделим равное внимание всем трем методам и постараемся продемонстрировать связи между ними.

Известно много разнообразных ферми-жидкостных систем. Классические примеры — нуклоны в атомном ядре, а также жидкий ^{3}He. Наиболее важные для нас применения теории ферми-жидкости относятся к электронам в металлах. Основное различие между этими видами ферми-жидкости заключается в характере взаимодействия. Взаимодействие между нуклонами, а также между атомами ^{3}He, — короткодействующее, в то время как электроны взаимодействуют по закону Кулона. В первом случае фурье-образ взаимодействия $V_\mathbf{k}$ в (8.1) весьма слабо зависит от $\mathbf{k}$, в то время как во втором случае зависимость от $\mathbf{k}$ имеет сингулярный характер: $V_\mathbf{k} = 4\pi e^2/\mathbf{k}^2$.

Для математически корректного описания кулоновского взаимодействия в металле обычно используется так называемая *модель желе*: электроны, движущиеся в потенциале равномерно размазанного статического положительного заряда, обеспечивающего электронейтральность. При этом пренебрегают динамикой ионов и всеми эффектами, связанными с фононами. Модель желе весьма неплохо описывает ферми-жидкостные свойства электронов в металлах.

8.1. Квазичастицы

Наиболее простое обоснование теории ферми-жидкости можно получить, следуя квазиклассической аргументации Ландау. Основная идея этого подхода та же, что и в теории многоэлектронного атома Томаса–Ферми. Напомним, что в многоэлектронном атоме распределение электронов по импульсам в каждой точке пространства описывается ферми-сферой, радиус которой $p_0(\mathbf{r})$ есть функция координат. Взаимодействие учитывается заменой потенциала ядра, в поле которого движутся электроны, на эффективный потенциал, включающий среднее электрическое поле, создаваемое электронами. В свою очередь, кулоновский потенциал поля электронов находится по электронной плотности $\rho(\mathbf{r}) = p_0^3(\mathbf{r})/(3\pi^2)$ и, таким образом, картина оказывается самосогласованной. Теория Томаса–Ферми позволяет найти распределение заряда в многоэлектронном атоме, энергию связи, и т. п.

Теория ферми-жидкости Ландау является своего рода обобщением теории Томаса–Ферми, описывающим динамику частиц в бесконечной однородной системе взаимодействующих фермионов. Предполагается, что равновесное распределение по импульсам есть ферми-сфера радиуса $p_0 = (3\pi^2 n)^{1/3}$, где n — плотность частиц. Теория утверждает, что динамику такой системы можно рассматривать при помощи *квазичастиц*, описывающих локальные отклонения распределения по импульсам от ферми-сферы. Слабо неравновесные состояния описываются распределением квазичастиц по импульсам и координатам, близким к фермиевскому в каждой точке пространства.

Квазичастицы являются элементарными возбуждениями в ферми-жидкости. Они образованы фермионами невзаимодействующего ферми-газа, «одетыми» взаимодействием с другими фермионами. Математическое описание «одевания» достигается введением в теорию эффективного поля, действующего на квазичастицы. Это поле определенным образом зависит от распределения всех остальных квазичастиц. В результате динамика и взаимодействие квазичастиц определяются самосогласованно.

Чтобы выяснить, какие эффекты взаимодействия в ферми-жидкости являются наиболее существенными, рассмотрим ферми-газ, в котором одна из частиц имеет небольшую энергию $\varepsilon > 0$ над уровнем Ферми. Благодаря межчастичному взаимодействию рассматриваемая частица может перейти в состояние с меньшей энергией $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, одновременно родив электрон-дырочную пару с энергией $\delta\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon'$. При $\varepsilon, \varepsilon' \ll E_F$ плотность состояний пар с энергией $\delta\varepsilon$ можно оценить как $\nu_0^2\delta\varepsilon$, и поэтому, согласно золотому правилу, вероятность распада на частицу с меньшей энергией и электрон-дырочную пару есть $\gamma(\varepsilon) = \lambda\varepsilon^2$, где $\lambda \approx (e^2/\hbar v_F)^2/E_F$. Из сказанного следует, что $\gamma(\varepsilon) \ll \varepsilon$, т. е. время жизни частицы очень велико. Таким же образом можно показать, что рассеяние частиц с малой энергией друг на друге происходит очень редко, поскольку при малой энергии фазовый объем конечных состояний рассеяния оказывается очень мал. Отметим, что эти выводы справедливы даже при силе взаимодействия порядка единицы. Требуется лишь, чтобы энергия частицы была близка к уровню Ферми.

Таким образом, наиболее существенным эффектом в динамике частиц ферми-жидкости оказывается *рассеяние вперед*[1]. При рассеянии частицы вперед остальная ферми-система образует своего рода однородную преломляющую среду, взаимодействие с которой дает поправку $\delta\varepsilon\, t$ к фазе волновой функции частицы $e^{-i(\varepsilon^{(0)}+\delta\varepsilon)t}$, где

$$\delta\varepsilon = \int f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')\delta n(\mathbf{p}', \mathbf{r})\frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \tag{8.2}$$

— так называемый функционал Ландау. Рассеяние вперед не приводит к рождению других частиц или дырок. Таким образом, возникает представление о «квазичастицах», каждая из которых движется в самосогласованном поле окружающих квазичастиц.

Энергия квазичастицы ε в самосогласованном поле зависит от распределения по импульсам всех остальных квазичастиц:

$$\varepsilon(\mathbf{p}, \delta n) = \varepsilon^{(0)}(\mathbf{p}) + \int f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')\delta n(\mathbf{p}', \mathbf{r})\frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \tag{8.3}$$

Здесь $\mathbf{p}$ — импульс квазичастицы, $\varepsilon^{(0)}(\mathbf{p}) = v_F(p - p_0)$ — энергия квазичастицы, а $\delta n = n - n_F$ — отклонение распределения квазичастиц от равновесного фермиевского распределения. Функция $f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ определяет зависимость энергии квазичастицы с импульсом $\mathbf{p}$ от состояния квазичастицы с импульсом $\mathbf{p}'$.

[1] Л. Д. Ландау, ЖЭТФ, т. 30, с. 1058–1064 (1956).

Теория ферми-жидкости дает связь между функцией $f(\mathbf{p},\mathbf{p}')$ и наблюдаемыми величинами, такими как теплоемкость, магнитная восприимчивость и т. п. (см. [1], § 19, 22). При этом, как мы убедимся, функционал (8.3) полностью определяет динамику квазичастиц.

8.2. Кинетическое уравнение. Коллективные моды

Выражение (8.3) представляет собой гамильтониан H одной квазичастицы, движущейся в самосогласованном поле других квазичастиц. Динамика квазичастицы описывается уравнением Гамильтона $\partial n/\partial t = \{H, n\}$, где $\{...\} = [\partial/\partial\mathbf{r}\,,\, \partial/\partial\mathbf{p}]$ — скобки Пуассона. Вычисляя скобки Пуассона с гамильтонианом (8.3), получаем кинетическое уравнение теории ферми-жидкости[2]:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial n}{\partial \mathbf{p}}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{r}} = 0\,. \tag{8.4}$$

Рассмотрим колебания системы, отвечающие малым отклонениям от равновесия. Для этого представим функцию распределения в виде $n = n_0 + \delta n$ и линеаризуем уравнение (8.4) по δn. Получим

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} + \frac{\partial \delta n}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial \varepsilon^{(0)}}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \delta\varepsilon}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial n_0}{\partial \mathbf{p}} = 0\,, \tag{8.5}$$

где $\delta\varepsilon$ — функционал Ландау (8.2).

Нас интересуют решения уравнения (8.5), зависящие от времени и координат как $e^{-i\omega t + i\mathbf{kr}}$. Нетрудно показать, что все решения δn имеют δ-функционную зависимость от $|\mathbf{p}|$ и локализованы на ферми-поверхности $|\mathbf{p}| = p_0$. Поэтому, оказывается удобным использовать в качестве независимой переменной функцию единичного вектора $\mathbf{n}$ на ферми-поверхности:

$$u(\mathbf{n}) = \int \delta n(\mathbf{p})\, d|\mathbf{p}|\,, \tag{8.6}$$

где интеграл берется вдоль луча $\mathbf{p} \parallel \mathbf{n}$. Величина $u(\mathbf{n})$ имеет смысл нормального смещения ферми-поверхности в точке $p_0\mathbf{n}$.

Из (8.5) можно получить уравнение для $u(\mathbf{n})$, которое имеет следующий вид:

$$(\omega - \mathbf{kv})u(\mathbf{n}) = \mathbf{kv}\int F(\mathbf{n},\mathbf{n}')u(\mathbf{n}')\frac{d\mathbf{n}'}{4\pi}\,, \tag{8.7}$$

где $\mathbf{v} = v_F\mathbf{n}$, а функция F связана с функцией f в функционале Ландау (8.2) следующим образом:

$$F(\mathbf{n},\mathbf{n}') = \nu_0 f(\mathbf{p},\mathbf{p}')_{|\mathbf{p}|=|\mathbf{p}'|=p_0}\,, \tag{8.8}$$

где ν_0 — плотность состояний с одной проекцией спина.

[2] Л. Д. Ландау, ЖЭТФ, т. 32, с. 59–66 (1957).

Полученное соотношение (8.7) следует рассматривать, как уравнение на собственные значения $\omega(\mathbf{k})$. Оно имеет решения двух типов: *квазичастичные* и *коллективные*. Для квазичастичных решений связь ω и $\mathbf{k}$ есть $\omega = \mathbf{kv}$, а соответствующая функция $u(\mathbf{n})$ описывает частицу с определенным направлением скорости $\mathbf{v}$. Поэтому функция $u(\mathbf{n})$ на ферми-поверхности имеет сингулярный характер:

$$u(\mathbf{n}') = \delta^{(2)}(\mathbf{n}' - \mathbf{n}) + u_{\mathrm{reg}}(\mathbf{n}')\,, \tag{8.9}$$

Кроме δ-функции, локализованной в точке $\mathbf{n} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ ферми-поверхности, выражение (8.9) содержит $u_{\mathrm{reg}}(\mathbf{n})$ — более плавную функцию, обычно имеющую полюсы при $\mathbf{kv} = \omega$ (см. задачу 43).

Решения другого типа описывают коллективные моды колебаний ферми-жидкости, или так называемый *нулевой звук*. Рассмотрим простейший случай, когда взаимодействие локально и изотропно, т. е. функция F есть просто константа: $F(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = F_0$. (Примером системы с функцией Ландау подобного вида является жидкий ^{3}He.) В этом случае, ввиду симметрии задачи, функция $u(\mathbf{n})$ зависит только от угла θ между векторами $\mathbf{n}$ и $\mathbf{k}$. Поэтому уравнение (8.7) принимает вид

$$(s - \cos\theta)u(\theta) = \frac{F_0}{2}\cos\theta \int u(\theta')d\theta'\,, \quad \text{где} \;\; s = \frac{\omega}{v_F|\mathbf{k}|}\,. \tag{8.10}$$

Решение уравнения (8.10) есть $u(\mathbf{n}) = A\cos\theta/(s - \cos\theta)$, где A — произвольная константа. Подставляя это решение в (8.10), находим

$$\frac{s}{2}\ln\frac{s+1}{s-1} - 1 = \frac{1}{F_0}\,. \tag{8.11}$$

При любом отталкивательном взаимодействии (т. е. при $F_0 > 0$) это уравнение имеет ровно одно вещественное решение $s > 1$ и, таким образом, определяет функцию $s(F_0)$. Закон дисперсии нулевого звука оказывается линейным: $\omega_0(\mathbf{k}) = s(F_0)v_F|\mathbf{k}|$.

Поскольку $s(F_0) > 1$, частота $\omega_0(\mathbf{k})$ при любом $\mathbf{k}$ лежит выше границы квазичастичного спектра: $\omega_0(\mathbf{k}) > v_F|\mathbf{k}|$. Это означает, что распространение нуль-звука и динамика отдельных квазичастиц «развязаны», вследствие чего нуль-звуковая мода оказывается незатухающей. Отметим, что более точное микроскопическое рассмотрение показывает, что эти результаты справедливы лишь при не слишком больших $\mathbf{k}$ (см. задачи 44 б, 47 б). Обычно законы дисперсии коллективных мод в ферми-жидкости имеют точку окончания $k_{\max}$, в которой происходит слияние с квазичастичным спектром — см. рисунки 8.2, 8.9, а также задачу 73 б).

Коллективные моды в ферми-жидкости могут затрагивать не только распределение плотности частиц, но и поляризацию спина. В этом случае говорят о *спиновых волнах* (см. задачу 47).

Остановимся на том, как видоизменяются коллективные моды в металле, где взаимодействие между частицами кулоновское, т. е. дальнодействующее. В этом случае вместо нулевого звука возникают так называемые *плазменные колебания*. Запишем уравнение (8.4) с учетом силы, возникающей благодаря электрическому полю

$\mathbf{E} = -\nabla\Phi$:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla_{\mathbf{r}})n + e(\mathbf{E}\nabla_{\mathbf{p}})n = 0\,, \tag{8.12}$$
$$\Phi(\mathbf{r}) = e\int\left[\int n(\mathbf{p},\mathbf{r}')\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} - n_0\right]\frac{d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,,$$

где n_0 — плотность фонового положительного заряда. Как и выше, линеаризуем уравнение и перейдем в импульсное представление. Получающиеся уравнения оказываются точно такими же, как и в случае нулевого звука, с точностью до замены $F_0 \to 4\pi e^2\nu/\mathbf{k}^2$, где $\nu = 2\nu_0$ — плотность состояний с учетом спина. Это происходит потому, что уравнение (8.12), если выразить в нем электрическое поле через плотность частиц, приобретает такую же форму, как кинетическое уравнение ферми-жидкости (8.7) с нелокальным функционалом Ландау:

$$\delta\varepsilon(\mathbf{r}) = \iint \frac{e^2\delta n(\mathbf{p},\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,\frac{d^3\mathbf{r}'d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,, \tag{8.13}$$

Как и в случае изотропного взаимодействия, энергия зависит только от полной плотности частиц. Поэтому и угловая зависимость смещений ферми-поверхности, и дисперсионное уравнение выглядят точно так же, как для нуль-звука:

$$\frac{\omega}{2v_F|\mathbf{k}|}\ln\frac{\omega + v_F|\mathbf{k}|}{\omega - v_F|\mathbf{k}|} - 1 = \frac{\mathbf{k}^2}{4\pi e^2\nu}\,. \tag{8.14}$$

Частота $\omega(\mathbf{k})$, определяемая из уравнения (8.14), остается конечной при малых $\mathbf{k}$: $\omega_0 \equiv \omega(\mathbf{k}\to 0) = (4\pi n e^2/m)^{1/2}$, что совпадает с известным классическим результатом для плазменной частоты. Подробнее закон дисперсии плазменных волн будет рассмотрен в задаче 44.

Подведем итог. Бóльшая часть возбуждений в ферми-жидкости — квазичастицы — имеет точно такой же спектр и динамику, как и в невзаимодействующей системе. Кроме того, благодаря взаимодействию могут появиться коллективные моды плазменных или нуль-звуковых колебаний. Появление коллективных мод и есть основной качественный эффект, к которому приводит взаимодействие.

8.3. Приближение случайных фаз

Обсудим теперь, как можно проквантовать динамику ферми-жидкости, используя гамильтонов формализм. Для этого потребуется ввести операторы электрон-дырочных пар, удовлетворяющие бозонным коммутационным соотношениям. Гамильтониан ферми-жидкости (8.1), записанный через такие операторы, содержит квадратичные члены, а также члены более высокого порядка, которыми можно пренебречь, если энергия рассматриваемых возбуждений мала по сравнению с E_F. Динамику, определяемую этим квадратичным гамильтонианом, можно исследовать точно и установить ее эквивалентность кинетическому уравнению ферми-жидкости. Возможность описать систему взаимодействующих фермионов (8.1) с помощью эквивалентного бозонного гамильтониана имеет разнообразные интересные применения. Одним из них является так называемый метод *бозонизации*, который мы рассмотрим в гл. 12.

Как и теория ферми-жидкости Ландау, метод бозе-операторов электрон-дырочных пар основывается на предположении, что функция распределения по импульсам имеет такой же вид, как и для свободных частиц, т.е. что ферми-поверхность не разрушается взаимодействием. Чтобы выяснить, как взаимодействие меняет характер возбуждений, мы приведем гамильтониан системы (8.1) к виду, содержащему операторы рождения и уничтожения пар. При этом будет использовано так называемое приближение случайных фаз Бома и Пайнса, впервые введенное при рассмотрении плазменных колебаний в вырожденном электронном газе[3]. В рамках этого приближения коммутационные соотношения для операторов пар сильно упрощаются[4].

С формальной точки зрения, рассматриваемый здесь метод является корректным в пределе высокой плотности, когда взаимодействие можно считать слабым. Для простоты изложения будем считать фермионы бесспиновыми. При необходимости, восстановить спиновую зависимость в окончательных выражениях можно без особого труда.

Введем бозе-операторы $c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$, $c^+_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$ электрон-дырочных пар следующим образом:

$$c_{\mathbf{p},\mathbf{k}} = a^+_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}+\mathbf{k}}\,, \ c^+_{\mathbf{p},\mathbf{k}} = a^+_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} a_{\mathbf{p}}\,, \ \text{где } |\mathbf{p}| < p_0, \ |\mathbf{p}+\mathbf{k}| > p_0\,. \tag{8.15}$$

Обратим внимание читателя на ограничение, наложенное на импульсы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{k}$. Оно выбрано так, чтобы при действии оператором $c^+_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$ на основное состояние невзаимодействующей системы всегда рождалась ровно одна пара частица–дырка, а при действии оператором $c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$ на любое возбужденное состояние число пар всегда уменьшалось.

Условия $|\mathbf{p}| < p_0$ и $|\mathbf{p}+\mathbf{k}| > p_0$, при фиксированном $\mathbf{k}$ определяют подмножество ферми-сферы, имеющее в сечении серповидную форму (рис. 8.1). Мы будем

[3] см.: D. Bohm and D. Pines, Phys. Rev., v. 92, p. 609–625 (1953). В этой работе электронная система описывается с помощью многочастичной антисимметризованной волновой функции, без использования вторичного квантования. Изложение вопроса на более современном языке можно найти в весьма полезной книге: D. Pines, *The Many-Body Problem*, (W. A. Benjamin, Inc., New York, 1961). Помимо авторского текста данная книга содержит также факсимильные копии основных работ по теории многих тел.

[4] Наше изложение опирается на работы Савады, Венцеля и др., в которых был введен введен так называемый «эффективный гамильтониан», описывающий взаимодействие электрон-дырочных пар в приближении случайных фаз. Более подробно с методом эффективного бозонного гамильтониана можно ознакомиться по оригинальным работам: K. Sawada, *Phys. Rev.*, v. 106, p. 372 (1957); K. Sawada, K. A. Brueckner, N. Fukuda, and R. Brout, *Phys. Rev.*, v. 108, p. 507 (1957); G. Wentzel, *Phys. Rev.*, v. 108, p. 1593 (1957).

обозначать эту область R_k и записывать ограничение (8.15) на $\mathbf{p}$ и $\mathbf{k}$ в виде $\mathbf{p} \in R_k$.

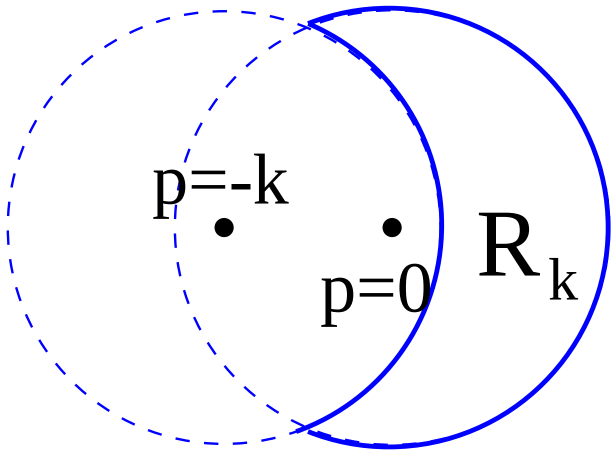


Рис. 8.1

Стратегия наша теперь состоит в том, чтобы представить гамильтониан системы в виде выражения, квадратичного по операторам $c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$, $c^+_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$, и показать, что эти операторы подчиняются обычным бозевским коммутационным соотношениям. При этом интересующая нас задача сведется к задаче о невзаимодействующих осцилляторах. Хотя такое преобразование, разумеется, является приближенным, выясняется, что неточность имеет место только для сильно возбужденных состояний, в то время как сотояния с относительно небольшим количеством электрон–дырочных пар описываются совершенно правильно.

Начнем с оператора плотности частиц и рассмотрим приближенное выражение для гармоники плотности:

$$\tilde{\rho}_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{p} \in R_k} \left(c_{\mathbf{p},\mathbf{k}} + c^+_{-\mathbf{p},-\mathbf{k}} \right). \tag{8.16}$$

Заметим, что наложенное условие $\mathbf{p} \in R_k$ не нарушает вещественности оператора плотности $\tilde{\rho}_{\mathbf{k}} = \tilde{\rho}^+_{-\mathbf{k}}$. Смысл приближения (8.16) состоит в том, что из точного выражения $\rho_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{p}} a^+_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}+\mathbf{k}}$ исключены матричные элементы, соответствующие «чересчур многочастичным» процессам. Говоря более точно, мы отбрасываем все слагаемые $a^+_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}+\mathbf{k}}$, дающие нуль при применении к любому состоянию с ровно одной электрон-дырочной парой, а также к основному состоянию невзаимодействующей системы.

Подставим выражение (8.16) в гамильтониан (8.1). Получающийся при этом приближенный гамильтониан совпадает с исходным гамильтонианом на состояниях, содержащих небольшое количество пар. Отличие между приближенным и точным гамильтонианами появляется только для достаточно сильно возбужденных состояний.

Чтобы в этом убедиться, рассмотрим коммутационные соотношения получившегося гамильтониана $\widehat{\mathcal{H}}_{\mathrm{int}} = (1/2) \sum\limits_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}} \tilde{\rho}_{\mathbf{k}} \tilde{\rho}_{-\mathbf{k}}$ с операторами рождения и уничтожения пар $c^+_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$, $c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$. Коммутатор $\left[\widehat{\mathcal{H}}_{\rm int}, c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}\right]$ описывает динамику флуктуации плотности (8.16). Выразим операторы $\tilde\rho_{\mathbf{k}}$, $c^+_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$ и $c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$ через фермиевские операторы, согласно (8.15), (8.16), подставим в интересующий нас коммутатор, и вычислим его, пользуясь фермионными коммутационными соотношениями. Мы не будем выписывать результат явно, а заметим лишь, что поскольку оператор $\widehat{\mathcal{H}}_{\rm int}$ — 4-го порядка по фермиевским операторам а $c^+_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$ и $c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$ — 2-го, результат будет содержать члены 2-го и 4-го порядка по a_p, $a^+_{p'}$.

Исключим из коммутатора все члены, содержащие операторы пар с $\mathbf{k}' \neq \mathbf{k}$. Эти члены либо не сохраняют число пар, либо описывают одновременные переходы с участием нескольких пар[5]. Получающееся приближенное выражение для коммутатора имеет вид

$$\left[\widehat{\mathcal{H}}_{\rm int}, c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}\right] = -V_{\mathbf{k}}\tilde\rho_{\mathbf{k}}\,, \ \left[\widehat{\mathcal{H}}_{\rm int}, c^+_{\mathbf{p},\mathbf{k}}\right] = V_{\mathbf{k}}\tilde\rho^+_{\mathbf{k}}\,. \tag{8.17}$$

Физическим основанием для процедуры, примененной выше к оператору плотности и к коммутаторам $\left[\widehat{\mathcal{H}}_{\rm int}, c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}\right]$, является сделанное в разд. 8.1 наблюдение, заключающееся в том, что время жизни пары с малой энергией становится очень большим при уменьшении энергии. Поэтому при рассмотрении коммутаторов законно пренебречь процессами, не сохраняющими число пар и приводящими к превращению одной пары в несколько.

Рассмотрим теперь коммутаторы операторов $c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$ и $c^+_{\mathbf{p}',\mathbf{k}'}$. Используя определение (8.15), получаем

$$\left[c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}, c^+_{\mathbf{p}',\mathbf{k}'}\right] = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}a^+_{\mathbf{p}'+\mathbf{k}'}a_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} + \delta_{\mathbf{p}'+\mathbf{k}',\mathbf{p}+\mathbf{k}}a^+_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}'}\,, \tag{8.18}$$

причем $\mathbf{p} \in R_k$, $\mathbf{p}' \in R_{k'}$. Применяя приближение случайных фаз, необходимо выделить в правой части (8.18) члены, не создающие новых пар при действии на основное состояние или на состояние с уже имеющимся небольшим количеством пар. Это достигается заменой правой части (8.18) на среднее, взятое по основному состоянию. В результате коммутатор $\left[c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}, c^+_{\mathbf{p}',\mathbf{k}'}\right]$ оказывается c-числом:

$$\left[c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}, c^+_{\mathbf{p}',\mathbf{k}'}\right] = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\,, \qquad [c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}, c_{\mathbf{p}',\mathbf{k}'}] = 0\,. \tag{8.19}$$

(Второй коммутатор в (8.19) получается аналогично.) Таким образом, мы установили, что операторы рождения пар удовлетворяют бозевским коммутационным соотношениям. Отметим, что найденные выше коммутаторы (8.17) могут быть получены непосредственно из (8.19) и найденного выше выражения $\widehat{\mathcal{H}}_{\rm int} = \frac{1}{2}\sum\limits_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}}\tilde\rho_{\mathbf{k}}\tilde\rho_{-\mathbf{k}}$. Таким образом, приближение случайных фаз оказывается самосогласованным.

[5]Исключаемые члены характерны тем, что в представлении взаимодействия их зависимость от времени описывается быстро осциллирующими фазовыми множителями, в то время как все оставляемые члены не зависят от времени. В работе Бома и Пайнса, процитированной на с. 183, было показано, что эти быстро осциллирующие члены дают малые поправки к уравнениям эволюции операторов (8.15), и поэтому их исключение законно. Этому и обязан своим появлением термин «приближение случайных фаз».

Займемся теперь оператором кинетической энергии $\widehat{\mathcal{H}}_0 = \sum\limits_{\mathbf{p}}(p^2/2m)\, a^+_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}$. Его коммутаторы с операторами рождения и уничтожения пар нетрудно вычислить точно:

$$\left[\widehat{\mathcal{H}}_0, c^+_{\mathbf{p},\mathbf{k}}\right] = \omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}} c^+_{\mathbf{p},\mathbf{k}}\,, \qquad \left[\widehat{\mathcal{H}}_0, c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}\right] = -\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}} c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}\,, \tag{8.20}$$

где $\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}} = (\mathbf{p}+\mathbf{k})^2/2m - \mathbf{p}^2/2m$. Попытаемся представить оператор кинетической энергии через операторы пар $c^+_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$ и $c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$ таким образом, чтобы это представление обеспечивало правильные коммутационные соотношения (8.20). Для этого достаточно просто взять сумму по $\mathbf{p}$ и $\mathbf{k}$ от $\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}} c^+_{\mathbf{p},\mathbf{k}} c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$. Заметим, что условие $\mathbf{p} \in R_k$ обеспечивает положительность $\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$.

Вследствие всего сказанного выше, гамильтониан системы можно представить в следующей эквивалентной форме:

$$\widehat{\mathcal{H}}_{\mathrm{RPA}} = \sum_{\mathbf{k}} \left(\sum_{\mathbf{p}\in R_k} \omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}} c^+_{\mathbf{p},\mathbf{k}} c_{\mathbf{p},\mathbf{k}} + \frac{1}{2} V_{\mathbf{k}} \tilde{\rho}_{\mathbf{k}} \tilde{\rho}_{-\mathbf{k}} \right)\,. \tag{8.21}$$

Это выражение квадратично по бозе-операторам $c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$ и $c^+_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$ и поэтому его изучение оказывается весьма простой задачей.

Удобно перейти к каноническим операторам координат и импульсов осцилляторов:

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{p},\mathbf{k}} &\equiv \varphi^+_{-\mathbf{p},-\mathbf{k}} = (2\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}})^{-1/2} \left(c_{\mathbf{p},\mathbf{k}} + c^+_{-\mathbf{p},-\mathbf{k}} \right)\,, \\ \pi_{\mathbf{p},\mathbf{k}} &\equiv \pi^+_{-\mathbf{p},-\mathbf{k}} = i \left(\tfrac{1}{2}\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}} \right)^{1/2} \left(c^+_{\mathbf{p},\mathbf{k}} - c_{-\mathbf{p},-\mathbf{k}} \right)\,. \end{aligned} \tag{8.22}$$

В представлении осцилляторов оператор кинетической энергии есть сумма невзаимодействующих осцилляторов [6]:

$$\widehat{\mathcal{H}}_0 = \sum_{\mathbf{k};\ \mathbf{p}\in R_k} \frac{1}{2} \left(\pi^+_{\mathbf{p},\mathbf{k}} \pi_{\mathbf{p},\mathbf{k}} + \omega^2_{\mathbf{p},\mathbf{k}} \varphi^+_{\mathbf{p},\mathbf{k}} \varphi_{\mathbf{p},\mathbf{k}} \right)\,. \tag{8.23}$$

Взаимодействие в этом представлении записывается так:

$$\widehat{\mathcal{H}}_{\mathrm{int}} = \sum_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}} \left(\sum_{\mathbf{p}\in R_k} \omega^{1/2}_{\mathbf{p},\mathbf{k}} \varphi^+_{\mathbf{p},\mathbf{k}} \right) \left(\sum_{\mathbf{p}'\in R_k} \omega^{1/2}_{\mathbf{p}',\mathbf{k}} \varphi_{\mathbf{p}',\mathbf{k}} \right)\,. \tag{8.24}$$

Теперь можно диагонализовать гамильтониан $\widehat{\mathcal{H}}_0 + \widehat{\mathcal{H}}_{\mathrm{int}}$ с помощью канонического преобразования и найти нормальные моды колебаний системы.

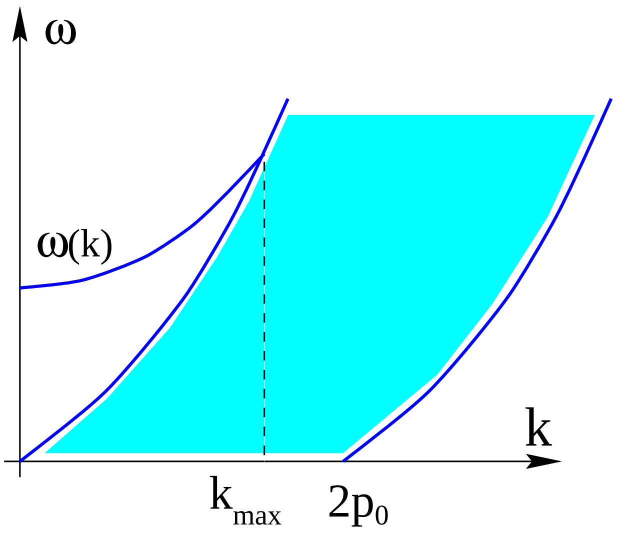


Рис. 8.2

Получающийся спектр частот нормальных колебаний состоит из двух компонент (рис. 8.2). Первая компонента — непрерывный спектр $\omega = \omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$, совпадающий со спектром невзаимодействующей системы. Вторая компонента — коллективная мода с законом дисперсии $\omega(\mathbf{k})$, определяемым из уравнения

$$1 = V_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{p}\in R_k} \frac{2\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}}{\omega^2 - \omega^2_{\mathbf{p},\mathbf{k}}} . \qquad (8.26)$$

Это выражение справедливо для бесспиновых частиц. В случае частиц со спином 1/2, суммирование по спинам приводит к дополнительному множителю 2 в правой части (8.26). В задаче 44 будет показано, что при малых $|\mathbf{k}| \ll p_0$ выражение (8.26) тождественно дисперсионному соотношению для коллективных мод, полученному из кинетического уравнения ферми-жидкости (8.7).

В случае кулоновского взаимодействия, $V_{\mathbf{k}} = 4\pi e^2/\mathbf{k}^2$, коллективные возбуждения представляют собой плазменные волны, имеющие конечную частоту $\omega_0 = (4\pi e^2 n/m)^{1/2}$ при $\mathbf{k} \to 0$. Плазменные колебания существуют в конечном интервале $0 \leqslant |\mathbf{k}| < k_{\max}$, причем их частота выше верхней границы непрерывного спектра. При $|\mathbf{k}| \geqslant k_{\max} \geqslant (4\pi e^2 \nu)^{1/2}$ ветвь плазменных колебаний вливается в непрерывный спектр (см. задачу 44). В этой области частота ω, определяемая из дисперсионного

[6]Мы опускаем константу

$$E_0 = - \sum_{\mathbf{k};\ \mathbf{p}\in R_k} \omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}/2 \, , \qquad (8.25)$$

появляющуюся из-за некоммутативности операторов $c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$ и $c^+_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$.

уравнения (8.26), оказывается комплексной, т. е. колебания приобретают конечное затухание.

Коллективные возбуждения, полученные в приближении случайных фаз, оказываются такими же, как в теории ферми-жидкости Ландау. Некоторое отличие имеется только в поведении, предсказываемом в области больших $|\mathbf{k}| > k_{\max}$, где теория ферми-жидкости теряет применимость, поскольку $1/k_{\max}$ — это размер квазичастицы. Если взаимодействие слабое, то приближение случайных фаз дает правильный ответ даже при $|\mathbf{k}| \geqslant k_{\max}$.

Однако, приближение случайных фаз, основывающееся на гамильтониане электрон-дырочных пар, неприменимо в случае сильного взаимодействия. А теория ферми-жидкости, полученная весьма общим феноменологическим образом, имеет смысл и при сильном взаимодействии, и утверждает, что при $|\mathbf{k}| \leqslant k_{\max}$ можно пользоваться квадратичным гамильтонианом пар $\widehat{\mathcal{H}}_{\mathrm{RPA}}$ с перенормированными константами, которые определяются функцией Ландау. Таким образом, пертурбативное приближение случайных фаз и феноменологическая теория ферми-жидкости прекрасно дополняют друг друга.

Литература: Теория ферми–жидкости Ландау, включая кинетическое уравнение и коллективные возбуждения, изложена в [6], § 1–6 и [1], § 2. Простой вывод закона дисперсии плазмонов с помощью приближения случайных фаз можно найти в [3], § 9.5, 9.6. Корреляционная и обменная энергии кулоновского взаимодействия в электронной ферми–жидкости рассматривается в [3], § 9.4, 9.8, 9.9, [6], § 85 и [1], § 22. Микроскопическое обоснование теории ферми–жидкости, базирующееся на функциях Грина, приведено в [1], § 18, 19, а также в [6], § 15–21. Полезно также обратиться к оригинальным работам (см. сборник статей, процитированный на с. 183).

8.4. Задачи 43 – 49

Задача 43. (*Классификация возбуждений ферми-жидкости.*) Рассмотрим двумерную ферми-жидкость с модельной функцией Ландау, отличной от нуля только в s-канале. Взаимодействие квазичастиц в этом случае есть $F(\mathbf{n}-\mathbf{n}') = F_0$. Ферми-поверхность представляет собой окружность, параметризуемую углом $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$. Отклонение функции распределения квазичастиц от равновесия описывается функцией $u(\theta)$. Удобно разложить ее по фурье-гармоникам $u(\theta) = \sum_m e^{im\theta} u_m$ и записать кинетическое уравнение (8.7) в виде

$$\omega u_m = \frac{1}{2} k v_F (\tilde{u}_{m+1} + \tilde{u}_{m-1}), \text{ где } \tilde{u}_m = \begin{cases} u_m & \text{при } m \neq 0, \\ (1+F_0) u_0 & \text{при } m = 0. \end{cases} \tag{8.27}$$

Полную систему решений этого уравнения можно построить, воспользовавшись методами теории рассеяния. Действительно, уравнение (8.27) трансляционно инвариантно по отношению к сдвигам $m \to m \pm 1$ всюду, за исключением $m = 0$. Поэтому можно искать решения в виде $u_m = A^{\pm} e^{i\alpha m}$ отдельно при положительных и отрицательных m, а затем сшить эти выражения при $m = 0$.

Покажите, что при любом вещественном $0 < \alpha < \pi$ имеется два независимых решения указанного вида, описывающие квазичастичные возбуждения с $\theta = \pm\alpha$. Покажите, что кроме них при $F_0 > 0$ имеется одно решение u_m с комплексным α, затухающее при $m \to \pm\infty$. Это решение описывает коллективную нуль-звуковую моду. Квазичастичные решения характеризуются частотами $|\omega| < kv_F$, а частота коллективной моды лежит за пределами квазичастичного континуума: $\omega(k) > kv_F$.

Можно заметить аналогию с задачей о спектре оператора Шредингера для потенциала, убывающего на бесконечности. В общем случае спектр этого оператора содержит непрерывную и дискретную компоненты. Первая соответствует состояниям рассеяния, а вторая — локализованным состояниям.

Задача 44. (*Плазменные колебания.*) Рассмотрим диаграммы на рис. 8.3 при конечной передаваемой частоте ω и импульсе $\mathbf{k}$. Говорят, что сумма диаграмм на рис. 8.3 описывает эффект *динамической экранировки* затравочного взаимодействия $V_{\mathbf{k}}$, изображенного волнистой линией. Закон дисперсии коллективных возбуждений $\omega(\mathbf{k})$ определяется полюсами заэкранированного взаимодействия.

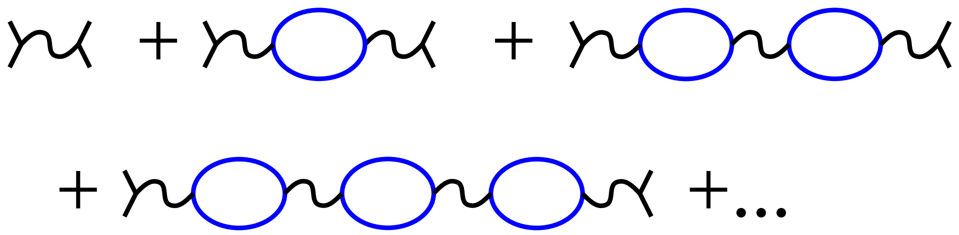


Рис. 8.3

а) Найдите поляризационный оператор $\Pi(\omega, \mathbf{k})$ при $|\mathbf{k}| \ll p_0$, $\omega \ll E_F$. Считая затравочное взаимодействие кулоновским, $V_{\mathbf{k}} = 4\pi e^2/\mathbf{k}^2$, просуммируйте ряд и получите заэкранированное взаимодействие $V_{\omega,\mathbf{k}}$. Покажите, что в этом приближении закон дисперсии плазменных волн $\omega(\mathbf{k})$ дается соотношением (8.14), полученным из кинетического уравнения ферми-жидкости. Определите поведение $\omega(\mathbf{k})$ при малых и больших $\mathbf{k}$.

б) (*Точка окончания спектра.*) Оказывается, что закон дисперсии плазменных волн заканчивается при некотором $k_{\max}$, вливаясь в континуум квазичастичных возбуждений. Чтобы исследовать этот эффект с помощью диаграмм, показанных на рис. 8.3, необходимо найти поляризационный оператор более точно, чем это было сделано в части а).

Найдите поляризационный оператор при произвольных ω и $\mathbf{k}$. Решая уравнение $V_{\mathbf{k}}\Pi(\omega, \mathbf{k}) = 1$, определите точку окончания спектра $k_{\max}$, $\omega_{\max}$.

в) Убедитесь, что уравнение для частоты плазменных волн $\omega(\mathbf{k})$ совпадает с соотношением (8.26), полученным в результате диагонализации гамильтониана $\mathcal{H}_{\rm RPA}$ электрон-дырочных пар.

Задача 45. (*Кулоновское экранирование.*)

а) Электроны в металле экранируют любой внешний электростатический потенциал. Этот эффект можно изучить, рассмотрев диаграммный ряд, показанный на рис. 8.3. Просуммируйте этот ряд в статическом пределе $k \gg \omega/v_F$, считая также, что $k \ll p_0$. Получите формулу Дебая для экранированного кулоновского взаимодействия:

$$\Phi(\mathbf{r}) = e^{-\varkappa|\mathbf{r}|}/|\mathbf{r}|\,, \quad \text{где} \quad \varkappa^2 = 4\pi e^2\nu\,. \tag{8.28}$$

Разумеется, экранировка кулоновского взаимодействия в заряженной системе есть чисто классический эффект, возникающий из-за дальнодействия потенциала $1/r$. Для иллюстрации этого обстоятельства, напомним, как решается задача об экранировании в классической плазме.

Внесем в плазму статический заряд $\rho_0(\mathbf{r})$. Возникающий при этом потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона $\nabla^2\Phi(\mathbf{r}) = -4\pi(\delta\rho(\mathbf{r}) + \rho_0(\mathbf{r}))$, где $\delta\rho(\mathbf{r})$ — плотность экранирующего заряда, связанная с потенциалом формулой Больцмана: $\delta\rho(\mathbf{r}) = en\left(e^{-e\Phi(\mathbf{r})/T} - 1\right)$. Получившуюся систему уравнений Пуассона–Больцмана нетрудно линеаризовать:

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{r}) - \varkappa^2\Phi(\mathbf{r}) = -4\pi\rho_0(\mathbf{r})\,, \quad \text{где} \quad \varkappa^2 = 4\pi e^2 n/T\,. \tag{8.29}$$

Следовательно, экранированный потенциал точечного заряда дается таким же выражением (8.28), как и при $T = 0$. Отличие состоит только в величине длины экранирования $\varkappa^{-1}$.

Другое явление, имеющее место не только в ферми-жидкости, но и в классической плазме, — это плазменные колебания.

б) Поучительно решить задачу об экранировании другим способом, используя гамильтониан электрон-дырочных возбуждений (8.21), выведенный в разд. 8.3. Рассмотрим внешнее поле, взаимодействующее с электронной плотностью. Используя представление (8.16) оператора плотности, запишем взаимодействие электронов с внешним полем $V^{(\mathrm{ext})}(\mathbf{r})$ так:

$$\widehat{\mathcal{H}}_{\mathrm{ext}} = \sum_{\mathbf{k}} \left(V^{(\mathrm{ext})}_{-\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{p}\in R_k} (c_{\mathbf{p},\mathbf{k}} + c^{+}_{-\mathbf{p},-\mathbf{k}}) \right) \tag{8.30}$$

Это выражение линейно по бозе-операторам $c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$, а гамильтониан (8.21) — квадратичен. Поэтому можно найти отклик плотности на внешнее поле, спроецировав возмущение (8.30) на нормальные моды системы осцилляторов, найдя отклик каждой из этих мод, а затем просуммировав по всем модам. Найдите таким способом отклик электронной плотности на кулоновский потенциал и покажите, что результирующий заэкранированный потенциал совпадает с (8.29).

Задача 46. (*Парамагнитная восприимчивость.*) Рассмотрим ферми-жидкость со спином $1/2$ и контактным взаимодействием между частицами: $V(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = g\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$. К системе приложено однородное внешнее магнитное поле B. Будем считать, что фермионы незаряжены, так что поле действует только на спин. В этом случае ферми-жидкость описывается гамильтонианом (8.1), к которому добавлен член

$$\mathcal{H}_B = \omega_B \sum_{\mathbf{p}} \left(a^{+}_{\mathbf{p},\uparrow} a_{\mathbf{p},\uparrow} - a^{+}_{\mathbf{p},\downarrow} a_{\mathbf{p},\downarrow} \right)\,, \tag{8.31}$$

где $\omega_B = \mu B$ — зеемановская энергия. Поскольку энергии состояний со спином вверх и вниз отличаются на $2\omega_B$, основное состояние системы описывается двумя ферми-сферами, имеющими разные радиусы $p_{0,\downarrow}$ и $p_{0,\uparrow}$. В отсутствие взаимодействия радиусы ферми-сфер даются соотношениями $p^2_{0,\downarrow/\uparrow}/2m = E_F \pm \omega_B$.

а) (*Метод среднего поля.*) Найдите функции Грина $G_\uparrow(\varepsilon, \mathbf{p})$ и $G_\downarrow(\varepsilon, \mathbf{p})$. Для этого вычислите собственно-энергетическую часть в низшем порядке по взаимодействию g, рассмотрев два вклада, прямой и обменный, показанные на рис. 8.4.

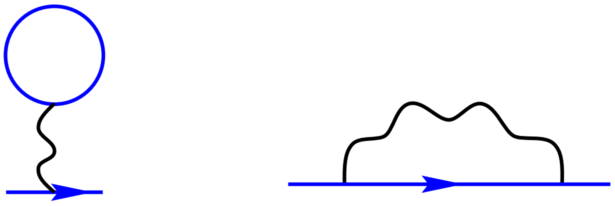


Рис. 8.4

Определите плотности частиц $n_\uparrow$ и $n_\downarrow$. Рассмотрите поляризацию $\delta n = n_\downarrow - n_\uparrow$ в слабом поле $\mu B \ll E_F$ и покажите, что парамагнитная восприимчивость есть

$$\chi = \frac{\chi_0}{1 - g\nu_0} \tag{8.32}$$

где $\chi_0 = \mu^2 \nu$ — восприимчивость идеального ферми-газа (см. задачу 24). Знаменатель в (8.32) описывает так называемое обменное усиление восприимчивости, возникающее из-за взаимодействия.

б) (*Спиновая лестница.*) Поучительно получить восприимчивость (8.32) другим способом, не рассматривая изменение основного состояния. Вместо этого можно найти восприимчивость непосредственно, вычисляя линейный отклик спиновой поляризации на слабое внешнее поле на фоне неполяризованного основного состояния.

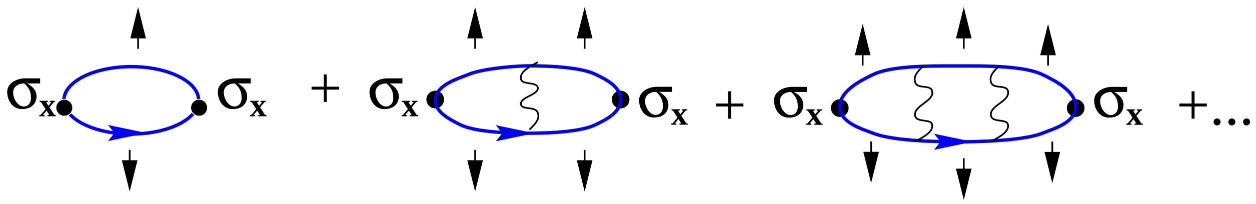


Рис. 8.5

Покажите, что при суммировании лестничных диаграмм, показанных на рис. 8.5, воспроизводится результат (8.32). Вычисление удобно проводить считая, что возмущающее поле направлено вдоль оси x, и используя гриновские функции из части **а**, т. е. проквантовав z-проекцию спина[7]. Интерпретируйте расходимость восприимчивости (8.32) при $g\nu_0 \to 1$.

[7]При ином выборе направления возмущающего поля относительно координатных осей необходимо было бы рассматривать диаграммы, в которых спиновый индекс может меняться от одной ступени лестницы к следующей. Ответ при этом, разумеется, получился бы точно таким же.

Задача 47. (*Спиновые волны.*) В ферми газе, находящемся во внешнем магнитном поле (см. задачу 46) можно наблюдать парамагнитный резонанс. Для этого прикладывают слабое переменное поле в плоскости, перпендикулярной постоянному полю, и выбирают частоту ω переменного поля так, чтобы ω равнялось зеемановской энергии $2\omega_B$, требуемой для переворота спина.

а) (*Теорема Лармора.*) Найдите поперечную восприимчивость $\chi_\perp(\omega, \mathbf{k})$, суммируя лестничный ряд, изображенный на рис. 8.5. Считайте переменное поле пространственно однородным, т. е. передаваемый импульс $\mathbf{k} = 0$. Используйте функции Грина, найденные в задаче 46 а. Покажите, что поперечная восприимчивость имеет полюс при $\omega = 2\omega_B$, независимо от величины взаимодействия g.

Покажите, что этот результат оказывается справедливым не только для точечного, а для произвольного взаимодействия между частицами (8.1), независящего от спинов. Общее утверждение об отсутствии сдвига частоты парамагнитного резонанса вследствие межэлектронного взаимодействия называется теоремой Лармора.

Аналогичное утверждение, известное под названием теоремы Кона, имеет место для циклотронного резонанса. Независимо от величины взаимодействия в гамильтониане (8.1), частота циклотронного резонанса в однородном поле B есть $\omega_c = eB/mc$, где m — истинная (а не эффективная!) масса электрона.

б) (*Закон дисперсии спиновых волн.*) Полюсы двухчастичных функций Грина связаны с коллективными модами. Полюс в поперечной восприимчивости $\chi_\perp(\omega, \mathbf{k})$ соответствует *спиновым волнам* — специфической коллективной моде, возникающей в спин-поляризованной ферми-жидкости.

Найдите закон дисперсии спиновых волн. Для этого просуммируйте диаграммный ряд, показанный на рис. 8.5, при конечных ω и $\mathbf{k}$. Рассмотрите полюс $\chi_\perp(\omega, \mathbf{k})$, даваемый $\omega = 2\omega_B$ при $\mathbf{k} = 0$.

Задача 48. (*Энергия взаимодействия электронов в металле.*) При высокой электронной плотности металл является почти идеальным ферми-газом. Эффекты взаимодействия малы, и их можно вычислять, разлагая интересующие величины в ряд по степеням $e^2/\hbar v_F$.

а) (*Обменная энергия.*) Поправки к энергии системы первого порядка по взаимодействию даются двумя диаграммами, показанными на рис. 8.6. Первый вклад, называемый энергией Хартри, хотя формально и расходится, на самом деле в данном случае полностью компенсируется взаимодействием с положительным фоном и вклада не дает. Второй же вклад, называемый обменной энергией, или энергией Фока, отличен от нуля. Вычислите его и покажите, что обменная энергия отрицательна и зависит от плотности электронов n, как $-e^2 n^{4/3}$.

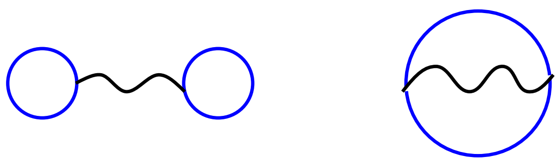


Рис. 8.6

б) (*Члены второго порядка.*) Во втором порядке по взаимодействию есть два существенных вклада, показанных на рис. 8.7. Остальные графики второго порядка сокращаются благодаря компенсирующему фону, подобно первому графику на рис. 8.6.

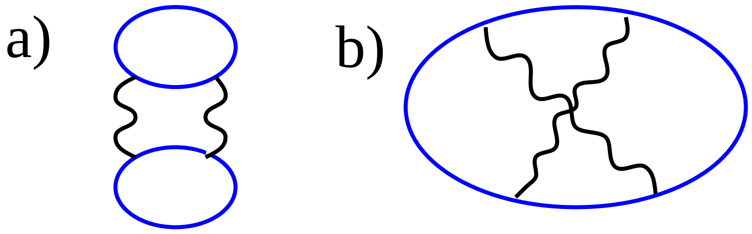


Рис. 8.7

Покажите, что сумма вкладов, изображенных на рис. 8.7, есть

$$\sum_{\mathbf{q}} \sum_{\mathbf{k}\in R_q, \mathbf{k}'\in R_q} \frac{V_{\mathbf{q}}\left(2V_{\mathbf{q}} - V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}\right)}{\xi_{\mathbf{k}} + \xi_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \xi_{\mathbf{k}'}}, \tag{8.33}$$

где $\xi_{\mathbf{p}} = \mathbf{p}^2/2m - E_F$. Первое и второе слагаемое в квадратных скобках соответствует диаграммам *a)* и *b)* на рис. 8.7.)

Покажите, что первый вклад расходится логарифмически на малых $\mathbf{q}$, а второй конечен. Интерпретируйте найденную расходимость.

Задача 49. a) (*Корреляционная энергия*[8].) Как мы убедились в задаче 48, начиная со второго порядка, формальный ряд теории возмущений по $e^2/\hbar v_F$ для энергии кулоновского взаимодействия в металле содержит расходящиеся члены. Общий порядок действий в подобных случаях — найти наиболее сильно расходящиеся графики в каждом порядке теории возмущений и просуммировать их. Покажите, что в данном случае последовательность наиболее сингулярных графиков имеет вид, показанный на рис. 8.8.

Вычислите сумму этих графиков. Покажите, что с логарифмической точностью по $e^2/\hbar v_F$ ответ можно получить, заменив исходное кулоновское взаимодействие на заэкранированное взаимодействие $V_{\mathbf{k},\omega}$, рассмотренное в задаче 44 (см. рис. 8.3). С этой точностью энергия дается графиком *a)* на рис. 8.7, в котором *одна* из линий взаимодействия станет жирной, а другая останется тонкой.

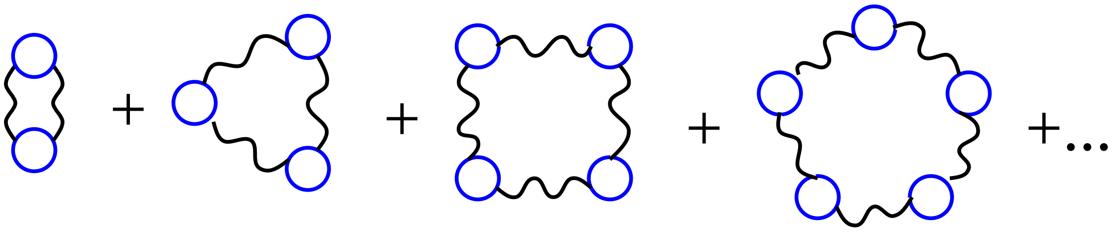


Рис. 8.8

[8]Кольцевые диаграммы для корреляционной энергии были впервые рассмотрены в работе: M. Gell-Mann and K. A. Brueckner, Phys. Rev., v. 106, p. 364 (1957).

б) Корреляционную энергию можно найти и другим способом, воспользовавшись гамильтонианом электрон-дырочных пар (8.21), квадратичным по бозе-операторам $c_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$. Как обсуждалось в разд. (8.3), этот гамильтониан с помощью канонического преобразования может быть представлен в виде суммы невзаимодействующих осцилляторов. Интересующая нас часть энергии системы может быть представлена как суммарная энергия нулевых колебаний всех осцилляторов.

Вклад взаимодействия в энергию системы может быть записан в виде

$$\Delta E = \sum_{\alpha} \frac{1}{2}\hbar\omega_{\alpha} \;-\; \sum_{\mathbf{k};\;\mathbf{p}\in R_k} \frac{1}{2}\hbar\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}\,, \tag{8.34}$$

где $\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$ — частоты нормальных колебаний в невзаимодействующей системе, а ω_α — частоты колебаний во взаимодействующей системе. Найдите энергию взаимодействия электронов (8.34) и свяжите результат с корреляционной энергией, найденной в части а).

в) (*Корреляционная энергия классической плазмы.*) Рассмотрим предел высокой температуры $T \gg E_F$. Вычислите корреляционную добавку к термодинамическому потенциалу $\Omega_{кор}$. Ответ легко получить из графиков рис. 8.8, оставив один член с $\omega_n = 0$ из всей мацубаровской суммы (см. [1], § 22; [6], § 85).

8.5. Решения задач 43 – 49

43. Уравнение (8.27) инвариантно относительно замены $m \to -m$, поэтому решения можно искать в виде четных и нечетных функций:

$$u_m^{нечет} = \sin(\alpha m)\,, \qquad u_m^{чет} = \begin{cases} \cos(\alpha m + \lambda) & \text{при } m > 0, \\ \cos(\alpha m - \lambda) & \text{при } m < 0, \\ u_0 & \text{при } m = 0. \end{cases} \tag{8.35}$$

Подставляя выражения (8.35) в уравнения (8.27) при $|m| > 1$, находим $\omega = kv_F\cos\alpha$. При этом нечетное решение $u_m^{нечет}$ удовлетворяет (8.27) автоматически при всех m. Четное же решение, если подставить его в (8.27) при $m = 0, 1$, дает

$$\begin{aligned} &\omega u_0 = kv_F\cos(\alpha+\lambda)\,, \\ &\omega\cos(\alpha+\lambda) = \frac{1}{2}kv_F((1+F_0)u_0 + \cos(2\alpha+\lambda))\,. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения совместно с соотношением $\omega = kv_F\cos\alpha$, находим

$$\tan\lambda\tan\alpha = \frac{F_0}{1+F_0}\,, \quad u_0 = \frac{\cos\lambda}{1+F_0}\,. \tag{8.36}$$

Угловая зависимость $u^{чет}(\theta)$ и $u^{нечет}(\theta)$ оказывается довольно интересной. Функция $u^{нечет}$ есть просто суперпозиция двух свободных одночастичных состояний:

$$u^{нечет}(\theta) = \frac{i}{2}(\delta(\theta-\alpha) - \delta(\theta+\alpha))\,. \tag{8.37}$$

Функция же $u^{чет}(\theta)$ выглядит более сложно. Она имеет при $\theta = \pm\alpha$ как δ-функционные, так и полюсные особенности, в соответствии с (8.9).

Решение, описывающее коллективную моду, будем искать в виде

$$u_m = \begin{cases} e^{-\alpha m} & \text{при } m > 0, \\ e^{\alpha m} & \text{при } m < 0, \\ u_0 & \text{при } m = 0. \end{cases} \tag{8.38}$$

Уравнение (8.27) удовлетворяется при $|m| > 1$, если $\omega = kv_F \operatorname{ch}\alpha$, а при $m = 0, 1$ дает систему уравнений для α и u_0. Решая их, находим

$$u_0 = \frac{1}{1+F_0}\,, \qquad e^{2\alpha} = 1 + 2F_0\,. \tag{8.39}$$

Таким образом, скорость нуль-звуковой моды есть

$$s = \frac{\omega}{k} = \frac{v_F}{2}\left((1+2F_0)^{1/2} + (1+2F_0)^{-1/2}\right)\,. \tag{8.40}$$

Выпишем явно угловую зависимость нуль-звуковых колебаний:

$$u(\theta) = -\frac{F_0}{1+F_0} + \frac{(\omega^2 - k^2 v_F^2)^{1/2}}{\omega - kv_F\cos\theta}\,. \tag{8.41}$$

Качественная картина такова. При $F_0 \ll 1$ в нуль-звуковых колебаниях принимает участие малая область ферми-поверхности с $\theta \approx F_0$. А при $F_0 \gg 1$ вся ферми-поверхность колеблется как целое: $u(\theta) \sim \cos\theta$.

44. Заэкранированное взаимодействие $V_{\omega,\mathbf{k}}$ дается совокупностью диаграмм, показанных на рис. 8.3. Этот ряд суммируется, как геометрическая прогрессия:

$$V_{\omega,\mathbf{k}} = V_\mathbf{k} + V_\mathbf{k}^2\Pi(\omega,\mathbf{k}) + V_\mathbf{k}^3\Pi^2(\omega,\mathbf{k}) + ... = \frac{V_\mathbf{k}}{1 - V_\mathbf{k}\Pi(\omega,\mathbf{k})}\,. \tag{8.42}$$

Поляризационный оператор есть

$$\Pi(\omega,\mathbf{k}) = 2i\int G(\varepsilon_-,\mathbf{p}_-)G(\varepsilon_+,\mathbf{p}_+)\frac{d^3p\,d\varepsilon}{(2\pi\hbar)^4}\,, \tag{8.43}$$

где $\varepsilon_\pm = \varepsilon \pm \omega/2$, $\mathbf{p}_\pm = \mathbf{p} \pm \mathbf{k}/2$, а множитель 2 возникает при суммировании по спинам.

Интегрируя по частоте ε, находим [9]

$$\Pi(\omega,\mathbf{k}) = 2\int \frac{n(\mathbf{p}_-) - n(\mathbf{p}_+)}{\omega - \xi(\mathbf{p}_+) + \xi(\mathbf{p}_-)}\,\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}\,, \tag{8.44}$$

где $n(\mathbf{p})$ — распределение Ферми (ср. с выводом (7.85)).

[9] Здесь и далее подразумевается, что частота в поляризационном операторе $\Pi(\omega,\mathbf{k})$ имеет бесконечно малую мнимую часть: $\omega + i0\operatorname{sign}\omega$. В этом случае $\Pi(\omega,\mathbf{k})$ имеет аналитические свойства причинной двухчастичной функции Грина.

44 а. Рассмотрим случай малых $|\mathbf{k}| \ll p_0$. Приближенно можно записать

$$n(\mathbf{p}_-) - n(\mathbf{p}_+) = k\cos\theta\delta(|\mathbf{p}| - p_0)\,, \tag{8.45}$$

где θ — угол между векторами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{k}$. Из-за δ-функции интеграл в (8.44) оказывается ограничен на поверхность ферми-сферы:

$$\Pi(\omega, \mathbf{k}) = 2\nu_0 \int\limits_0^{\pi} \frac{kv_F\cos\theta}{\omega - kv_F\cos\theta}\, d\cos\theta\,. \tag{8.46}$$

Интегрируя по θ, находим

$$\Pi(\omega, \mathbf{k}) = 2\nu_0 \left(\frac{s}{2}\ln\frac{s+1}{s-1} - 1\right)\,, \tag{8.47}$$

где $s = \omega/kv_F$. Мы убеждаемся, что уравнение $V_{\mathbf{k}}\Pi(\omega,\mathbf{k}) = 1$, определяющее полюс заэкранированного взаимодействия $V_{\omega,\mathbf{k}}$, тождественно соотношению (8.14), выведенному из кинетического уравнения ферми-жидкости.

Закон дисперсии плазмона при малых $\mathbf{k}$ можно получить, разложив выражение (8.47) по $1/s$:

$$\Pi(\omega, \mathbf{k}) = 2\nu_0 \left(\frac{1}{3s^2} + \frac{1}{5s^4} + ...\right)\,. \tag{8.48}$$

Тогда уравнение $V_{\mathbf{k}}\Pi(\omega,\mathbf{k}) = 1$ принимает вид

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\left(1 + \frac{3}{5}\frac{k^2v_F^2}{\omega^2}\right) = 1\,, \tag{8.49}$$

где $\omega_0^2 = 4\pi ne^2/m$ ($n = p_0^3/(3\pi^2)$ — плотность частиц). Следовательно, закон дисперсии при малых $\mathbf{k}$ есть

$$\omega^2(\mathbf{k}) = \omega_0^2 + \frac{3}{5}\mathbf{k}^2v_F^2 + \mathrm{O}\left(\frac{(kv_F)^4}{\omega_0^4}\right)\,. \tag{8.50}$$

Закон дисперсии при больших $\mathbf{k}$ можно определить, заметив, что выражение (8.47) стремится к бесконечности при $s \to 1$. Поэтому уравнение $V_{\mathbf{k}}\Pi(s) = 1$ имеет решение при произвольно большом $\mathbf{k}$, причем $s \to 1$ при $\mathbf{k} \to \infty$. Это означает, что $\omega(\mathbf{k})$ приближается к v_Fk при больших k, все время оставаясь выше границы квазичастичного континуума $\omega(k) = v_Fk$.

44 б. Как мы сейчас покажем, на самом деле закон дисперсии плазменных волн имеет точку окончания при некотором $k_{\max}$, где происходит слияние с квазичастичным континуумом. Дело в том, что поляризационный оператор (8.44) на самом деле остается конечным на границе континуума. Расходимость же $\Pi(s \to 1) \to \infty$, полученная в части а), есть следствие принятого приближения (8.45). Конечность поляризационного оператора приводит к тому, что уравнение $V_{\mathbf{k}}\Pi(\omega,\mathbf{k}) = 1$ не имеет решений за пределами квазичастичного континуума при достаточно больших $|\mathbf{k}|$.

Найдем $\Pi(\omega, \mathbf{k})$ точно, не используя приближение (8.45). Для этого перепишем выражение (8.44) в виде

$$\Pi(\omega, \mathbf{k}) = 2 \int \left(\frac{n(\mathbf{p})}{\omega - \mathbf{k}^2/2m - \mathbf{kv}} - \frac{n(\mathbf{p})}{\omega + \mathbf{k}^2/2m - \mathbf{kv}} \right) \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}\,, \tag{8.51}$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m$. В этом выражении удобно сначала проинтегрировать по компонентам $\mathbf{p}$ перпендикулярным вектору $\mathbf{k}$. Получается

$$\Pi(\omega, \mathbf{k}) = 2 \int\limits_{-p_0}^{p_0} \left(\frac{\pi(p_0^2 - p_x^2)}{\omega - k^2/2m - kp_x/m} - \frac{\pi(p_0^2 - p_x^2)}{\omega + k^2/2m - kp_x/m} \right) \frac{dp_x}{(2\pi\hbar)^3}\,, \tag{8.52}$$

где p_x есть компонента $\mathbf{p}$ вдоль $\mathbf{k}$. Оставшееся интегрирование по p_x выполняется элементарно. Результат удобно записать в виде

$$\Pi(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\nu}{8a} \left(F(s-a) - F(s+a) \right)\,, \qquad a = \frac{k}{2p_0},\ s = \frac{\omega}{v_F k}, \tag{8.53}$$

где

$$F(u) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{1 - x^2}{u - x} dx = 2u + (1 - u^2) \ln \frac{u+1}{u-1}\,. \tag{8.54}$$

Выражения (8.53), (8.54) определяют точный поляризационный оператор.

Проверим, что при $k \ll p_0$ получается выражение (8.47), найденное выше. Действительно, при $a = k/2p_0 \to 0$ выражение (8.53) упрощается:

$$\Pi(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{\nu}{4} F'(s) = -\frac{\nu}{4} \left(4 - 2s \ln \frac{s+1}{s-1} \right)\,, \tag{8.55}$$

что совпадает с (8.47).

Теперь воспользуемся выражениями (8.53), (8.54) и определим точку окончания спектра плазмонов. Граница квазичастичного континуума есть $\omega = v_F k + k^2/2m$. Это условие можно записать как $s - a = 1$. Поэтому точка окончания спектра, если таковая имеется, должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\nu}{8a} \left(F(1) - F(1 + 2a) \right) = \frac{k^2}{4\pi e^2}\,. \tag{8.56}$$

Это уравнение нетрудно переписать в виде

$$(1 + a) \ln \frac{1+a}{a} - 1 \;=\; \frac{2k^2}{\varkappa^2}\,, \tag{8.57}$$

где $\varkappa^2 = 4\pi e^2 \nu$. Покажем, что в интервале $0 < a \leqslant 1$ у уравнения (8.57) всегда имеется ровно одно решение. Действительно, левая часть (8.57) при $0 < a < 0.5$ монотонно убывает от ∞ до значения порядка единицы, в то время как правая часть (8.57) монотонно возрастает от 0 до значения порядка $p_0^2/\varkappa^2$. В то же время $e^2/\hbar v_F \ll 1$, поскольку мы занимаемся теорией возмущений в пределе большой плотности. Поэтому $p_0^2/\varkappa^2 \gg 1$, и значит у уравнения (8.57) имеется корень, причем ровно один.

Из сказанного также следует, что решение лежит в области $a \ll 1$. Поэтому уравнение (8.57) можно упростить, отбросив в левой части малые члены. Получаем $\ln(2p_0/ek) = 2k^2/\varkappa^2$, где $e = 2,71828....$ С логарифмической точностью решение этого уравнения есть

$$k_{\max} = \varkappa\left(\frac{1}{2}\ln\frac{p_0}{\varkappa}\right)^{1/2}. \tag{8.58}$$

Находим частоту при $k = k_{\max}$:

$$\omega_{\max} = v_F k_{\max} = \omega_0\left(\frac{3}{2}\ln\frac{p_0}{\varkappa}\right)^{1/2}. \tag{8.59}$$

При $e^2/\hbar v_F \ll 1$ частота в точке окончания спектра $\omega_0 \leqslant \omega_{\max} \ll \varepsilon_F$.

Подчеркнем еще раз, что ключевым обстоятельством является отсутствие расходимости $\Pi(\omega, \mathbf{k})$ на границе квазичастичного спектра. Оценить величину поляризационного оператора можно и не вычисляя $\Pi(\omega = v_F|\mathbf{k}|)$ точно. Достаточно заметить, что ширина пояска, в котором сосредоточена функция $n(\mathbf{p}_-) - n(\mathbf{p}_+)$ при малых $\mathbf{k}$ порядка $|\mathbf{k}|$. Поэтому $\delta-$функция в (8.45) имеет ненулевую «ширину» порядка $|\mathbf{k}|$. В результате, при $s = \omega/v_F k = 1$ логарифмическая расходимость выражения (8.47) обрезается на $s - 1 \approx k/p_0$, и получается $\Pi(\omega = v_F|\mathbf{k}|) = \nu_0 \ln(p_0/k)$. Нетрудно видеть, что уравнение $V_{\mathbf{k}}\Pi = 1$ с логарифмической точностью совпадает с (8.57).

44 в. Рассмотрим теперь коллективные моды, пользуясь представлением осцилляторов электрон-дырочных пар. Гамильтониан $\mathcal{H}_{\mathrm{RPA}}$, даваемый суммой (8.23) и (8.24), квадратичен. Поэтому диагонализация производится так же, как в задаче о многомерном классическом осцилляторе. Уравнения на собственные значения имеют вид

$$\omega^2\varphi_{\mathbf{p},\mathbf{k}} = \omega^2_{\mathbf{p},\mathbf{k}}\varphi_{\mathbf{p},\mathbf{k}} + 2\omega^{1/2}_{\mathbf{p},\mathbf{k}}V_{\mathbf{k}}\left(\sum_{\mathbf{p}'\in R_k}\omega^{1/2}_{\mathbf{p}',\mathbf{k}}\varphi_{\mathbf{p}',\mathbf{k}}\right). \tag{8.60}$$

Находим

$$\varphi_{\mathbf{p},\mathbf{k}} = \frac{2\omega^{1/2}_{\mathbf{p},\mathbf{k}}}{\omega^2 - \omega^2_{\mathbf{p},\mathbf{k}}}V_{\mathbf{k}}\left(\sum_{\mathbf{p}'\in R_k}\omega^{1/2}_{\mathbf{p}',\mathbf{k}}\varphi_{\mathbf{p}',\mathbf{k}}\right) \tag{8.61}$$

Умножая эти равенства на $\omega^{1/2}_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$ и суммируя по $\mathbf{k}$, $\mathbf{p}$ и спинам, получаем уравнение самосогласования:

$$1 = 2V_{\mathbf{k}}\sum_{\mathbf{p}\in R_k}\frac{2\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}}{\omega^2 - \omega^2_{\mathbf{p},\mathbf{k}}}, \tag{8.62}$$

(коэффициент 2 перед $V_{\mathbf{k}}$ — спиновое вырождение).

Итак, мы убедились в справедливости соотношения (8.26). Проверим теперь, что оно совпадает с $1 = V_{\mathbf{k}}\Pi(\omega, \mathbf{k})$. Для этого в выражении (8.44) для поляризационного оператора разделим область интегрирования по $\mathbf{p}$ на две под-области: $n(\mathbf{p}_-) > n(\mathbf{p}_+) = 0$ и $n(\mathbf{p}_-) < n(\mathbf{p}_+) = 1$. Простым сдвигом $\mathbf{p} \to \mathbf{p} + \mathbf{k}/2$ в первом случае, и $\mathbf{p} \to \mathbf{p} - \mathbf{k}/2$ — во втором, получаем области R_k и R_{-k}. Делая в интеграле по R_{-k} замену $\mathbf{k} \to -\mathbf{k}$, $\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$, не меняющую результата, приводим поляризационный оператор (8.44) к виду:

$$\Pi(\omega, \mathbf{k}) = 2 \sum_{\mathbf{p} \in R_k} \left(\frac{1}{\omega - \omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}} - \frac{1}{\omega + \omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}} \right) . \tag{8.63}$$

Таким образом, действительно, соотношение $1 = V_{\mathbf{k}} \Pi(\omega, \mathbf{k})$, полученное суммированием диаграмм, есть не что иное, как (8.62).

В заключение отметим, что хотя точный поляризационный оператор (8.53), (8.54) и может оказаться полезным в некоторых случаях, обычно бывает совершенно достаточно пользоваться выражением (8.47), соответствующим приближению кинетического уравнения ферми-жидкости.

45 а. Сумма ряда на рис. 8.3 в статическом пределе $\omega = 0$ равна

$$\Phi(\mathbf{k}) = \frac{V_{\mathbf{k}}}{1 - V_{\mathbf{k}} \Pi(\mathbf{k})} . \tag{8.64}$$

Поляризационный оператор (8.47) при $\omega = 0$ есть $\Pi(s = 0) = -\nu$, а $V_{\mathbf{k}} = 4\pi e^2 / \mathbf{k}^2$, поэтому

$$\Phi(\mathbf{k}) = \frac{4\pi e^2}{\mathbf{k}^2 + \varkappa^2} , \tag{8.65}$$

где $\varkappa^2 = 4\pi e^2 \nu$. Делая преобразование Фурье, получаем искомое выражение (8.28). В справедливости последнего шага легче всего убедиться, не вычисляя фурье-образ непосредственно, а проверяя, что $(\nabla^2 - \varkappa^2)\, \Phi(\mathbf{r}) = -4\pi e^2 \delta^{(3)}(\mathbf{r})$.

Интересно отметить следующее. Вопреки ожиданиям, потенциал на большом расстоянии от заряда в ферми-газе спадает вовсе не экспоненциально. Дело в том, что вокруг внесенного заряда возникают фриделевские осцилляции плотности наведенного заряда (см. задачи 8,23), амплитуда которых спадает степенным образом, как $1/r^3$. Формально это проявляется в том, что поляризационный оператор $\Pi_{\omega=0}(\mathbf{k})$ имеет слабую особенность при $|\mathbf{k}| = 2p_0$. Чтобы ее найти, воспользуемся точным выражением (8.53), (8.54). Получаем

$$\Pi_{\omega=0}(\mathbf{k}) = -\frac{\nu}{4a} \left(2a - (1 - a^2) \ln \frac{1 + a}{1 - a} \right) , \tag{8.66}$$

где $a = |\mathbf{k}|/2p_0$. Особенность при $a = 1$ и дает главный вклад в потенциал при больших $\mathbf{r}$.

Оценим осциллирующую компоненту потенциала, возникающего при возмущении электронной системы внешним потенциалом $V^{(\mathrm{ext})}(\mathbf{r})$. Заэкранированный потенциал в этом случае дается выражением (8.64) с $V^{(\mathrm{ext})}_{\mathbf{k}}$ в числителе. Выделяя особенность при $|\mathbf{k}| = 2p_0$ и делая фурье-преобразование, получаем

$$\Phi_{osc}(\mathbf{r}) \approx \frac{e^2}{4\pi\hbar v_F} V^{(\mathrm{ext})}_{|\mathbf{k}|=2p_0} \frac{\cos(2p_0|\mathbf{r}|)}{|\mathbf{r}|^3} . \tag{8.67}$$

Отметим, что при $\varkappa \ll p_0$ относительно медленно убывающий фриделевский вклад (8.67) не противоречит экспоненциальной зависимости (8.28). Чтобы в этом убедиться, достаточно усреднить распределение потенциала (8.64) по большому числу осцилляций. Усредненный потенциал спадает экспоненциально, в соответствии с (8.28).

45 б. Рассмотрим задачу об экранировке в ферми-жидкости, пользуясь представлением осцилляторов (8.23), (8.24). Взаимодействие с внешним полем (8.30) линейно по смещениям осцилляторов:

$$\widehat{\mathcal{H}}_{\text{ext}} = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{\mathbf{p}\in R_k} V_{-\mathbf{k}}^{(\text{ext})}(2\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}})^{1/2}\varphi_{\mathbf{p},\mathbf{k}} \ + \ \text{h.c.} \tag{8.68}$$

Нам понадобятся средние смещения осцилляторов, которые нетрудно найти из уравнений

$$\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}^2\varphi_{\mathbf{p},\mathbf{k}} + (\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}})^{1/2}V_{\mathbf{k}}\sum_{\mathbf{p}'\in R_k}(\omega_{\mathbf{p}',\mathbf{k}})^{1/2}\varphi_{\mathbf{p}',\mathbf{k}} = -(2\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}})^{1/2}V_{\mathbf{k}}^{(\text{ext})}\,. \tag{8.69}$$

Пользуясь выражением (8.16), записываем гармоники плотности

$$\rho_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{p}\in R_k}(2\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}})^{1/2}\varphi_{\mathbf{p},\mathbf{k}} \tag{8.70}$$

и, решая уравнения (8.69), находим

$$\rho_{\mathbf{k}}(1-\Pi(\mathbf{k})V_{\mathbf{k}}) = \Pi(\mathbf{k})V_{\mathbf{k}}^{(\text{ext})}\,, \qquad \text{где } \Pi(\mathbf{k}) = -\sum_{\mathbf{p}\in R_k}4/\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}} \tag{8.71}$$

Согласно задаче 44 в, $\Pi(\mathbf{k})$ есть не что иное, как поляризационный оператор $\Pi(\omega,\mathbf{k})$ при $\omega=0$. Поэтому заэкранированный потенциал

$$V_{\mathbf{k}}^{(\text{tot})} = V_{\mathbf{k}}^{(\text{ext})} + V_{\mathbf{k}}\rho_{\mathbf{k}} = \frac{V_{\mathbf{k}}^{(\text{ext})}}{1-V_{\mathbf{k}}\Pi(\mathbf{k})} \tag{8.72}$$

совпадает с (8.64).

46 а. В первом порядке по взаимодействию имеется два вклада в собственно-энергетическую часть, показанных на рис. 8.4. В случае короткодействия интегрирование по внутренним частоте и импульсу дают просто плотность частиц, в первой диаграмме $n_\uparrow + n_\downarrow$, а во второй — $n_\uparrow$ или $n_\downarrow$, в зависимости от спинового индекса внешней линии. При этом существенно, что знаки первого и второго вкладов противоположны, поскольку во второй диаграмме на рис. 8.4 отсутствует фермионная петля. Поэтому

$$\begin{aligned}\Sigma_\uparrow &= g(n_\uparrow + n_\downarrow) - gn_\uparrow = gn_\downarrow\\ \Sigma_\downarrow &= g(n_\uparrow + n_\downarrow) - gn_\downarrow = gn_\uparrow\end{aligned} \tag{8.73}$$

Величина Σ есть сдвиг химпотенциала в результате взаимодействия. То обстоятельство, что Σ для частиц с одной поляризацией спина зависит только от плотности частиц с противоположной поляризацией спина, имеет простой смысл. По принципу Паули фермионы с одинаковым спином никогда не оказываются в одной и той же точке. Поэтому контактное взаимодействие между такими фермионами отсутствует.

Теперь записываем функции Грина:

$$G_{\uparrow}(\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{1}{\varepsilon - \xi(\mathbf{p}) - \omega_B - \Sigma_{\uparrow}}, \quad G_{\downarrow}(\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{1}{\varepsilon - \xi(\mathbf{p}) + \omega_B - \Sigma_{\downarrow}}. \tag{8.74}$$

Эти выражения позволяют найти плотности частиц:

$$n_{\uparrow} = \frac{4\pi p_{0,\uparrow}^3}{3(2\pi\hbar)^3}, \quad n_{\downarrow} = \frac{4\pi p_{0,\downarrow}^3}{3(2\pi\hbar)^3}, \tag{8.75}$$

где

$$\frac{p_{\uparrow}^2}{2m} = E_F - \omega_B - \Sigma_{\uparrow}, \quad \frac{p_{\downarrow}^2}{2m} = E_F + \omega_B - \Sigma_{\downarrow}. \tag{8.76}$$

Из этих соотношений нетрудно найти, как меняются плотности $n_{\uparrow}$ и $n_{\downarrow}$ при включении слабого поля $\omega_B \ll E_F$:

$$\delta n_{\uparrow} = \nu_0(-\omega_B - g\,\delta n_{\downarrow}), \quad \delta n_{\downarrow} = \nu_0(\omega_B - g\,\delta n_{\uparrow}). \tag{8.77}$$

Решая систему, находим

$$\delta n_{\downarrow} = -\delta n_{\uparrow} = \nu_0\omega_B/(1 - g\nu_0). \tag{8.78}$$

Намагниченность равна $\mu(\delta n_{\uparrow} - \delta n_{\downarrow})$. В результате получаем восприимчивость

$$\chi = 2\mu^2\nu_0/(1 - g\nu_0), \tag{8.79}$$

что есть требуемый результат (8.32).

46 б. Лестничный ряд, показанный на рис. 8.5, суммируется как геометрическая прогрессия:

$$\chi(\omega, \mathbf{k}) = -2\mu^2 \frac{\Pi(\omega, \mathbf{k})}{1 + g\Pi(\omega, \mathbf{k})}. \tag{8.80}$$

Множитель 2 возникает из-за того, что направления поляризации спина в верхней и нижней ноге лестницы можно выбрать двумя различными способами. (Более формально, $2 = \mathrm{Tr}\,\sigma_x^2$.)

Очень существенное отличие ряда (8.80) от ряда (8.42) для экранированного потенциала, рассматривавшегося в задачах 44 и 45, заключается в знаке «+» в знаменателе (8.80). Знак оказывается другим из-за того, что в ряде (8.42) для экранировки n-й член содержит $n-1$ фермионную петлю, что дает множитель $(-1)^{n-1}$. В то же время, каждая из диаграмм, изображенных на рис. 8.5, образована всего одной петлей, поэтому дополнительного множителя $(-1)^n$ не возникает.

В статическом пределе $k, \omega \to 0$, $k \gg \omega/v_F$, поляризационный оператор $\Pi = -\nu_0$. (В данном случае суммирования по спинам в Π не производится, поэтому ответ дается плотностью состояний ν_0 с одной проекцией спина.) Подставляя $\Pi = -\nu_0$ в (8.80), получаем восприимчивость (8.32).

Расходимость восприимчивости при $g\nu_0 \to 1$ означает, что система становится неустойчивой по отношению к спиновым флуктуациям. Эта неустойчивость связана с переходом в ферромагнитное состояние.

Критерий ферромагнитного перехода $\nu_0 g > 1$ называется *соотношением Стонера*. Оно может быть получено элементарными средствами. Пусть $n_\uparrow$ и $n_\downarrow$ — плотности электронов со спинами вверх и вниз соответственно. Тогда средняя плотность спина равна $m = n_\uparrow - n_\downarrow$, а полная плотность частиц $n_0 = n_\uparrow + n_\downarrow$. В основном состоянии ферми-газа $n_\uparrow = n_\downarrow = n_0/2$. Пусть в системе каким-то образом число электронов со спином вверх превышает число электронов со спином вниз. Энергия такого состояния отличается от энергии основного состояния. Вычислив энергию идеального ферми-газа как функцию его плотности и разложив до второго порядка по отклонению плотности от равновесной, получим

$$\delta E_{\text{free}} = \frac{1}{2\nu_0}\left(\delta n_\uparrow^2 + \delta n_\downarrow^2\right) = m^2/(4\nu_0)\,. \tag{8.81}$$

Теперь вычислим энергию взаимодействия электронов. Поскольку $V(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = g\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$, то взаимодействуют лишь электроны с противоположно направленными спинами (ибо два электрона с одинаковыми спинами не могут одновременно находиться в одной точке). Поэтому энергия взаимодействия электронов есть $g\,n_\uparrow n_\downarrow$, откуда

$$\delta E_{\text{int}} = g\,\delta n_\uparrow\,\delta n_\downarrow = -(g/4)\,m^2\,. \tag{8.82}$$

Таким образом, энергия системы зависит от магнитного момента следующим образом:

$$\delta E_{\text{tot}} = (m^2/4\nu_0)\,(1 - g\nu_0)\ . \tag{8.83}$$

Теперь видно, что при $g\nu_0 < 1$ появление ненулевого магнитного момента энергетически невыгодно, а при $g\nu_0 > 1$ — выгодно. В этом и состоит причина обнаруженной нами неустойчивости.

47. Восприимчивость $\chi_\perp(\omega,\mathbf{k})$ дается в общем виде диаграммами лестничного ряда, изображенного на рис. 8.5. Сумма этого ряда есть

$$\chi_\perp(\omega,\mathbf{k}) = -2\mu^2\frac{\Pi_{\uparrow\downarrow}(\omega,\mathbf{k})}{1 + g\Pi_{\uparrow\downarrow}(\omega,\mathbf{k})}\,. \tag{8.84}$$

Это выражение получается точно так же, как (8.80), причем в данном случае поляризационный оператор $\Pi_{\uparrow\downarrow}(\omega,\mathbf{k})$ нужно найти для состояния, поляризованного внешним полем.

Интересующий нас поляризационный оператор есть

$$\Pi_{\uparrow\downarrow}(\omega,\mathbf{k}) = i\int G_\uparrow(\varepsilon_-,\mathbf{p}_-)G_\downarrow(\varepsilon_+,\mathbf{p}_+)\frac{d^3p\,d\varepsilon}{(2\pi\hbar)^4}\,, \tag{8.85}$$

где $\varepsilon_\pm = \varepsilon \pm \omega/2$, $\mathbf{p}_\pm = \mathbf{p} \pm \mathbf{k}/2$, а соответствующие функции Грина были найдены в задаче 46 а.

Подставляя в (8.85) выражения (8.74) для $G_\uparrow$ и $G_\downarrow$, и интегрируя по частоте ε, находим

$$\Pi_{\uparrow\downarrow}(\omega,\mathbf{k}) = \int \frac{n_\downarrow(\mathbf{p}_-) - n_\uparrow(\mathbf{p}_+)}{\omega - \mathbf{kv} - 2\omega_B - \Sigma_\uparrow + \Sigma_\downarrow} \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}\,, \tag{8.86}$$

где $n_\uparrow(\mathbf{p})$ и $n_\downarrow(\mathbf{p})$ — распределения Ферми для двух поляризаций спина. Величины $\Sigma_\uparrow$ и $\Sigma_\downarrow$ даются выражениями (8.73), как и раньше.

47 а. Пусть $\mathbf{k} = 0$. В этом случае подинтегральное выражение в (8.86) зависит от $\mathbf{p}$ только через $n_\uparrow(\mathbf{p})$ и $n_\downarrow(\mathbf{p})$. Поэтому интеграл по d^3p дает

$$\Pi_{\uparrow\downarrow}(\omega,\mathbf{k}) = \frac{n_\downarrow - n_\uparrow}{\omega - 2\omega_B - gn_\downarrow + gn_\uparrow}\,, \tag{8.87}$$

где $n_\uparrow$ и $n_\downarrow$ — плотности частиц со спином вверх и вниз.

Подставляя (8.87) в (8.84), получаем

$$\chi_\perp(\omega)_{\mathbf{k}=0} = 2\mu^2 \frac{\dfrac{n_\downarrow - n_\uparrow}{\omega - 2\omega_B - g(n_\downarrow - n_\uparrow)}}{1 + g\,\dfrac{n_\downarrow - n_\uparrow}{\omega - 2\omega_B - g(n_\downarrow - n_\uparrow)}} = 2\mu^2 \frac{n_\downarrow - n_\uparrow}{\omega - 2\omega_B}\,. \tag{8.88}$$

Таким образом, при $\mathbf{k} = 0$ поперечная восприимчивость совершенно не зависит от взаимодействия. В частности, резонансная частота $\omega = 2\omega_B$ остается такой же, как в невзаимодействующей системе.

Нетрудно убедиться в том, что утверждение теоремы Лармора об отсутствии сдвига резонансной частоты справедливо для произвольного взаимодействия, не зависящего от спина. Гамильтониан фермионов в магнитном поле есть сумма (8.1) и (8.31). При этом члены (8.1) коммутируют с оператором полного спина системы $\widehat{s}^i = \int \psi_\alpha(\mathbf{r})\sigma^i_{\alpha\beta}\psi_\beta(\mathbf{r})d^3r$, а зеемановский член (8.31) — нет. Поэтому

$$\frac{d\widehat{\mathbf{s}}}{dt} = i\,[\mathcal{H}_{\text{total}}, \widehat{\mathbf{s}}] = i\,[\mathcal{H}_B, \widehat{\mathbf{s}}] = -2\mu\mathbf{B} \times \widehat{\mathbf{s}} \tag{8.89}$$

То обстоятельство, что свободная прецессия $\mathbf{s}$ происходит с частотой $2\omega_B$, как раз и означает, что при возбуждении внешним переменным полем резонанс имеет место при $\omega = 2\omega_B$.

47 б. Рассмотрим теперь $\chi_\perp(\omega,\mathbf{k})$ при $\mathbf{k} \neq 0$. Мы хотим найти зависимость положения полюса $\chi_\perp \sim (\omega - \omega(\mathbf{k}))^{-1}$ от $\mathbf{k}$. Как станет ясно ниже, интерес представляют относительно малые $|\mathbf{k}| \approx g(n_\downarrow - n_\uparrow)/v_F$. Поэтому в слабом магнитном поле $\omega_B \ll E_F$, когда $n_\downarrow - n_\uparrow \ll n_{\text{tot}}$, в числителе (8.86) можно сделать замену:

$$n_\downarrow(\mathbf{p}_-) - n_\uparrow(\mathbf{p}_+) \;\longrightarrow\; \Delta n\,\delta(|\mathbf{p}|/p_0 - 1)\,, \tag{8.90}$$

где $\Delta n = n_\downarrow - n_\uparrow$. Интеграл по поверхности ферми-сферы легко вычисляется:

$$\Pi_{\uparrow\downarrow}(\omega,\mathbf{k}) = \frac{\Delta n}{2}\int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{\tilde{\omega} - kv_F\cos\theta} = \frac{\Delta n}{2kv_F}\ln\frac{\tilde{\omega} + kv_F}{\tilde{\omega} - kv_F}\,, \tag{8.91}$$

где $\tilde{\omega} = \omega - 2\omega_B - g\Delta n$.

Полюс $\chi_\perp(\omega, \mathbf{k})$ определяется уравнением $g\Pi_{\uparrow\downarrow}(\omega, \mathbf{k}) = -1$, решение которого в данном случае нетрудно выписать в явной форме:

$$\omega(\mathbf{k}) = 2\omega_B + g\Delta n - kv_F \,\mathrm{cth}\, u\,, \qquad u = kv_F/(g\Delta n)\,. \tag{8.92}$$

Закон дисперсии спиновых волн (8.92) обладает следующими свойствами: при $u \ll 1$

$$\omega(\mathbf{k}) = 2\omega_B - \mathbf{k}^2 v_F^2/(3g\Delta n)\,, \tag{8.93}$$

gри $u \gg 1$ выражение (8.92) стремится к $2\omega_B + g\Delta n - kv_F$. При этом частота $\omega(\mathbf{k})$ вещественна для всех u, т. е. затухание отсутствует.

Описанное поведение при больших u определяется сингулярностью выражения (8.91) при $\tilde{\omega} = -kv_F$. Как мы убедились в задаче 44 б, эта сингулярность есть следствие принятого приближения (8.90), сводящего интегрирование в (8.86) по тонкому трехмерному слою к интегралу по двумерной ферми-поверхности. На самом же деле поляризационный оператор (8.86) на границе квазичастичного спектра, т. е. при $\tilde{\omega} = \pm kv_F$, принимает конечное значение. По тем же причинам, что и в задаче 44 б, логарифмическую сингулярность в (8.91) следует обрезать при $|\tilde{\omega} \pm kv_F| \approx k^2/2m$.

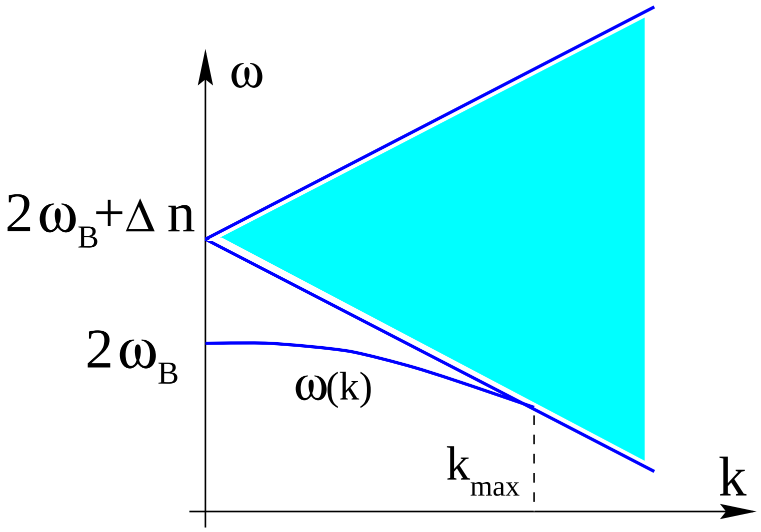


Рис. 8.9

В результате уравнение $g\Pi_{\uparrow\downarrow}(\omega, \mathbf{k}) = -1$, дающее закон дисперсии спиновых волн, имеет решение только при k меньших некоторого $k_{\max}$. Точка окончания закона дисперсии $k_{\max}$ находится из уравнения

$$\frac{g\Delta n}{2kv_F} \ln \frac{p_0}{k} = 1\,. \tag{8.94}$$

С логарифмической точностью $k_{\max} = (g\Delta n/2v_F) \ln{(E_F/g\Delta n)}$. При $k > k_{\max}$ частота спиновых волн оказывается внутри квазичастичного континуума $|\tilde{\omega}| < v_F|k|$

(рис. 8.9). Спиновые волны с такими k характеризуются конечным временем затухания, т. е. комплексной частотой $\omega(\mathbf{k})$.

48 а. Вычислим обменную энергию[10], даваемую второй диаграммой на рис. 8.6. Соответствующее выражение для плотности термодинамического потенциала на единицу объема в мацубаровской технике равно

$$\Delta\Omega_{\text{обм}} = -\frac{1}{2}T^2 \lim_{\tau_{1,2}\to+0} \sum_{\varepsilon_{1,2},\,p_{1,2}} G(i\varepsilon_1,\,\mathbf{p}_1)G(i\varepsilon_2,\,\mathbf{p}_2)\,V_{\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2}\,e^{i\varepsilon_1\tau_1+i\varepsilon_2\tau_2}\,, \tag{8.95}$$

где $G(i\varepsilon,\mathbf{p}) = 1/(i\varepsilon-\xi_\mathbf{p})$ — функция Грина электронов, а $V_\mathbf{k} = 4\pi e^2/\mathbf{k}^2$ — фурье-компонента потенциала взаимодействия.

Отметим, что при выписывании выражения (8.95) имеется следующая тонкость. Поскольку взаимодействие в (8.1) считается мгновенным, в аналитических выражениях для диаграмм на рис. 8.6 возникает функция Грина, взятая при совпадающих временах. Но $G(\mathbf{r},\tau)$ имеет скачок при $\tau=0$, и из-за этого выражения оказываются формально неопределенными. Эта трудность обычно преодолевается следующим образом. Оператор взаимодействия (8.1) содержит нормально упорядоченное произведение ψ-операторов, в котором $\widehat{\psi}$ всегда стоит правее $\widehat{\psi}^+$, поэтому функцию Грина с совпадающими временами следует понимать как

$$G(\mathbf{r},\,0) \equiv \lim_{\tau\to+0} G(\mathbf{r},\,-\tau)\,. \tag{8.96}$$

Это соглашение и использовано в (8.95).

Суммирования по ε_1 и ε_2 в (8.95) оказываются независимыми. Воспользовавшись выражением

$$T\lim_{\tau\to+0}\sum_{\varepsilon_1} G(i\varepsilon_1,\,\mathbf{p})\,e^{i\varepsilon_1\tau} = n_F(\xi_\mathbf{p}) \tag{8.97}$$

(см. формулу (7.59) в решении задачи 35), получаем

$$\Delta\Omega_{\text{обм}} = -\int n_F(\xi_{\mathbf{p}_1})\,n_F(\xi_{\mathbf{p}_2})\,V_{\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2}\,\frac{d^3p_1\,d^3p_2}{(2\pi)^6} \tag{8.98}$$

(множитель $1/2$ исчез при суммировании по спину).

Теперь удобно перейти в координатное представление. Подставляя в (8.98) $V_{\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2} = \int V(\mathbf{r})e^{i(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)\mathbf{r}}d^3r$, получаем

$$\Delta\Omega_{\text{обм}} = -\int V(\mathbf{r})\,|I(\mathbf{r})|^2 d^3r\,, \quad \text{где } I(\mathbf{r}) = \int n_F(\xi_\mathbf{p})\,e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,. \tag{8.99}$$

Рассмотрим случай $T=0$. Интеграл $I(\mathbf{r})$ легко вычисляется:

$$I(\mathbf{r}) = \int\limits_{|\mathbf{p}|<p_0} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}\,\frac{d^3p}{(2\pi)^3} = \int\limits_0^{p_0}\frac{\sin pr}{pr}\frac{4\pi p^2\,dp}{(2\pi)^3} = \frac{\sin p_0 r - p_0 r\cos p_0 r}{2\pi^2\,r^3}\,. \tag{8.100}$$

[10]Нетрудно убедиться в том, что энергия Хартри, даваемая первой диаграммой на рис. 8.6, в модели желе точно сокращается при учете взаимодействия с однородным компенсирующим положительным фоновым зарядом. Мы не будем на этом останавливаться.

Отсюда обменная энергия (8.99) есть

$$\Delta\Omega_{\text{обм}} = -\frac{e^2}{4\pi^4}\int\limits_0^\infty \frac{\Big(\sin p_0 r - p_0 r\cos p_0 r\Big)^2}{r^7}\,4\pi\, r^2\, dr\,. \tag{8.101}$$

Путем трехкратного интегрирования по частям получаем

$$\Delta\Omega_{\text{обм}} = -e^2 p_0^4/(4\pi^3) = -e^2\,(3\pi^2 n)^{4/3}/(4\pi^3)\,. \tag{8.102}$$

Мы видим, что из-за достаточно быстрого убывания функции $I(\mathbf{r})$ обменная энергия определяется масштабом $|\mathbf{r}| \approx p_0^{-1}$ порядка характерного расстояния между электронами. Это можно понять качественно, заметив, что только при сближении электронов на расстояние $r \leqslant p_0^{-1}$ их волновые функции начинают перекрываться, и эффекты неразличимости частиц становятся важны. Таким образом, обменная энергия на один электрон оказывается порядка $e^2 p_0$.

Интересно отметить, что масштаб p_0^{-1}, определяющий обменные эффекты, при $e^2/\hbar v_F \ll 1$ оказывается много меньше длины кулоновского экранирования $\varkappa^{-1}$, которая определяет корреляционную энергию (см. задачу 49). Поэтому говорят, что обменное взаимодействие *локально.*

Отрицательный знак $\Delta\Omega_{\text{обм}}$ тоже нетрудно понять. В силу принципа Паули, электроны избегают друг друга на расстояниях $r \leqslant p_0^{-1}$, в результате чего энергия кулоновского отталкивания уменьшается.

48 б. Рассмотрим вклады второго порядка по $e^2/\hbar v_F$, соответствующие диаграммам на рис. 8.7. Им соответствуют такие выражения:

$$\Delta\Omega^{(a)}_{\text{корр}} = T^3 \sum_{\varepsilon,\varepsilon',\omega}\int G(i\varepsilon,\,\mathbf{k})\,G(i\varepsilon'+\omega,\,\mathbf{k}+\mathbf{q})\times$$
$$\times\, G(i\varepsilon',\,\mathbf{k}')\,G(i\varepsilon'-\omega,\,\mathbf{k}'-\mathbf{q})\,V_{\mathbf{q}}^2\,\frac{d^3k\,d^3k'\,d^3q}{(2\pi)^9},\ ; \tag{8.103}$$

$$\Delta\Omega^{(b)}_{\text{корр}} = -\frac{1}{2}T^3 \sum_{\varepsilon,\varepsilon',\omega}\int G(i\varepsilon,\,\mathbf{k})\,G(i\varepsilon+\omega,\,\mathbf{k}+\mathbf{q})\times$$
$$\times\, G(i\varepsilon',\,\mathbf{k}')\,G(i\varepsilon'-\omega,\,\mathbf{k}'-\mathbf{q})\,V_{\mathbf{q}}\,V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'+\mathbf{q}}\,\frac{d^3k\,d^3k'\,d^3q}{(2\pi)^9}\,. \tag{8.104}$$

Принятые обозначения показаны на рис. 8.10. Знаки диаграмм *a)* и *b)* отличаются из-за разного числа фермионных петель, а коэффициенты — из-за того, что в диаграмме *a* суммирование по спину происходит два раза, а в диаграмме *b* — один раз.

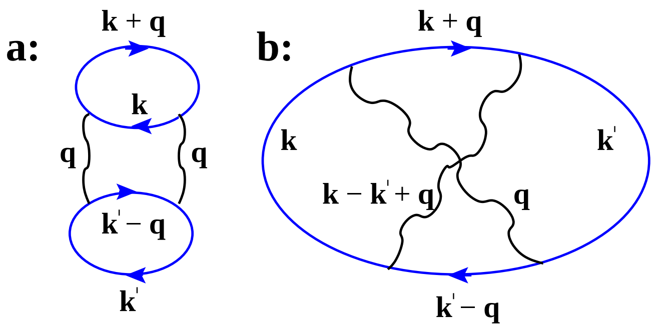


Рис. 8.10

Импульсы на рис. 8.10 выбраны таким образом, чтобы было удобно объединить вклады a и b. Суммирование по ε и ε' выполняется с помощью тождества (7.85). В результате приходим к такому выражению для $\Delta\Omega_{\text{кор}}^{(a)+(b)}$:

$$\Delta\Omega_{\text{кор}}^{(a)+(b)} = \frac{T}{2}\sum_{\omega}\int \frac{n_F(\xi_{\mathbf{k}}) - n_F(\xi_{\mathbf{k+q}})}{i\omega - \xi_{\mathbf{k}} + \xi_{\mathbf{k+q}}} \cdot \frac{n_F(\xi_{\mathbf{k}'}) - n_F(\xi_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}})}{-i\omega - \xi_{\mathbf{k}'} - \xi_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}} \times \\ \times \left(2V_{\mathbf{q}}^2 - V_{\mathbf{q}} V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'+\mathbf{q}}\right) \frac{d^3k\, d^3k'\, d^3q}{(2\pi)^9}\,, \tag{8.105}$$

где первый член в скобках соответствует диаграмме *a)*, а второй — диаграмме *b)*. Нас интересует случай нулевой температуры. Поэтому заменим суммирование по ω интегрированием. При этом

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi(i\omega - \xi)(-i\omega - \xi')} = \frac{\theta(\xi') - \theta(-\xi)}{\xi + \xi'}\,. \tag{8.106}$$

Получаем

$$\Delta\Omega_{\text{кор}}^{(a)+(b)} = \frac{1}{2}\int \Big(n_F(\xi_{\mathbf{k}}) - n_F(\xi_{\mathbf{k+q}})\Big)\Big(n_F(\xi_{\mathbf{k}'}) - n_F(\xi_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}})\Big) \times \\ \times \frac{\theta(\xi_{\mathbf{k}'} - \xi_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}) - \theta(\xi_{\mathbf{k+q}} - \xi_{\mathbf{k}})}{\xi_{\mathbf{k}} - \xi_{\mathbf{k+q}} + \xi_{\mathbf{k}'} - \xi_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}} \left(2V_{\mathbf{q}}^2 - V_{\mathbf{q}} V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'+\mathbf{q}}\right) \frac{d^3k\, d^3k'\, d^3q}{(2\pi)^9}\,. \tag{8.107}$$

Проанализируем область интегрирования в (8.107). Одна из двух θ-функций в этом выражении должна быть равна 1, а другая — 0. Пусть от нуля отлична первая θ-функция. Тогда, поскольку в (8.107) входит также множитель $n_F(\xi_{\mathbf{k}'}) - n_F(\xi_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}})$, то $|\mathbf{k}'| > p_0$, а $|\mathbf{k}' - \mathbf{q}| < p_0$. Аналогично получаем $|\mathbf{k}| < p_0$, $|\mathbf{k} + \mathbf{q}| > p_0$. Если же от нуля отлична другая θ-функция, то ответ получается заменой $\mathbf{k} \to \mathbf{k}'$, $\mathbf{q} \to -\mathbf{q}$. Поскольку выражение симметрично относительно этой замены, достаточно просто удвоить ответ. Поэтому

$$\Delta\Omega_{\text{кор}}^{(a)+(b)} = \iiint \frac{\left(2V_{\mathbf{q}}^2 - V_{\mathbf{q}} V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'+\mathbf{q}}\right)}{(\xi_{\mathbf{k}} - \xi_{\mathbf{k+q}} + \xi_{\mathbf{k}'} - \xi_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}})} \frac{d^3k\, d^3k'\, d^3q}{(2\pi)^9} \tag{8.108}$$

(интеграл берется по области $\mathbf{k} \in R_q$, $\mathbf{k}' - \mathbf{q} \in R_q$). Это выражение совпадает с (8.33).

Отметим, что формулу (8.33) можно получить и без диаграмм, вычисляя энергию основного состояния ферми-системы по обычной квантовомеханической теории возмущений до членов второго порядка (см. [6], § 6).

Теперь рассмотрим поведение подинтегрального выражения в (8.108) при $\mathbf{q} \to 0$. Области интегрирования по $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$ представляют собой в этом случае слои толщины порядка q на поверхности ферми-сферы (см. рис. 8.1). С другой стороны, знаменатель при этом оказывается порядка qv_F. Поэтому первый член оказывается порядка q^{-3}, а второй — порядка q^{-1}. В результате оказывается, что при интегрировании по q первый член дает логарифмическую расходимость на малых q, а второй остается конечен.

Чтобы понять причину найденной расходимости, рассмотрим физический смысл диаграмм на рис. 8.7. Поляризационные петли на диаграмме *а* — это коррелятор плотность–плотность. Поэтому эта диаграмма описывает вклад взаимодействия флуктуаций плотности в энергию системы. Ее расходимость при $q = 0$ означает, что основной вклад дают флуктуации плотности в далеких точках. Но подсчитывать взаимодействие флуктуаций в точках, расположенных на расстоянии, большем радиуса экранирования, используя незаэкранированный потенциал $1/r$ (как это и происходит в (8.108)), совершенно неправильно. Можно ожидать, что при правильном учете экранирования логарифмическая расходимость обрежется на обратном радиусе экранирования, $q \approx \varkappa$.

Что же касается диаграммы *б*, она описывает обменный эффект второго порядка. Как и все обменные эффекты, этот вклад в энергию определяется расстояниями порядка фермиевской длины волны $1/p_0$, и потому в нем не возникает расходимости на малых q.

49 а. Расходимость в диаграмме *а* на рис. 8.7, найденная в задаче 48, требует осторожности. В рамках теории возмущений обрезать эту расходимость негде, и поэтому возникает необходимость суммировать диаграммы высших порядков. С физической точки зрения, требуется корректно учесть экранирование (см. решение задачи 48 б). Это достигается суммированием «пузырьковых» диаграмм, показанных на рис. 8.8.

Оценим эти диаграммы по порядку величины. Произведение n волнистых линий зависит от передаваемого импульса q как q^{-2n} и не зависит от передаваемой частоты ω (q и ω одинаковы для всех линий). Поляризационная петля $\Pi(i\omega, \mathbf{q}) \approx \nu$ при $\omega \leqslant qv_F$ и убывает при $\omega > qv_F$. Интегрирование по $0 < \omega \leqslant qv_F$ дает qv_F, и в результате диаграмма $n-$го порядка расходится при малых q как $\int_0^{p_0} (q^2/q^{2n-1}) dq$. Чем выше n, тем сингулярней диаграмма. При $n = 2$ расходимость логарифмическая, в соответствии с решением задачи 48 б. Из сделанной оценки видно, что кольцевые диаграммы, изображенные на рис. 8.8, обеспечивают максимальную расходимость в каждом порядке теории возмущений. Уже само по себе, и без аппеляций к физике экранирования, это дает достаточные основания для рассмотрения ряда на рис. 8.8.

Просуммируем последовательность кольцевых диаграмм. Для этого, как обычно, продифференцируем термодинамический потенциал по константе связи e^2. Это устраняет множители $1/n$ перед диаграммами, после чего ряд суммируется, как геометрическая прогрессия. Выражение, которое при этом получается, есть произведение $\Pi(i\omega, \mathbf{q})$ и заэкранированного взаимодействия $V_{i\omega,\mathbf{q}}$, из которого вычтено затравочное взаимодействие $V_\mathbf{q}$ (потому что ряд начинается с $n = 2$). Таким образом,

$$e^2 \frac{\partial}{\partial e^2} \Omega_{\text{кор}} = -\frac{1}{2} T \sum_\omega \int \Pi(i\omega, \mathbf{q}) \left(V_{i\omega,\mathbf{q}} - V_\mathbf{q} \right) \frac{d^3q}{(2\pi)^3} . \tag{8.109}$$

Согласно задаче 44, заэкранированное взаимодействие есть (8.42). Что касается поляризационного оператора $\Pi(i\omega, \mathbf{q})$, то аналитическое продолжение формулы (8.47) дает

$$\Pi(i\omega,\, \mathbf{q}) = -\nu \left(1 - \frac{\omega}{qv_F} \operatorname{arctg} \frac{qv_F}{\omega} \right) . \tag{8.110}$$

Заменяя при $T = 0$ суммирование по ω интегрированием, и подставляя $V_{i\omega,\mathbf{q}}$ из (8.42), приводим (8.109) к виду

$$e^2 \frac{\partial}{\partial e^2} \Omega_{\text{кор}} = -\frac{1}{2} \int \frac{\Pi^2(i\omega, \mathbf{q})\, V_\mathbf{q}^2}{1 - \Pi(i\omega, \mathbf{q})\, V_\mathbf{q}} \frac{d\omega\, d^3q}{(2\pi)^4} . \tag{8.111}$$

Удобно ввести $s = \omega/qv_F$ и обозначить $\Pi(i\omega, \mathbf{q}) = -\nu P(s)$. Получаем

$$\begin{aligned} e^2 \frac{\partial}{\partial e^2} \Omega_{\text{кор}} &= -\int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(4\pi e^2\right)^2\ \nu^2\, P^2(s)}{q^2(q^2 + \varkappa^2 P(s))} \frac{qv_F\, ds}{2\pi} \frac{4\pi\, q^2\, dq}{(2\pi)^3} = \\ &= -\frac{\varkappa^4 v_F}{4\pi^3} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{P^2(s)}{q^2 + \varkappa^2 P(s)}\, ds\, qdq , \end{aligned} \tag{8.112}$$

где $\varkappa^2 = 4\pi e^2 \nu$. Интегрируем по q, обрезая интеграл сверху на p_0:

$$e^2 \frac{\partial}{\partial e^2} \Omega_{\text{кор}} = -\frac{\varkappa^4 v_F}{8\pi^3} \int_0^\infty \ln \frac{p_0^2}{\varkappa^2\, P(s)}\, P^2(s) ds \approx -\frac{\varkappa^4 v_F}{4\pi^3} \ln \frac{p_0}{\varkappa} \int_0^\infty P^2(s)\, ds \tag{8.113}$$

(последний шаг верен с логарифмической точностью, поскольку $p_0^2/\varkappa^2 = (\pi/4)\hbar v_F/e^2 \gg 1$). Интеграл

$$J = \int_0^\infty P^2(s)\, ds \tag{8.114}$$

удобно вычислить с помощью следующего представления $P(s)$, которое следует из определения поляризационного оператора:

$$P(s) = \int_0^1 \frac{x^2}{s^2 + x^2}\, dx = 1 - s \operatorname{arctg}(1/s) . \tag{8.115}$$

Интегрируем:

$$J = \int_0^\infty \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2\, y^2}{(s^2+x^2)\,(s^2+y^2)}\, dx\, dy\, ds = \pi \int_0^1 \int_0^1 \frac{xy}{x+y}\, dx\, dy =$$
$$= \frac{\pi}{2} \int_0^1 x\, dx\, \left[1 - x \ln \frac{x+1}{x}\right] = \frac{\pi(1-\ln 2)}{3}\,. \tag{8.116}$$

Учитывая соотношение $\varkappa^2 = 4\pi e^2 \nu$ и интегрируя по e^2, получаем окончательный ответ:

$$\Omega_{\text{кор}} = -\frac{1-\ln 2}{24\pi^2}\, \varkappa^4\, v_F \ln \frac{p_0}{\varkappa} \tag{8.117}$$

Таким образом, просуммировав кольцевые диаграммы, мы действительно получили конечную корреляционную энергию. При этом логарифмическая расходимость, найденная во втором порядке теории возмущений, автоматически обрезалась на обратном радиусе экранирования, $q \approx \varkappa$.

49 б. Найдем энергию взаимодействия, представив ее как энергию нулевых колебаний осцилляторов электрон-дырочных пар. Воспользуемся формулой

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{\omega^2+\omega_1^2}{\omega^2+\omega_2^2} \frac{d\omega}{4\pi} = \frac{\omega_1}{2} - \frac{\omega_2}{2}\,, \tag{8.118}$$

которую нетрудно проверить интегрированием по частям. Применим ее к операторам

$$\widehat{\mathcal{A}} = \sum_{\mathbf{k};\ \mathbf{p}\in R_k} \omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}^2 \varphi_{\mathbf{p},\mathbf{k}}^+ \varphi_{\mathbf{p},\mathbf{k}}\,, \quad \widehat{\mathcal{B}} = 2\sum_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}} \left(\sum_{\mathbf{p}\in R_k} \omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}^{1/2} \varphi_{\mathbf{p},\mathbf{k}}^+\right) \left(\sum_{\mathbf{p}'\in R_k} \omega_{\mathbf{p}',\mathbf{k}}^{1/2} \varphi_{\mathbf{p},\mathbf{k}}\right)\,, \tag{8.119}$$

сумма которых есть удвоеннная «потенциальная энергия» осцилляторов, описываемых гамильтонианом $\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{\text{int}}$ (см. (8.23) и (8.24). Получаем

$$\Delta E = \operatorname{Tr} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left[\left(\omega^2 + \widehat{\mathcal{A}} + \widehat{\mathcal{B}}\right) \left(\omega^2 + \widehat{\mathcal{A}}\right)^{-1}\right] \frac{d\omega}{4\pi}\,. \tag{8.120}$$

Разложим это выражение в ряд:

$$\Delta E = \sum_{\omega>0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \operatorname{Tr}\left(\widehat{\mathcal{B}}(\omega^2+\widehat{\mathcal{A}})^{-1}\right)^n\,. \tag{8.121}$$

Вычисляя след, находим

$$\Delta E = \sum_{\omega>0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{\mathbf{k}} \left(V_{\mathbf{k}} \left(\sum_{p\in R_k} \frac{4\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}}{\omega^2+\omega_{\mathbf{p},\mathbf{k}}^2}\right)\right)^n = \tag{8.122}$$
$$= \sum_{\omega>0} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(-V_{\mathbf{k}} \Pi(\omega,\mathbf{k})\right)^n = \int\!\!\int \ln\left(1 - V_{\mathbf{k}}\Pi(\omega,\mathbf{k})\right) \frac{d\omega\, d^3k}{2(2\pi)^4}\,.$$

Чтобы установить соответствие с вычислением обменной и корреляционной энергий в задачах 48 и 49 а, заметим следующее. Первый член формального разложения логарифма в выражении (8.122) в ряд по степеням $V_{\mathbf{k}}$ дает не что иное, как обменную энергию, вычисленную в задаче 48 а. В этот первый член $V_{\mathbf{k}}$ входит в первой степени, что дает сходящийся при малых k интеграл. Нетрудно убедиться, что если вычесть из (8.122) обменную энергию (в силу сходимости интеграла, такое вычитание — корректная процедура), то получившееся выражение при дифференцировании по e^2 дает выражение (8.111), определяющее корреляционную энергию. Поэтому выражение (8.122) есть сумма обменной и корреляционной энергий.

Результат (8.122), выведенный при $T=0$, нетрудно обобщить на случай конечной температуры. Это делается по аналогии с задачей 35, где была получена связь между термодинамическим потенциалом и функцией Грина ферми-частиц. В результате получается выражение, подобное (8.122), в котором интегрирование $\int \ldots d\omega/2\pi$ заменено суммированием $T\sum_n \ldots$ по $\omega_n = 2\pi nT$.

49 в. Рассмотрим корреляционную энергию невырожденной плазмы. Можно воспользоваться формулой (8.109), оставляя в ней лишь член с $\omega=0$:

$$e^2\frac{\partial}{\partial e^2}\Omega_{\text{кор}} = -\frac{T}{2}\int \frac{V_{\mathbf{q}}^2\,\Pi^2(\mathbf{q})_{\omega=0}}{1-V_{\mathbf{q}}\Pi(\mathbf{q})_{\omega=0}}\,\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\,. \tag{8.123}$$

Величина $\Pi(\mathbf{q})_{\omega=0}$ при малом $|\mathbf{q}| \ll p_0$ есть

$$\Pi(\mathbf{q}\to 0)_{\omega=0} = \int \frac{n_F(\xi_{\mathbf{p}}) - n_F(\xi_{\mathbf{p+q}})}{\xi_{\mathbf{p}} - \xi_{\mathbf{p+q}}}\,\frac{2\,d^3p}{(2\pi)^3} \approx \int \frac{\partial n_F(\xi_{\mathbf{p}})}{\partial \xi_{\mathbf{p}}}\,\frac{2\,d^3p}{(2\pi)^3} \tag{8.124}$$

(мы использовали тождество (7.85)). Поскольку нас интересуют большие температуры ($T \gg E_F$), можно заменить распределение Ферми распределением Больцмана, для которого $\partial n_B(\xi)/\partial\xi = -n_B(\xi)/T$. Поэтому

$$\Pi_{\omega=0}(\mathbf{q}\to 0) = -n/T\,, \tag{8.125}$$

где n — плотность частиц. Отсюда

$$\mathcal{V}_{\mathbf{q}} = \frac{V_{\mathbf{q}}}{1 - V_{\mathbf{q}}\,\Pi(\mathbf{q}\to 0)_{\omega=0}} = \frac{4\pi e^2}{\mathbf{q}^2 + \varkappa^2}\,, \tag{8.126}$$

где $\varkappa^2 = 4\pi e^2 n/T$ — классический дебаевский радиус экранирования. В результате

$$e^2\frac{\partial}{\partial e^2}\Omega_{\text{кор}} = -\frac{T}{2}\int \frac{\varkappa^4}{q^2\,(q^2+\varkappa^2)} = -\frac{T\varkappa^3}{8\pi}\,\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\,. \tag{8.127}$$

Интегрируя по e^2, получаем

$$\Omega_{\text{кор}} = -T\varkappa^3/(12\pi)\,, \tag{8.128}$$

что совпадает с результатом, известным для классической плазмы (см. [5] § 78).

Обратим внимание на неаналитическую зависимость выражений (8.117) и (8.128) от e^2. При $T=0$ корреляционная энергия пропорциональна $e^4\ln e^2$, а при $T \gg E_F$ выражение (8.128) дает $\Omega_{\text{кор}} \sim e^3$.

8.6. Энергия взаимодействия в металле. Вигнеровский кристалл

Рассмотрим энергию основного состояния электронов в металле, используя модель желе. В пределе высокой плотности электронов n система будет почти идеальным ферми-газом с ферми-жидкостными поправками, малыми по параметру $e^2/\hbar v_F \ll 1$ Наиболее существенной энергией в этом случае будет кинетическая энергия, величина которой порядка $p_0^2/2m$ на частицу. Это дает термодинамический потенциал на единицу объема $\Omega_{\text{кин}} \sim n^{5/3}$.

Поправки первого порядка по межэлектронному взаимодействию были найдены в задаче 48 а. Энергия Хартри в модели желе равна нулю из-за компенсации взаимодействия электронов с положительным фоном. Обменная же энергия $\Omega_{\text{обм}}$ отлична от нуля и отрицательна. Как нетрудно видеть, сумма кинетической и обменной энергий $\Omega_{\text{кин}} + \Omega_{\text{обм}}$ есть просто среднее $\langle \widehat{\mathcal{H}}_0 + \widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}} \rangle$ от гамильтониана (8.1), взятое по основному состоянию идеального ферми-газа, т. е. по слэтеровскому детерминанту, построенному из плоских волн с $|\mathbf{p}| < p_0$.

Поправки второго порядка и выше по $e^2/\hbar v_F$, рассмотренные в задачах 48 б и 49, учитывают изменение основного состояния благодаря взаимодействию. Эти поправки принимают во внимание изменение корреляций взаимного расположения электронов по сравнению с идеальным ферми-газом. Поэтому соответствующий вклад в энергию системы называют *корреляционной энергией*. Согласно задачам 48, 49, обменная и корреляционная энергии отрицательны и зависят от заряда e и плотности n так: $\Omega_{\text{обм}} \sim -e^2 n^{4/3}$, $\Omega_{\text{кор}} \sim -e^4 n \ln(n^{1/3}/e^2)$.

Интересно, что корреляционная энергия имеет неаналитическую зависимость от параметра теории возмущений $e^2/\hbar v_F$. Поэтому формальное разложение $\Omega_{\text{кор}}$ по целым степеням $e^2/\hbar v_F$ не имеет смысла. В этом и состоит причина того, что, как мы убедились в задаче 48 б, в ряду теории возмущений появляются расходимости.

Здесь уместно отметить, что для отсутствия аналитичности термодинамического потенциала Ω как функции константы связи e^2 при малых e имеются весьма общие основания. Действительно, если бы аналитичность имела место в некоторой окрестности $e = 0$, то выражение для термодинамического потенциала, полученное при $e^2 > 0$, было бы применимо и к системе с $e^2 < 0$, т. е. с притяжением между частицами. А в ней, как известно, возникает куперовское спаривание и происходит перестройка основного состояния. Отметим аналогию с квантовой электродинамикой, в которой с помощью сходного рассуждения доказывается (Дайсон, 1952), что любая физическая величина, как функция e^2, имеет особенность при $e = 0$ (см. [4], гл. 1, § 3).

Рассмотрим теперь, как меняется состояние металлической системы при изменении плотности. Зависимость кинетической и обменной энергии от плотности такова, что при высокой плотности $\Omega_{\text{обм}}$ пренебрежимо мала по сравнению с $\Omega_{\text{кин}}$. Однако при уменьшении плотности взаимодействие начинает давать основной вклад в энергию. При этом, поскольку $\Omega_{\text{обм}}$ отрицательно, состояние с однородной плотностью становится неустойчиво по отношению к возникновению неоднородностей, и жидкость превращается в кристалл (Вигнер, 1934).

Сравним энергии кристалла и ферми-жидкости. Рассмотрим кристаллическое состояние, в котором волновые функции электронов локализованы вблизи узлов некоторой решетки. Для конкретности будем говорить о кубической решетке с периодом $a = n^{-1/3}$. Убедимся в том, что кинетическая энергия, оцениваемая как энергия нулевых колебаний, будет выше, чем в однородной системе с той же плотностью, а потенциальная — ниже. Поскольку при низкой плотности потенциальная энергия важнее кинетической, кристалл оказывается более выгодным состоянием, чем жидкость.

Начнем с того, что оценим изменение кулоновской энергии. При образовании кристалла она понижается, поскольку в жидкости электроны могут находиться ближе друг к другу, чем в кристалле при той же плотности. Уменьшение потенциальной энергии на один электрон будет порядка энергии взаимодействия соседей:

$$E_{\text{пот}}^{(\text{кр})} - E_{\text{пот}}^{(\text{ж})} \approx -e^2/a = -e^2 n^{1/3}\,. \tag{8.129}$$

Теперь займемся кинетической энергией электронного кристалла. Электрон совершает нулевые колебания около одного из узлов решетки. Причем когда электрон находится точно в узле, кулоновские силы, действующие на него со стороны других электронов, в точности компенсируются. При отклонении же от узла на небольшое расстояние, из-за нескомпенсированного кулоновского отталкивания от соседей появляется возвращающая сила. При смещении x возвращающая сила будет порядка $e^2/(a-x)^2 - e^2/(a+x)^2 \approx e^2 x/a^3$. Записав ее как $m\omega^2 x$, получим частоту колебаний электрона и радиус локализации волновой функции:

$$\omega \approx \left(\frac{e^2}{ma^3}\right)^{1/2}, \quad r_0 \approx \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{1/2} \approx a\,\left(\frac{e^2}{\hbar v_F^{(0)}}\right)^{-1/4}, \tag{8.130}$$

где $v_F^{(0)}$ — скорость Ферми в идеальном ферми-газе данной плотности. Оценим энергию нулевых колебаний на один электрон:

$$E_{\text{кин}}^{(\text{кр})} \approx \frac{\hbar\omega}{2} \approx \left(\frac{e^2}{\hbar v_F^{(0)}}\right)^{-1/2} \frac{e^2}{a} \approx \left(\frac{e^2}{\hbar v_F^{(0)}}\right)^{1/2} E_{\text{кин}}^{(\text{ж})}, \tag{8.131}$$

где $E_{\text{кин}}^{(\text{ж})} \approx \hbar^2/(2ma^2)$.

Сделанные оценки показывают, что в пределе низкой плотности, т. е. при $e^2/\hbar v_F^{(0)} \gg 1$, имеют место такие неравенства:

$$E_{\text{кин}}^{(\text{ж})} \ll E_{\text{кин}}^{(\text{кр})} \ll \left(E_{\text{пот}}^{(\text{ж})} - E_{\text{пот}}^{(\text{кр})}\right). \tag{8.132}$$

Это означает, что образование кристалла энергетически выгодно. Отметим, что для применимости сделанных оценок требуется, чтобы электронные состояния были хорошо локализованы вблизи узлов. Но, как мы видели, $r_0 \ll a$ при $e^2/\hbar v_F^{(0)} \gg 1$, что подтверждает корректность наших рассуждений.

Итак, при переходе в состояние вигнеровского кристалла кинетическая энергия увеличивается, а потенциальная уменьшается. Поэтому при высокой плотности такое состояние невыгодно, а при низкой — выгодно.

8.7. Микроскопическое обоснование теории ферми-жидкости

Диаграммная техника позволяет обосновать теорию ферми-жидкости весьма общим образом, а также установить границы ее применимости. Такой квантово-полевой подход к проблеме ферми-жидкости весьма полезен, поскольку он дает возможность использовать идеи и результаты этой теории в сильно взаимодействующей системе. В этом состоит преимущество по сравнению, скажем, с рассмотренным в разд. 8.3 гамильтоновым методом, в котором предполагается, что взаимодействие слабое. Кроме того, гамильтонов метод опирается на несколько эвристическое по своему характеру приближение случайных фаз, в то время как квантово-полевой подход является совершенно строгим.

Микроскопической теории ферми-жидкости уделено большое внимание в литературе (см. [1, 6, 4]), поэтому здесь мы ограничимся кратким перечислением основных результатов. Предполагается, что особенности одночастичной функции Грина, как функции энергии, качественно такие же, как для идеального ферми-газа. А именно, $G(\varepsilon, \mathbf{p})$ имеет простой полюс при $\varepsilon = \xi(\mathbf{p})$, где закон дисперсии квазичастиц $\xi(\mathbf{p})$ определяется самосогласованно через уравнение Дайсона. Показывается, что вычет a в полюсе

$$G(\varepsilon, \mathbf{p}) \approx \frac{a}{\varepsilon - \xi(\mathbf{p}) + i0 \operatorname{sign} \xi} \tag{8.133}$$

удовлетворяет условию $0 < a < 1$. Величина a имеет смысл спектрального веса квазичастицы в одночастичной функции Грина (ср. с (4.14) в гл.4). Единственной величиной, которая не перенормируется взаимодействием, оказывается импульс Ферми, выражающийся через плотность: $p_0 = (3\pi^2 n)^{1/3}$.

Оказывается возможным выяснить, какие диаграммы описывают динамику квазичастиц, и проследить связь с кинетическим уравнением ферми-жидкости. Для этого следует рассмотреть двухчастичные функции Грина и выделить в них вклады, соответствующие электрон-дырочным парам вблизи уровня Ферми. Следуя традиции, будем говорить о двухчастичной амплитуде рассеяния, имея при этом в виду, что другие двухчастичные функции рассматриваются аналогично.

Амплитуда рассеяния Γ есть, как обычно, сумма всех фейнмановских диаграмм с четырьмя концами. Она зависит обычным образом от входящих и выходящих импульсов, а также спинов. Выделим из диаграммного ряда все вклады с определенным количеством двухчастичных сечений, и пересуммируем ряд, как при выводе уравнения Бете–Солпитера (4.20). Для этого требуется использовать так называемую неприводимую вершину $\Gamma^{(0)}$, не содержащую двухчастичных сечений. Пересуммированный ряд для амплитуды Γ изображается графически, как показано на рис. 8.11, где неприводимая вершина $\Gamma^{(0)}$ обозначена заштрихованным кружком.

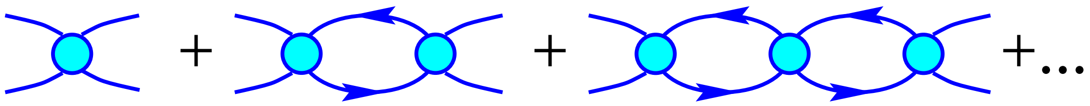


Рис. 8.11

Отметим, что при этом предполагается, что суммарные импульс $\mathbf{k}$ и частота ω в двухчастичных сечениях малы по сравнению с p_0 и E_F, соответственно. Именно это ограничение на $\mathbf{k}$ и ω позволяет ограничиться лестничными диаграммами, изображенными на рис. 8.11.

Полученный ряд сводится к интегральному уравнению почти так же, как при выводе уравнения Бете–Солпитера (4.20). Разница состоит только в том, что надо пользоваться причинными функциями Грина, а не запаздывающими. В результате получается уравнение вида

$$\Gamma(p_1, p_2;\, k) = \Gamma^{(0)}(p_1, p_2;\, k) - i \int \Gamma^{(0)}(p_1, q;\, k)\, \Gamma(q, p_2;\, k)\, G(q)\, G(q+k)\, \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}\,, \quad (8.134)$$

где $p_{1,2}$ — импульсы входящих частиц, а k — передача импульса. Мы для простоты опустили все спиновые индексы и суммирование по ним.

Задача теперь состоит в том, чтобы выделить в (8.134) вклады полюсов функций Грина $G(q)$ и $G(q+k)$, поскольку именно полюсные вклады отвечают квазичастицам. Для этого требуется выполнить еще одно пересуммирование ряда для Γ, в результате которого получается очень похожий ряд, с тем, однако, единственным отличием, что двухчастичные сечения содержат *только* полюсные вклады.

Формально это происходит так. При малых ω и $\mathbf{k}$ в двухчастичных сечениях, произведение функций Грина можно разложить на сингулярную и регулярную части:

$$-iG(q)\, G(q+k) = \frac{2\pi a^2}{v_F} \frac{\mathbf{kv}}{\omega - \mathbf{kv}} \delta(\varepsilon)\, \delta(|\mathbf{q}| - p_0) + \varphi(q)\,, \quad (8.135)$$

где $q = (\varepsilon, \mathbf{q})$, $k = (\omega, \mathbf{k})$, $\mathbf{v} = \nabla_{\mathbf{k}} \xi(\mathbf{k})$. Поясним происхождение сингулярного вклада в (8.135). Он возникает в тех случаях, когда полюсы функций Грина $G(q)$ и $G(q+k)$ зажимают контур интегрирования по ε в уравнении (8.134). Зажимание контура происходит, когда полюсы выражения $G(q)G(q+k)$ находятся по разные стороны от вещественной оси. Это имеет место при $|\mathbf{q}| < p_0$ и $|\mathbf{q} + \mathbf{k}| > p_0$, или наоборот. Но поскольку $|\mathbf{k}| \ll p_0$, импульс $\mathbf{q}$ при этом оказывается на малом расстоянии порядка $|\mathbf{k}|$ от ферми-поверхности. А значит, одновременно и $\varepsilon = \xi_{\mathbf{q}}$ оказывается почти на уровне Ферми.

Запишем соотношение (8.135) в виде $-iGG = \widehat{D} + \widehat{\varphi}$ и проведем пересуммирование ряда на рис. 8.11, используя операторную запись:

$$\Gamma = \Gamma^{(0)} - i\Gamma^{(0)} GG \Gamma^{(0)} + (-i)^2 \Gamma^{(0)} GG \Gamma^{(0)} GG \Gamma^{(0)} + \ldots = \Gamma^{(0)} \left(1 - \left(\widehat{D} + \widehat{\varphi}\right) \Gamma^{(0)}\right)^{-1} =$$

$$= \Gamma^{(0)} \left(1 - \widehat{\varphi}\Gamma^{(0)}\right)^{-1} \left(1 - \widehat{D}\Gamma^{(0)} \left(1 - \widehat{\varphi}\Gamma^{(0)}\right)^{-1}\right)^{-1} = \Gamma_\omega \left(1 - \widehat{D}\Gamma_\omega\right)^{-1}, \qquad (8.136)$$

где введено обозначение $\Gamma_\omega = \Gamma^{(0)} \left(1 - \widehat{\varphi}\Gamma^{(0)}\right)^{-1}$. Обратим внимание, что результат этой цепочки преобразований имеет форму, соответствующую ряду на рис. 8.11. Отличие этого представления от исходного в том, что теперь все несингулярные вклады собраны единым образом в вершину Γ_ω.

Как всегда, элементарные возбуждения определяются полюсами соответствующей функции Грина. В данном случае необходимо рассмотреть полюсы амплитуды рассеяния Γ, как функции ω и $\mathbf{k}$. Из представления (8.136) следует, что полюсам соответствуют нулевые собственные значения оператора $1 - \widehat{D}\Gamma_\omega$. Пользуясь явной формой (8.135) для оператора $\widehat{D}$, уравнение на собственные значения можно записать в виде

$$(\omega - \mathbf{kv})u(\mathbf{p}) = \mathbf{kv}\frac{2\pi a^2}{v_F}\Gamma_\omega u(\mathbf{p})\,, \qquad (8.137)$$

где $u(\mathbf{p})$ — соответствующая собственная функция, а действие Γ_ω понимается в операторном смысле. Получившееся уравнение совпадает с кинетическим уравнением ферми-жидкости, причем функция Ландау $F(\mathbf{n}, \mathbf{n}')$ оказывается связанной с амплитудой Γ_ω, взятой на ферми-поверхности:

$$F(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = \frac{2\pi a^2}{v_F}\Gamma_\omega(\mathbf{p}, \mathbf{p}')_{|\mathbf{p}|=|\mathbf{p}'|=p_0}\,. \qquad (8.138)$$

Отметим, что амплитуда Γ_ω получается простым образом из полной амплитуды рассеяния Γ, если рассмотреть предел $\mathbf{kv} \ll \omega$. При этом, согласно (8.135), величина $\widehat{D} \to 0$ и, вследствие этого, $\Gamma_\omega = \Gamma$.

Заметим, что связь между оператором $\widehat{D}$ и кинетикой квазичастиц становится особенно наглядной, если перейти в координатно-временное представление. Чтобы избежать неоднозначностей, связанных с обходом полюсов, рассмотрим запаздывающую величину, заменив ω на $\omega + i0$. Тогда

$$\widetilde{D}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\mathbf{kv}e^{-i\omega t + i\mathbf{kr}}}{\omega - \mathbf{kv} + i0}\frac{d\omega}{2\pi}\frac{d^3k}{(2\pi)^3} = \begin{cases} \mathbf{v}\nabla_\mathbf{r}\ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases} \qquad (8.139)$$

Это вычисление демонстрирует, что сингулярная часть произведения $G(q)G(q + k)$ описывает распространение электрона по прямой между моментами, когда происходит взаимодействие с другими электронами. (Читатель, сталкивавшийся с задачей об определении кинетических коэффициентов из уравнения Больцмана, узнает в $\mathbf{vk}/(\omega - \mathbf{vk})$ стандартное выражение, возникающее при подобных расчетах.)

Следует сказать, что связь между лестничными диаграммами с малым переданным импульсом и кинетическим уравнением, продемонстрированная на примере амплитуды рассеяния Γ, имеет более общий характер. Аналогичные рассуждения применимы к произвольной двухчастичной функции Грина. Примером тому могут служить лестничные диаграммы, рассмотренные в задачах 44 — 47.

Как мы убедились, теория ферми-жидкости на диаграммном языке соответствует учету определенных диаграмм с малой передачей импульса в двухчастичных сечениях. Исчерпываются ли описанными выше лестничными диаграммами все возможности? Чтобы в этом разобраться, рассмотрим диаграммы с ровно одним двухчастичным сечением. Как видно из рис. 8.12, их всего три.

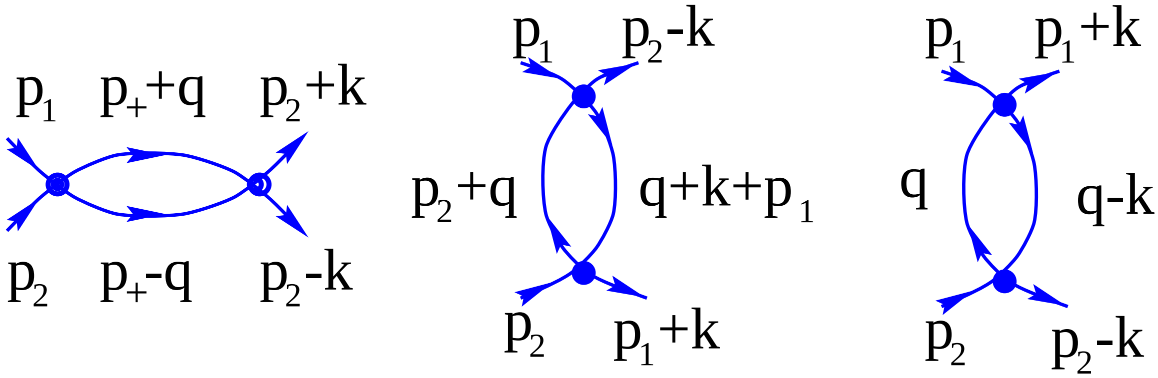


Рис. 8.12

Определим, при каких значениях внешних 4-импульсов p_1, p_2 и k эти диаграммы могут оказаться сингулярными. Как и выше, нас интересуют сингулярности, возникающие из-за интегрирования произведения двух функций Грина. При данном значении энергии ε в петле полюсы этих двух гриновских функций таковы:

$$\varepsilon = \xi_{\mathbf{q}} - i0\,\mathrm{sign}\,\xi_{\mathbf{q}}\,, \qquad \varepsilon = \omega + \xi_{\mathbf{q+k}} - i0\,\mathrm{sign}\,\xi_{\mathbf{q+k}}\,. \tag{8.140}$$

При этом, как всегда, отличный от нуля вклад в интеграл по ε возникает лишь если полюсы находятся по разные стороны от контура интегрирования (ср. с задачей 24). При определенных значениях внешних импульсов полюсы могут сблизиться и зажать между собой контур интегрирования. Тогда этот контур будет невозможно увести из окрестности полюсов и возникнет сингулярность.

Выясним, при каких условиях это происходит в диаграммах на рис. 8.12. Пренебрегая частотой ω, передаваемой через двухчастичное сечение, получим

a) $|\mathbf{p}_+ + \mathbf{q}| = |\mathbf{p}_+ - \mathbf{q}|$, где $\mathbf{p}_+ = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)/2$;

b) $|\mathbf{p}_2 + \mathbf{q}| = |\mathbf{q} + \mathbf{p}_1 + \mathbf{k}|$;

c) $|\mathbf{q}| = |\mathbf{q} - \mathbf{k}|$.

При этом следует учесть, что сингулярность может исчезнуть при интегрировании по $\mathbf{q}$, если условие выполняется в слишком малой области $\mathbf{q}$. Поэтому условие возникновения сингулярности выглядит теперь следующим образом:

a) $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \approx 0$;

b) $\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 - \mathbf{k} \approx 0$;

c) $\mathbf{k} \approx 0$.

Итак, мы видим, что только диаграмма c) сингулярна при $k = 0$. Именно она и определяет динамику возбуждений в ферми-жидкости.

Что же касается остальных диаграмм, то диаграмма b) бывает важна очень редко из-за того, что в ней налагается условие $\mathbf{p}_1 \approx \mathbf{p}_2$. А вот диаграмма a) оказывается важна в теории сверхпроводимости, и в гл.10 мы ее подробно изучим. Степень важности диаграммы a) и подобных ей более сложных диаграмм оказывается зависящей от знака взаимодействия. В случае притяжения ферми-жидкость исчезает, а взамен образуется сверхпроводящее состояние. В случае же отталкивания все выводы терии ферми-жидкости, полученные без учета диаграммы a), остаются в силе.

Глава 9.

Электроны в случайном потенциале

9.1. Усреднение функций Грина по беспорядку

Рассмотрим еще один вид задач, решаемых с помощью диаграммной техники — задачи о *невзаимодействующих* электронах, упруго рассеивающихся на примесях. Традиционно такие задачи описываются кинетическим уравнением Больцмана для функции распределения вероятности в фазовом пространстве $n(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$. Кинетическое уравнение принимает наиболее простой вид в так называемом τ-приближении, предполагающем изотропное рассеяние на примесях:

$$(\partial_t + \mathbf{v}\nabla_{\mathbf{r}} + \mathbf{F}\nabla_{\mathbf{p}})\ n(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)\ =\ -\frac{1}{\tau}\left(n(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) - \bar{n}(|\mathbf{p}|, \mathbf{r}, t)\right). \tag{9.1}$$

Здесь $\mathbf{F} = e\mathbf{E} + (e/c)\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ — сила, действующая на электроны, $\bar{n}(|\mathbf{p}|, \mathbf{r}, t)$ — среднее от функции распределения по направлениям импульса $\mathbf{p}$, а $1/\tau$ — частота столкновений с примесями [1].

Применение кинетического уравнения (9.1) в квантовых задачах подразумевает квазиклассическое описание, поскольку кинетическое уравнение определяет эволюцию функции распределения $n(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$ в фазовом пространстве. Кинетическое уравнение учитывает только те квантовые эффекты, которые относятся к статистике частиц. Диаграммная техника позволяет выяснить границы применимости кинетического уравнения, обосновать τ-приближение, а также предсказать интересные квантовые эффекты в кинетике металлов, которые не описываются кинетическим уравнением.

Модель невзаимодействующих электронов представляют не только чисто методический интерес. Как известно, при рассмотрении динамики квазичастиц в ферми-жидкости роль взаимодействия сводится, главным образом, к переопределению раз-

[1] Обобщение интеграла столкновений в правой части (9.1) на случай более общего неизотропного рассеяния достигается введением своего времени релаксации для каждой сферической гармоники функции распределения.

личных констант ферми-газа (см. гл. 8). Поэтому в теории электронного транспорта в металлах пренебрежение электрон-электронным взаимодействием, в качестве первого приближения, вполне оправдано.

Рассмотрим, как формулируется диаграммная техника для задачи о рассеянии на примесях. Введем потенциал примесей в гамильтониан электронного газа. В простейшей модели потенциальное поле $U(\mathbf{r})$, в котором движутся электроны, создается рассеивающими центрами, расположенными в точках $\mathbf{r}_i$:

$$\widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}} = \int U(\mathbf{r})\psi^+(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})d^3\mathbf{r} \ , \quad U(\mathbf{r}) = \sum_i u(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \ . \tag{9.2}$$

Положения примесей $\mathbf{r}_i$ будем считать случайными, а их концентрацию n — малой по сравнению с плотностью электронов $n_{\text{e}} = \frac{4\pi}{3}(p_0/2\pi\hbar)^3$ (слабый беспорядок). Для упрощения вычислений мы примем, что потенциал примесей короткодействующий, $u(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = u_0\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$, — иными словами, пренебрежем зависимостью амплитуды рассеяния от энергии и угла рассеяния. Помимо этого мы будем считать амплитуду рассеивающего потенциала u_0 малой, что позволит рассмотреть рассеяние на одной примеси в рамках борновской теории возмущений для амплитуды рассеяния.

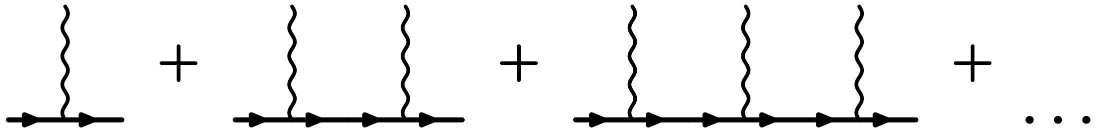


Рис. 9.1

Функция Грина электрона, движущегося в потенциале (9.2), дается суммой диаграмм, показанных на рис. 9.1. Здесь волнистые линия обозначают потенциал примесей $U(\mathbf{r})$ (см. рис. 3.1). Функция Грина в случайном внешнем поле (9.2), вообще говоря, не является трансляционно инвариантной. Однако практический интерес обычно представляют величины, усредненные по расположению примесей. Такие величины являются трансляционно инвариантными.

Выполним усреднение функции Грина по беспорядку. Для этого заметим, что потенциал $U(\mathbf{r})$ в (9.2) есть сумма потенциалов отдельных примесей. Поэтому каждой вершине на рис. 9.1 может быть приписан номер примеси, по которому затем надо просуммировать, как показано на рис. 9.2.

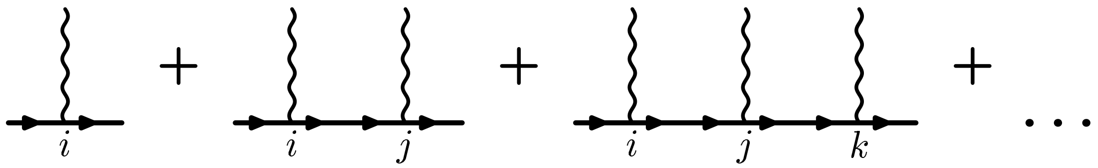


Рис. 9.2

Вначале рассмотрим диаграммы, в которых все номера примесей разные. Это означает, что рассеяние на каждой примеси рассматривается в первом борновском приближении и что все вершины в диаграмме статистически независимы. После усреднения по положениям примесей мы получим, что все такие диаграммы приводят к сдвигу химпотенциала на величину $\delta\mu = nu_0$. Это естественно: средний потенциал примесей, равномерно размазанных по объему, равен именно этой величине.

Существенно однако то, что при рассмотрении рассеяния на одной примеси мы не можем ограничиться первым борновским приближением, ибо оно дает лишь тривиальный сдвиг химпотенциала, описанный выше. Нас интересует мнимая часть амплитуды рассеяния $\operatorname{Im} f$, которая появляется лишь во втором борновском приближении по амплитуде рассеивающего потенциала u_0. Поскольку мнимая часть амплитуды рассеяния $\operatorname{Im} f$ возникает во втором порядке теории возмущений по u_0, она оказывается много меньше вещественной части $\operatorname{Re} f$. Однако, согласно теореме унитарности (см. задачу 11, гл. 3), именно $\operatorname{Im} f$ определяет полное сечение рассеяния на потенциале примеси.

Поэтому нам необходимо изучить диаграммы, в которые одна и та же примесь входит два раза. Чтобы отметить этот факт, соединим штриховой линией вершины, отвечающие совпадающим примесям (рис. 9.3). Как и раньше, несвязанные штриховой линией вершины, с точки зрения усреднения по положениям примесей, являются статистически независимыми. Вершины же, соединенные штриховой линией, соответствуют одной и той же примеси. Мы будем рассматривать такую штриховую линию как новый элемент диаграммной техники. Усреднение по примесям дает для нее такое выражение:

$$\sum_i \langle u(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)u(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_i)\rangle = nu_0^2\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,. \tag{9.3}$$

Статический характер потенциала примесей $U(\mathbf{r})$ выражается математически отсутствием какой–либо зависимости выражения (9.3) от моментов времени t и t', в которые происходит первое и второе рассеяние.

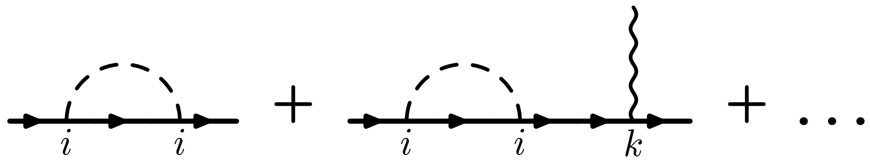


Рис. 9.3

Далее можно было бы учесть высшие порядки теории возмущений для рассеяния на одной примеси. Однако оказывается, что это эквивалентно замене амплитуды и сечения борновского рассеяния на соответствующие точные выражения (см. гл. 3), что, очевидно, не приводит к качественно новым эффектам. Поэтому разумно пренебречь такими поправками и принять, что рассеивающий потенциал слабый.

Подведем итог. На каждой примеси электрон рассеивается либо один, либо два раза. Однократные рассеяния просто сдвигают химпотенциал и потому могут вообще не учитываться. Вклад же двукратного рассеяния можно получить, вычисляя диаграммы, показанные на рис. 9.4. При этом штриховой линии соответствует выражение $nu_0^2\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$.

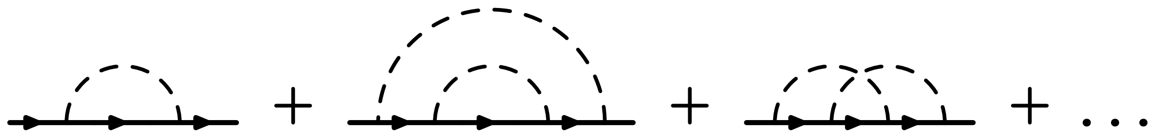


Рис. 9.4

В результате получается диаграммная техника *усреднения по беспорядку*[2]. Формально она напоминает диаграммную технику для электрон–фононного взаимодействия (с заменой функции Грина фононов на примесную штриховую линию). Однако имеются два существенных отличия:

1) Передача энергии по штриховой линии равна нулю (упругое рассеяние).

2) Отсутствуют поляризационные петли, одевающие штриховые линии, подобно диаграммам на рис. 6.1.

Первое очевидно, а в справедливости второго легко убедиться, взглянув на диаграммы, показанные на рис. 9.1. Еще до усреднения по беспорядку в этих диаграммах отсутствуют замкнутые электронные петли.

Физически замкнутые петли отсутствуют из-за того, что потенциал примесей, как говорят, «вмороженный», т. е. статический. Дело в том, что динамические величины, такие, например, как смещение атомов решетки, могут подстраиваться под заданную электронную плотность (и именно этот эффект и описывается поляризационными петлями в диаграммах на рис. 6.1). Статический же потенциал примесей не меняет свою реализацию с течением времени. Усреднение по нему происходит принципиально иным образом, чем по динамическим степеням свободы.

Напомним как определяется усреднение в системе электронов, взаимодействующих с фононами. В электрон–фононной диаграммной технике электронная функция Грина есть

$$G(x,x') = -i\,\frac{\langle \mathrm{T}\psi^+(x)\psi(x')\widehat{S}\rangle_0}{\langle \widehat{S}\rangle_0}\,, \tag{9.4}$$

где среднее $\langle\ldots\rangle_0$ берется и по колебаниям решетки, и по основному состоянию ферми-газа. Обратим внимание, что усреднение происходит по-отдельности в числителе и в знаменателе.

Усреднение же по «вмороженному» беспорядку происходит иначе: вначале вычисляется функция Грина при заданной реализации беспорядка, и только потом происходит усреднение. Иными словами, по беспорядку усредняется сразу вся дробь (9.4):

$$\Big\langle G(x,x')\Big\rangle_{\text{бесп}} = -i\left\langle \frac{\langle \mathrm{T}\psi^+(x)\psi(x')\widehat{S}\rangle_0}{\langle \widehat{S}\rangle_0}\right\rangle_{\text{бесп}}\,, \tag{9.5}$$

[2]По традиции ее также называют *крестовой диаграммной техникой.*

где среднее $\langle\ldots\rangle_0$ берется по основному состоянию ферми-газа. Усреднение функции Грина по беспорядку будет рассмотрено более подробно в задаче 50.

При оценке различных диаграмм, возникающих при усреднении по беспорядку, полезно иметь в виду их интерпретацию в координатном представлении. Выражение $\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ в правой части (9.3) описывает возврат электрона на ту же примесь. Интересно, что в координатном представлении среднее от функции Грина принимает весьма простой вид (см. задачу 50 б):

$$\langle G(\varepsilon,\mathbf{r})\rangle = G_0(\varepsilon,\mathbf{r})\, e^{-|\mathbf{r}|/2l}, \tag{9.6}$$

где $G_0(\varepsilon,\mathbf{r})$ — неусредненная функция Грина, а $l=v_F\tau$ — длина свободного пробега. Экспоненциальный множитель $e^{-|\mathbf{r}|/2l}$ означает, что вероятность пролета электроном пути $|\mathbf{r}|$ без столкновений с примесями равна $e^{-|\mathbf{r}|/l}$ (вероятность есть квадрат амплитуды, т. е. квадрат модуля функции Грина). Такая же вероятность получается из кинетического уравнения (9.1).

В задачах, рассматриваемых в настоящей главе, электроны считаются невзаимодействующими, а рассеяние на примесях — упругим. Поэтому все обсуждаемые явления — одночастичные. Это означает, что, в принципе, можно было бы изучать поведение не ферми-системы, а одной частицы с заданной энергией E, найти ее вклад в кинетические величины, а затем просуммировать результат по всем занятым состояниям. Вместо этого мы будем пользоваться гриновскими функциями ферми-газа.

Естественно, при отсутствии взаимодействия эти два подхода, одночастичный и использующий ферми-газ, приводят к тождественным результатам. При одночастичном вычислении с последующим усреднением по фермиевскому распределению начальных состояний, вклады всех состояний, расположенных глубоко под ферми-поверхностью $E=E_F$, сократятся, поскольку в этой области энергий *все* состояния заполнены («дираковский вакуум»). Поэтому основной вклад всегда будет даваться только состояниями с энергиями в относительно узком интервале вокруг E_F, определяемом температурным размытием фермиевской ступеньки, частотой внешнего поля, и т. п. Сокращение вкладов состояний с энегриями, далеко отстоящими от E_F, означает, что при рассмотрении динамики в ферми-системе мы эффективно все равно имеем дело лишь с одной частицей на ферми-поверхности.

Кроме того (и это главное), использование функций Грина ферми-газа становится полностью оправданным, когда речь идет о взаимодействующих электронах. Хотя ситуации такого рода нам встретятся только в последующих главах (см. задачи 64, 65, 66, 67, 71), оказывается весьма полезным иметь некоторую преемственность.

Одночастичный характер рассматриваемых процессов упрощает физическую интерпретацию выражений, поскольку любой график, хотя формально и состоит из функций Грина ферми-газа, на самом деле описывает динамику всего одной частицы. Имея это в виду, можно считать электронную функцию Грина амплитудой перехода частицы из одной точки в другую, а дырочную — комплексно-сопряженной амплитудой той же самой частицы.

9.2. Усреднение функций отклика

Рассмотрим функции отклика ферми-газа в присутствии беспорядка. Вообще говоря, функции отклика в неупорядоченной системе зависят от конкретной реализации беспорядка. Однако физический интерес в основном представляют функции отклика, усредненные по распределению всех возможных реализаций. Ниже мы обсудим, как выполняется такое усреднение.

Рассмотрим, например, линейный отклик плотности частиц $\widehat{n}(\mathbf{r},t) = \psi^+(\mathbf{r},t)\psi(\mathbf{r},t)$ на слабое переменное внешнее поле $V(\mathbf{r},t)$, взаимодействующее с плотностью:

$$\widehat{\mathcal{H}}_{int} = -\int \widehat{n}(\mathbf{r},t)V(\mathbf{r},t)\,d^3\mathbf{r}\,. \tag{9.7}$$

Функция отклика плотности после перехода в представление Фурье по времени определяется соотношением:

$$\langle \widehat{n}(\mathbf{r}_1,\omega)\rangle = \int K_{\text{точн}}(\omega,\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)V(\mathbf{r}_2,\omega)d^3\mathbf{r}_2\,. \tag{9.8}$$

Ядро $K_{\text{точн}}(\omega,\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$ проще всего вычислять по мацубаровской технике, рассматривая отклик при дискретной мнимой частоте внешнего поля, который затем аналитически продолжается на вещественные частоты. Поскольку электрон-электронное взаимодействие в рассматриваемой задаче отсутствует, мацубаровский коррелятор плотность-плотность можно записать через точную функцию Грина электрона, движущегося в случайном потенциале:

$$K_{\text{точн}}(i\omega_n,\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) = T\sum_{\varepsilon_k} G^M(i\varepsilon_k,\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)G^M(i\varepsilon_k+i\omega_n,\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\,. \tag{9.9}$$

В графическом представлении этот коррелятор выглядит как показано на рис. 9.5. Жирная линия обозначает точную функцию Грина, т. е. сумму диаграмм, изображенных на рис. 9.1.

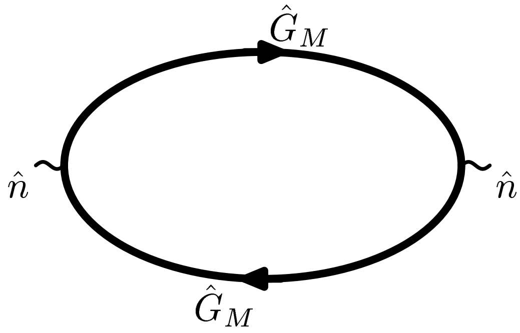


Рис. 9.5

Коррелятор $K_{\text{точн}}(i\omega_n,\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$ зависит от расположения примесей и поэтому зависит от обеих координат $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, а не только от их разности. Однако система «в среднем» трансляционно инвариантна, поэтому усредненный по беспорядку коррелятор должен зависеть только от $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$:

$$K(\omega, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \langle K_{\text{точн}}(\omega, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\rangle_{\text{бесп}} \,. \tag{9.10}$$

Чтобы вычислить $K(\omega, \mathbf{r})$, нужно усреднить произведение двух функций Грина в (9.9) по беспорядку. Как и при усреднении одной функции Грина, нужно попарно связать примеси штриховыми линиями. Штриховые линии, начинающиеся и заканчивающиеся на одной электронной функции Грина, можно просуммировать, получив усредненную функцию Грина (см. задачу 50). Линии же, связывающие различные электронные функции, описывают отличие среднего произведения функций Грина в (9.9) от произведения средних. Таким образом, для вычисления среднего коррелятора в (9.10) надо просуммировать последовательность диаграмм, изображенных на рис. 9.6.

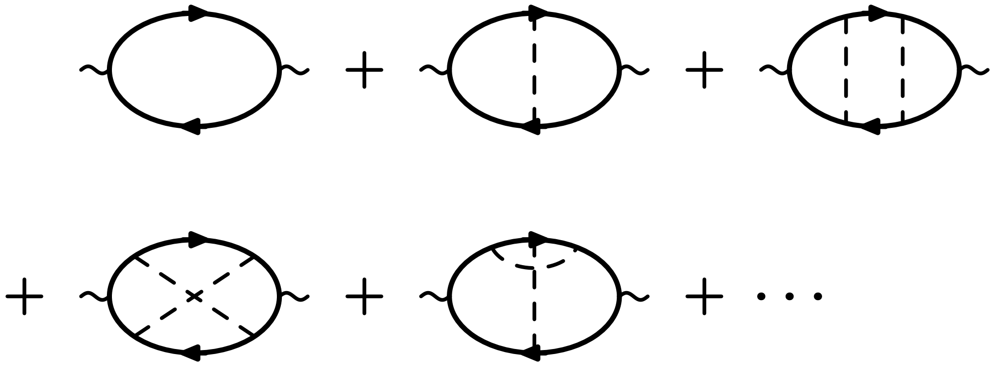


Рис. 9.6

Оказывается, однако, что не все диаграммы в этом ряду одинаково важны. В соответствии с основным принципом техники усреднения по беспорядку (см. разд. 9.6), основной вклад дается диаграммами, в которых примесные линии не пересекаются. Такая последовательность диаграмм называется *лестничным рядом* (рис. 9.7). При этом все функции Грина надо считать уже усредненными по беспорядку. Суммирование этой последовательности диаграмм будет выполнено в задаче 52.

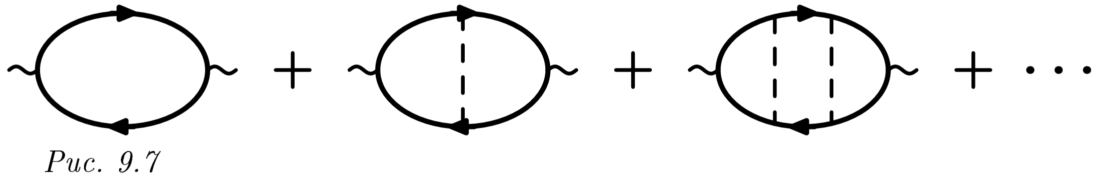


Рис. 9.7

Вычисление функции отклика тока $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ производится аналогично. В этом случае, однако, надо учитывать следующее обстоятельство. Оператор тока

$$\widehat{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, t) = \frac{e\hbar}{2m}\left(-i\psi^+(\mathbf{r}, t)\nabla\psi(\mathbf{r}, t) + \text{h.c.}\right) - \frac{e^2}{mc}\,\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)\,\psi^+(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}, t) \tag{9.11}$$

содержит векторный потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ в явном виде. Поэтому при добавлении в гамильтониан системы внешнего поля,

$$\widehat{\mathcal{H}}_{\mathrm{kinetic}} = \int \frac{1}{2m}\psi^{+}(\mathbf{r}) \left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)\right)^{2} \psi(\mathbf{r}) d^{3}\mathbf{r}\,, \tag{9.12}$$

изменяется не только среднее значение оператора тока (как в случае с функцией отклика плотности), но и само выражение для этого оператора. Этот эффект не учитывается формулой Кубо, поэтому в нее необходимо добавить соответствующий вклад (второе слагаемое в (9.11)).

Таким образом, в операторе тока (9.11) имеется два вклада: градиентный и диамагнитный. Поэтому проводимость дается суммой выражений существенно разной природы. Во-первых, среднее от диамагнитного тока по основному состоянию есть $\langle \mathbf{j}^{(1)} \rangle = -(ne^2/mc)\mathbf{A}$, где n — электронная плотность. Во–вторых, находя мацубаровский отклик градиентной части тока на переменное поле, мы получаем

$$\langle j_{\alpha}^{(2)}(\mathbf{r}) \rangle = -\frac{1}{c} \int \Pi_{\alpha\beta}^{(M)}(i\omega_n, \mathbf{r} - \mathbf{r}') A^{\beta}(\mathbf{r}') d^{3}\mathbf{r}'\,, \tag{9.13}$$

где $\Pi_{\alpha\beta}^{(M)}(i\omega_n, \mathbf{r} - \mathbf{r}')$ есть мацубаровский коррелятор ток–ток:

$$\Pi_{\alpha\beta}^{(M)}(i\omega_n, \mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{1}{2} \int\limits_{-\beta}^{\beta} \left\langle \mathrm{T}_{\tau}\, \widehat{j}_{\alpha}(\tau, \mathbf{r})\, \widehat{j}_{\beta}(0, \mathbf{r}') \right\rangle e^{i\omega_n \tau}\, d\tau \tag{9.14}$$

(здесь τ — мацубаровское время, $\widehat{j}_{\alpha}$ — компоненты градиентной части оператора тока). Поэтому полная мацубаровская корреляционная функция токов дается суммой двух слагаемых:

$$K_{\alpha\beta}^{jj\,(M)}(i\omega_n) = \Pi_{\alpha\beta}^{(M)}(i\omega_n, \mathbf{r} - \mathbf{r}') + \frac{ne^2}{m}\, \delta_{\alpha\beta} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\,. \tag{9.15}$$

Отклик на вещественной частоте получается из (9.15) аналитическим продолжением $i\omega_n \to \omega$ $(n > 0)$.

Хотя, на первый взгляд, два члена в (9.15) имеют совершенно различную природу, на самом деле между ними имеется определенное соотношение. Действительно, в пределе низкой частоты проводимость должна быть конечной. Иными словами, однородный в пространстве и времени вектор–потенциал, не создающий электромагнитного поля, не должен создавать и ток. Поэтому должно выполняться тождество:

$$\Pi_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k})|_{\mathbf{k}=0, \omega\to 0} = -\frac{ne^2}{m}\, \delta_{\alpha\beta}\,, \tag{9.16}$$

где $\Pi_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) = \int \Pi_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{r}) e^{-i\mathbf{kr}} d^3\mathbf{r}$ — поляризационный оператор (9.14) в частотно-импульсном представлении. Соотношение (9.16) аналогично известному из теории поля тождеству Уорда, гарантирующему калибровочную инвариантность поляризационного оператора. Подобно тождеству Уорда, в нашем случае равенство $\Pi(0) = -ne^2/m$ обеспечивает калибровочную инвариантность проводимости.

В нормальном металле из-за калибровочной инвариантности запрещено соотношение между током и векторным потенциалом вида $\mathbf{j} = \mathrm{const}\,\mathbf{A}$. Сокращение вкладов такого типа и обеспечивается тождеством (9.16). А вот в сверхпроводниках, из-за того, что калибровочная инвариантность нарушена, соотношение указанного вида справедливо (оно называется «уравнением Лондонов» и будет рассмотрено в задачах 63 и 65). В сверхпроводниках тождество (9.16) не имеет места.

Таким образом, хотя в токовой функции отклика (9.15) и появляется дополнительный диамагнитный член, «неправильно» ведущий себя на малых частотах, обычно он сокращается аналогичным вкладом из градиентной части функции отклика (9.14). Сама же градиентная часть вычисляется так же, как и функция отклика плотности. Она точно также описывается суммой диаграмм на рис. 9.7, только теперь на концах диаграмм стоят токовые вершины. В простейшем случае суммирование этого ряда проведено в задаче 51.

Литература: Техника усреднения функций Грина по беспорядку рассмотрена в [1], § 39, п. 2, а также в обзоре: P. A. Lee, T. V. Ramakrishnan, Rev. Mod. Phys., v. 57, p. 287 (1985).

9.3. Задачи 50 – 54

Задача 50. (*Функция Грина, усредненная по беспорядку.*) Основной «принцип» техники усреднения по беспорядку состоит в том, что при усреднении какой–либо величины по беспорядку основной вклад дают графики, в которых примесные линии не пересекаются. Параметр, по которому графики с пересекающимися линиями оказываются малыми по сравнению с графиками, в которых линии не пересекаются, есть $(p_0 l)^{-1}$ — отношение фермиевской длины волны к длине свободного пробега $l = v_F\tau$. Обоснование этого «принципа» мы обсудим ниже, в разд. 9.6.

а) Усредните функцию Грина по беспорядку, рассматривая только графики с непересекающимися линиями. Получите среднее функции Грина в импульсном представлении:

$$\langle G(\varepsilon,\mathbf{p})\rangle = \frac{1}{\varepsilon-\xi(\mathbf{p})+\frac{i}{2\tau}\,\mathrm{sign}\,\varepsilon}\ ,\quad \frac{1}{2\tau} = \nu_0 n u_0^2\,, \tag{9.17}$$

где $u_0 = \int u(\mathbf{r})d^3\mathbf{r}$, а $\nu_0 = mp_0/2\pi^2\hbar^3$ — плотность состояний на уровне Ферми с одной проекцией спина.

б) Найдите $\langle G(\varepsilon,\mathbf{r})\rangle$ в координатном представлении при $|\mathbf{r}|p_0 \gg 1$. Выведите формулу (9.6). Покажите, что в случае усреднения функции Грина по беспорядку аналог квазиклассического выражения (5.23) принимает такой вид:

$$G(\varepsilon,\mathbf{r}) \;=\; -\frac{m}{2\pi|\mathbf{r}|}\exp\left[(ip_0\,\mathrm{sign}\,\varepsilon + i|\varepsilon|/v_F - 1/2l)|\mathbf{r}|\right]\,. \tag{9.18}$$

Это выражение справедливо при $|\varepsilon| \ll \varepsilon_F$ и $|\mathbf{r}|p_0 \gg 1$.

Задача 51. (*Проводимость электронного газа*[3].) Проводимость газа электронов, рассеивающихся на примесях, дается хорошо известной формулой Друде:

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau}\,, \quad \sigma_0 = ne^2\tau/m\,. \tag{9.19}$$

Здесь σ_0 — статическая проводимость, n — концентрация электронов, τ — время свободного пробега. Нашей задачей будет получить соотношение (9.19) с помощью техники усреднения по беспорядку. Такой вывод представляет большой методический интерес, поскольку он позволяет проследить связь между диаграммной техникой и теорией кинетического уравнения.

Разумеется, наиболее простой вывод (9.19) использует кинетическое уравнение (9.1). Напомним, как это делается. В однородном электрическом поле $e^{-i\omega t}\,\mathbf{E}$ функция распределения, возмущенная полем, не имеет явной зависимости от координат. Поэтому кинетическое уравнение (9.1), разложенное до членов, линейных по полю $\mathbf{E}$, принимает вид

$$-i\omega\delta n(\mathbf{p}) + e\mathbf{E}\nabla_{\mathbf{p}} n_0(\mathbf{p}) = -\frac{1}{\tau}\delta n(\mathbf{p})\,. \tag{9.20}$$

Здесь $\delta n(\mathbf{p})$ — поправка к равновесной функции распределения $n_0(\mathbf{p})$, линейная по полю $\mathbf{E}$. Решая уравнение (9.20), получаем $\delta n(\mathbf{p}) = (e\mathbf{E}\nabla_{\mathbf{p}} n_0(\mathbf{p}))/(i\omega - \tau^{-1})$ и находим ток:

$$\mathbf{j} = \int e\mathbf{v}\delta n(\mathbf{p})\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} = \frac{e^2 n\mathbf{E}}{m(\tau^{-1} - i\omega)} \tag{9.21}$$

Напомним также, что в случае рассеяния более общего вида классическая проводимость определяется транспортным временем $\tau_{\rm tr}$, вообще говоря не совпадающим со временем свободного пробега τ. Однако для точечных примесей, рассеивающих изотропно, т. е. только в S-канале, эти два времени равны: $\tau_{\rm tr} = \tau$.

Для вычисления проводимости с помощью диаграмм необходимо воспользоваться соотношением (9.15), связывающим функцию отклика с мацубаровским коррелятором ток–ток. Упростите мацубаровский коррелятор (9.14), предварительно записав его в форме

$$\Pi_{\alpha\beta}(i\omega_n) \;=\; T\sum_{\varepsilon_m=(2m+1)\pi T} {\rm Tr}\left(\widehat{G}^M(i\varepsilon_m + i\omega_n)\widehat{j}_\alpha \widehat{G}^M(i\varepsilon_m)\widehat{j}_\beta\right)\,, \tag{9.22}$$

справедливой для невзаимодействующих частиц (см. п. 7.2.1). Выполните усреднение по беспорядку, рассматривая только диаграммы с непересекающимися линиями. С помощью соотношения (9.15) найдите проводимость.

Задача 52. (*Уравнение диффузии.*) Выведите уравнение диффузии, рассматривая отклик плотности частиц на слабое переменное внешнее поле (9.7). Для этого просуммируйте лестничный ряд на рис. 9.7 (его в этой связи часто называют *диффузионной лестницей* или *диффузоном*). Покажите, что при $|\mathbf{q}|l \ll 1$ и $\omega_n\tau \ll 1$ усредненный коррелятор плотность–плотность есть

$$\mathcal{K}(i\omega_n, \mathbf{q}) \;=\; -\,\frac{\nu D\mathbf{q}^2}{|\omega_n| + D\mathbf{q}^2}\,, \quad D = \frac{1}{3}v_F l\,, \tag{9.23}$$

[3] S. F. Edwards, Phil. Mag., series 8, v. 3, p. 1020 (1958); А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, ЖЭТФ, т. 35, с. 1158 (1958); ibid., т. 36, с. 319 (1959)

где $\nu = 2\nu_0$ — плотность состояний на уровне Ферми для обеих проекций спина.

Рассмотрите графики, изображенные на рис. 9.7, в координатном представлении и объясните, почему они соответствуют процессу диффузии.

Выражение (9.23), аналитически продолженное с $i\omega_n$ на верхней мнимой полуоси, согласуется с ответом, получающимся из классического уравнения диффузии. Действительно, уравнение диффузии в присутствии внешней силы $F = -\nabla V$ записывается так:

$$\partial_t n = D\nabla^2 n - \eta\nabla(Fn)\,, \tag{9.24}$$

где $\eta = \nu D/n_0$ — подвижность. Поэтому, переходя к фурье–компонентам, имеем $\mathcal{K}(\omega, \mathbf{q}) = -\nu D\mathbf{q}^2/(-i\omega + D\mathbf{q}^2)$.

Обратим внимание на то, что коэффициент диффузии D и проводимость, найденная в задаче 51, удовлетворяют соотношению Эйнштейна,

$$\sigma = e^2\nu D\,, \tag{9.25}$$

как и должно быть.

Задача 53. (*Интерференционное удвоение вероятности возврата.*) Рассмотрим вероятность $p(t)$ того, что электрон после рассеяния на примесях возвращается в момент времени t в ту же точку, откуда он вышел при $t = 0$. В предыдущей задаче мы вывели уравнение диффузии, функция Грина которого, как известно, есть

$$\mathcal{D}(r, t) = (2\pi Dt)^{-n/2} e^{-r^2/2Dt}\,, \tag{9.26}$$

где n — размерность пространства. Для вероятности возврата это дает $p(t) = (2\pi Dt)^{-n/2}$.

Оказывается, благодаря эффектам интерференции рассеяния на разных примесях, которыми мы пренебрегли при выводе уравнения диффузии, вероятность возврата $p(t)$ *удваивается*. Поясним физическое происхождение этого эффекта иллюстрацией из оптики. Пусть внутри большого ящика со случайно расположенными рассеивателями (примесями) находится монохроматический источник. Найдем интенсивность излучения, рассеянного точно обратно в источник. Интенсивность есть квадрат амплитуды, а амплитуда есть сумма амплитуд всех процессов многократного рассеяния на примесях: $A_{\rm tot} = \sum_\alpha A_\alpha$. Если примеси точечные, то вклады многократного рассеяния удобно характеризовать последовательностью примесей, пройденных излучением. Скажем, рассеявшись сначала на примеси 1, свет попадает на примесь 2, которая затем рассеивает его обратно в исходную точку. В общем случае

$$A_\alpha = A_{0\to m}A_{m\to n}\ldots A_{s\to 0}\,. \tag{9.27}$$

Поскольку расположение примесей случайно, фазы амплитуд $A_{i\to j}$, соответствующих различным последовательностям прохождения примесей, не скоррелированны. Поэтому интерференцией почти всех вкладов можно пренебречь — за одним единственным исключением, когда одна и та же (случайная!) последовательность примесей проходится один раз в прямом, а другой — в обратном порядке. Каждые две такие амплитуды A_α и $A_{\alpha'}$ в точности равны друг другу и полностью интерферируют. Теперь заметим, что если бы интерференции вообще не было, интенсивность подчинялась бы уравнению диффузии, а из-за интерференции пар путей, проходящих по одной и той же траектории в противоположных направлениях, она оказывается в два раза больше:

$$|\sum A_\alpha|^2 = \sum{}' |A_\alpha + A_{\alpha'}|^2 = 2\sum |A_\alpha|^2 \,. \tag{9.28}$$

(В сумме, помеченной штрихом, суммирование идет по последовательностям примесей без учета направления обхода.) Интерференционный вклад крайне чувствителен к положению конечной точки: уже на расстоянии нескольких длин волн от источника интенсивность рассеянного излучения уменьшается до «классического» значения, т. е. падает в два раза. Происходит это потому, что, как легко убедиться, для несовпадающих начальной и конечной точек одна и та же последовательность примесей при прохождении в противоположных направлениях дает разные набеги фаз.

Рассмотрим интерференционную часть коррелятора плотность–плотность электронов, соответствующую описанной картине. Покажите, что эта так называемая «квантовая поправка» дается *веерными* графиками, изображенными на рис. 9.7[4].

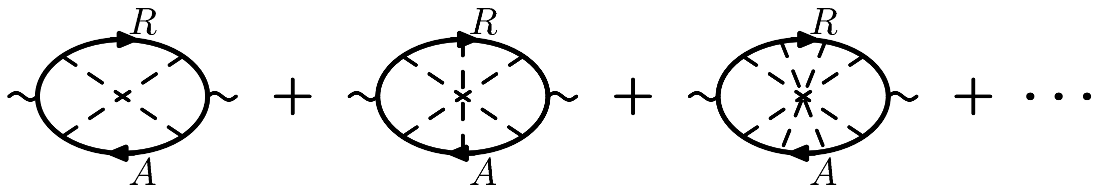


Рис. 9.8

а) (*Рассеяние точно назад.*) Нарисуйте веерные графики в координатном представлении. Пусть начальная и конечная точки совпадают. Покажите, что каждый вклад с фиксированным числом линий в веере на рис. 9.8 равен соответствующему вкладу из диффузионной лестницы, рассмотренной в задаче 52 (см. рис. 9.7), и значит вероятность возврата в два раза больше классического значения.

Обратим внимание на то, что почленное соответствие между веерным и лестничным рядами неполное, поскольку первым двум членам диффузионной лестницы в веерных графиках сопоставить нечего. Однако, на больших временах $t \gg \tau$, когда справедливо диффузионное приближение, каждое слагаемое диффузионной лестницы много меньше их суммы (см. решение задачи 52). Поэтому поправка, возникающая из-за несоответствия первых двух членов диффузионного и веерного рядов, оказывается малой и не влияет на удвоение вероятности возврата.

б) (*Координатная зависимость.*) Теперь рассмотрим случай, когда начальная и конечная точки находятся на расстоянии r. Найдите зависимость квантовой поправки от r. Вычисление удобно проводить в координатном представлении, пользуясь функцией Грина, найденной в задаче 22. Покажите, что интерференционная поправка ослабляется при $p_0 r \approx 1$ и определите характер ее убывания при $p_0 r \gg 1$.

Задача 54. (*Квантовая поправка к проводимости*[5].) Рассмотрим статическую

[4]Веерные графики для проводимости были впервые рассмотрены в работе: J. L. Langer, T. Neal, *Phys. Rev. Lett.*, v. 16, p. 984 (1966). Интерпретация роли соответствующего вклада в динамику электронов как интерференции при рассеянии назад принадлежит Д. Е. Хмельницкому.

[5]Явление слабой локализации в двумерной системе, которое приводит к особенностям в квантовой поправке к проводимости, было впервые рассмотрено в работе: Л. П. Горьков, А. И. Ларкин, Д. Е. Хмельницкий, *Письма в ЖЭТФ*, т. 30, с. 248 (1979).

проводимость σ_0 двумерного электронного газа. Хотя в задаче 51 речь формально шла о трехмерной системе, все ее результаты, как нетрудно видеть, переносятся без каких–либо существенных изменений на случай произвольной размерности. Поэтому проводимость двумерной системы в главном порядке по параметру $(p_0 l)^{-1}$ дается формулой Друде.

В этой задаче нас будет интересовать следующий член в формальном разложении проводимости по степеням $(p_0 l)^{-1}$. Для того чтобы его найти, нужно рассмотреть всевозможные способы усреднения петлевой диаграммы для коррелятора ток–ток (см. рис. 9.6), при которых примесные линии пересекаются, но делают это «минимальным образом».

Покажите, что при этом получаются веерные графики, подобные изображенным на рис. 9.8 и что ими исчерпываются все минимально пересекающиеся диаграммы. Эти графики определяют главную квантовую поправку в любой размерности, но наиболее интересной оказывается двумерная ситуация.

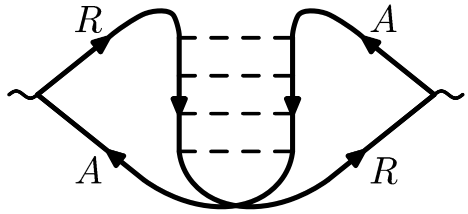


Рис. 9.9

Просуммируйте последовательность графиков на рис. 9.8 при $D = 2$, перерисовав их в виде, показанном на рис. 9.9, и обращаясь с получившейся лестницей так же, как с диффузионной лестницей в задаче 51. Получите поправку к проводимости

$$\delta\sigma(\omega) = -\frac{1}{\pi}\frac{e^2}{h}\ln\frac{1}{\omega\tau}\ , \tag{9.29}$$

где ω — частота внешнего поля. Поправка *расходится* при $\omega\to 0$. Формально это означает, что теория кинетического уравнения неприменима на больших временах $t \geqslant \tau\exp(p_0 l)$, поскольку в этой области $\delta\sigma$ сравнивается с σ_0. Поправка отрицательна и растет по абсолютной величине когда $\omega\to 0$, что указывает на отсутствие проводимости в двумерной системе при $T = 0$ и локализацию электронных состояний.

9.4. Задачи 55 – 57 (слабая локализация и мезоскопика)

В задачах 53 и 54 было показано, что интерференция амплитуд геометрически тождественных путей, пройденных частицей в противоположных направлениях, приводит к особому, квантовомеханическому по своему характеру, вкладу в проводимость. В этой поправке к проводимости, отрицательной по величине, проявляется тенденция к локализации квантовых состояний в случайном потенциале (см. п. 9.7.1).

Величина квантовой поправки (порядка e^2/h) может быть много меньше классической друдевской проводимости $\sigma_{\text{кл}} \approx (e^2/h)\, p_0 l$. Тем не менее, интерференционный характер этого вклада в проводимость приводит к целому ряду ярких эффектов.

Возникновение совешенно нового круга явлений, связанных с квантовой когерентностью омической проводимости, обусловлено весьма большим размером наиболее существенных интерферирующих траекторий по сравнению с длиной свободного пробега. Длины траекторий, определяющих «слаболокализационную» поправку к проводимости, оказываются большими, поскольку характерные времена диффузии, в течение которых имеет место фазовая когерентность, велики по сравнению с временем свободного пробега между соударениями с примесями. Наличие же большого временного масштаба приводит к весьма сильной чувствительности этой поправки к внешним полям и другим факторам, влияющим на когерентность распространения электронных волн.

Уточним это утверждение. Интереференция имеет место для траекторий, время движения по которым не превосходит некоторого характерного *времени сбоя фазы* τ_φ. Величина τ_φ представляет собой новый временной масштаб, не имеющий аналога в классической кинетике. Это время, характеризующее скорость потери фазовой когерентности из-за неупругих процессов, зависит от характера взаимодействия в системе и от температуры. (В отсутствие электрон-электронного и электрон-фононного взаимодействий динамика была бы чисто упругой и сбоя фазы не было бы.) При низких температурах время τ_φ обычно имеет степенную температурную зависимость, $\tau_\varphi \sim T^{-\alpha}$, где величина α положительна и зависит от вида доминирующего взаимодействия [6].

Введем в рассмотрение внешнее магнитное поле. Интерференция траекторий размера L подавляется полем $B \approx \Phi_0/L^2$, где $\Phi_0 = hc/e$ — квант потока. Однако в отсутствие магнитного поля, если имеет место сбой фазы, в квантовую поправку к проводимости вклад дают траектории, время движения по которым не превосходит τ_φ. Поэтому, для подавления квантовой поправки достаточно приложить такое поле, чтобы $t_B = L^2/D = \Phi_0/(DB)$ стало меньше τ_φ. Этот критерий определяет характерное поле $B_c = \Phi_0/D\tau_\varphi$, величина которого достаточна, чтобы подавить квантовую поправку. Поле B_c оказывается заметно меньше полей, необходимых для подавления классической проводимости. Вследствие этого, в условиях слабой локализации возникает большое по величине и отрицательное по знаку магнитосопротивление в классически слабых полях: $\delta\sigma(B) \approx -(e^2/h)(B/B_c)^2$ (см. задачу 55). Это так называемое «аномальное магнитосопротивление» является характерным признаком слабой локализации.

Наиболее красивым явлением, возникающим в режиме слабой локализации, является эффект Ааронова–Бома (задача 56). Он проявляется в периодической зави-

[6] Вопрос о температурной зависимости времени сбоя фазы и о влиянии неупругих процессов на слабую локализацию рассматривался в работах: B. L. Altshuler, A. G. Aronov and D. E. Khmelnitskii, Solid State Comm., v. 39, p. 619 (1981), ibid., J. Phys. C, v. 15, p. 7367 (1982); см. также обзоры: B. L. Altshuler, A. G. Aronov, in: Electron-Electron Interactions in Disordered Systems, North-Holland, Amsterdam, 1985; P. A. Lee, T. V. Ramakrishnan, Rev. Mod. Phys., v. 57, p. 287 (1985).

симости проводимости неодносвязного оразца (цилиндра или кольца) от величины пропущенного через него магнитного потока. То обстоятельство, что проводимость зависит от магнитного потока даже в том случае, когда поле непосредственно внутри проводника пренебрежимо мало, подчеркивает интерференционный характер слабой локализации.

Другое важное явление, наблюдающееся в тех же условиях, что и слабая локализация, — несамоусредняемость проводимости[7]. Оказывается, проводимость может флуктуировать при изменении реализации беспорядка или внешнего поля на величину порядка e^2/h. Величина этих флуктуаций не зависит от размера системы, если он меньше длины сбоя фазы $L_\varphi = (D\tau_\varphi)^{1/2}$. В системах же бо́льшего размера, при $L > L_\varphi$, флуктуации проводимости убывают в соответствии с центральной предельной теоремой, как $(L_\varphi/L)^{3/2}e^2/h$ (в размерности 3).

Интересно, что физические свойства несамоусредняющейся части проводимости могут заметно отличаться от свойств средней проводимости. В частности, как мы убедимся в задаче 57, в условиях эффекта Ааронова–Бома эти два вклада в проводимость осциллируют как функция магнитного потока *с различными периодами* — Φ_0 и $\Phi_0/2$.

Подведем итог. При достаточно низкой температуре, транспортные свойства систем с размерами много больше атомных оказываются существенно квантовыми. Для этого требуется лишь, чтобы выполнялось условие $L \leqslant L_\varphi$. Раздел физики твердого тела, изучающий свойства таких систем, называется *мезоскопикой*, поскольку размеры системы должны быть достаточно велики, чтобы их можно было описывать макроскопически (и проводить измерения!), но одновременно достаточно малы, чтобы можно было наблюдать квантовые эффекты[8].

Задача 55*. (*Аномальное магнитосопротивление*[9].) Слабая локализация подавляется магнитным полем, что приводит к так называемому *отрицательному магнитосопротивлению*. Чувствительность по отношению к магнитному полю качественно объясняется следующим образом. В присутствии поля интерференция амплитуд прохождения электроном одного и того же (случайного) пути в противоположных направлениях ослабляется, поскольку поле делает фазу волновой функции зависящей от направления прохождения траектории, подавляя тем самым интерференцию. Величина эффекта определяется тем, насколько велик вклад в проводимость от траекторий большого размера L. Магнитное поле B как бы исключает вклады траекторий с $BL^2 \geqslant \Phi_0$, охватывающих больше одного кванта потока $\Phi_0 = hc/e$.

Найдите зависимость квантовой поправки к проводимости от магнитного поля в размерности $D = 2, 3$. Считайте поле классически слабым. Используйте выражение (9.96) для слаболокализационной проводимости через куперон, введя в него время

[7]Самоусредняемость — близость случайной величины к своему среднему значению, в классических задачах обычно возникающая вследствие центральной предельной теоремы.

[8]Читатель, желающий узнать побольше об этой активно развивающейся области, может обратиться к популярной статье: B. L. Altshuler, P. A. Lee, Physics Today, v. 41 (12), p. 37 (1988)

[9]см. работу: B. L. Altshuler, D. E. Khmelnitskii, A. I. Larkin, P. A. Lee, *Phys. Rev. B*, v. 20, p. 5142 (1980).

сбоя фазы τ_φ. Поскольку время диффузионного движения по траектории размера L есть $t = L^2/D$, в магнитном поле B «работают» только траектории, время движения по которым меньше $t_B = \Phi_0/(BD)$. Соответственно, следует ожидать зависимости слаболокализационной проводимости от магнитного поля при $t_B \approx \tau_\varphi$, т. е. при $B \approx \Phi_0/(D\tau_\varphi)$.

Для сравнения оценим величину магнитного поля, подавляющего классическую проводимость Друде–Лоренца

$$\sigma_{xx} = \frac{ne^2\tau}{m(1+\omega_c^2\tau^2)}\,, \tag{9.30}$$

где $\omega_B = eB/mc$ — циклотронная частота, τ — время свободного пробега. Согласно (9.30), подавление начинается с полей B_*, при которых $\omega_B \approx 1/\tau$. Сравнивая с характерным полем B_c, подавляющим квантовую поправку, видим, что B_* и B_c отличаются примерно в $E_F\tau_\varphi/\hbar \gg 1$ раз. Поэтому квантовая поправка подавляется полностью уже в классически слабых полях. Кроме того, классический и квантовый эффекты имеют противоположные знаки. Подавление магнитным полем квантовой поправки, отрицательной по знаку, приводит к отрицательному магнитосопротивлению, наблюдаемому в области весьма слабых полей. Классическое же магнитосопротивление положительно.

Задача 56*. (*Эффект Ааронова–Бома*[10].) В задаче 55 было показано, что подавление слабой локализации магнитным полем приводит к аномальному магнитосопротивлению. Но этот эффект накладывается на классическое магнитосопротивление. Нельзя ли сделать так, чтобы эффект классического магнитосопротивления исключался автоматически? Оказывается, можно. Для этого необходимо сделать так, чтобы магнитное поле в образце вообще отсутствовало, но вектор-потенциал был бы отличен от нуля. Поскольку в уравнение для куперона, полученное в задаче 55, входит именно вектор-потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, слаболокализационная проводимость будет «чувствовать» такое поле. Конечно, поскольку проводимость калибровочно инвариантна, интересующий нас вектор-потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ не должен сводиться к чистой калибровке.

Учитывая эти соображения, рассмотрим неодносвязный образец, а именно, металлический цилиндр, через который пропущен магнитный поток Φ. Представим себе, что магнитное поле отлично от нуля только в полости цилиндра. Тогда на поверхности цилиндра имеется отличный от нуля вектор-потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, такой, что

$$\oint \mathbf{A}d\mathbf{r} = \Phi\,, \tag{9.31}$$

где интеграл берется по любому контуру, охватывающему полость. Такой вектор-потенциал меняет фазы волновых функций электронов и влияет на интерференционные явления (это влияние называется *эффектом Ааронова-Бома*).

Найдите зависимость проводимости цилиндра, усредненной по беспорядку, от магнитного потока Φ. Покажите, что эффект Ааронова-Бома приводит к осциллирующей зависимости проводимости от Φ с периодом $\Phi_0/2 = hc/2e$.

[10] см. работу: Б. Л. Альтшулер, А. Г. Аронов, Б. З. Спивак, Письма в ЖЭТФ, т. 33, с. 101 (1981).

Задача 57*. (*Мезоскопическая проводимость*[11].) Найденные в задаче 56 осцилляции проводимости цилиндра, как функции магнитного потока, с периодом $\Phi_0/2$ выглядят несколько подозрительно. Ведь и энергия, и волновая функция каждого электрона системы периодичны по магнитному потоку с периодом Φ_0. Например, для электрона, двигающегося по кольцу без примесей, уровни энергии есть $E_m = \hbar^2/(2m_eR^2)\,(m - \Phi/\Phi_0)^2$, где m_e — масса электрона, а m — его магнитное квантовое число. При $\Phi = \Phi_0/2$ система совершенно не похожа на систему с нулевым потоком. Электрон, обходя цилиндр, меняет при $\Phi = \Phi_0/2$ знак своей волновой функции, т. е. эффект магнитного потока оказывается наиболее сильным. Каким же образом период осцилляций проводимости оказывается равным $\Phi_0/2$?

Ответ состоит в том, что это есть результат усреднения по беспорядку. Действительно, вычисляя слаболокализационную поправку, мы учитываем только интерференцию двух траекторий, возвращающихся в исходную точку. Иными словами, мы вычисляем интерференционный вклад в вероятность «застревания» электрона в какой-то точке образца. Однако имеется также интерференционный вклад в вероятность перемещения электрона из одной точки в другую, и он устроен иначе. Этот вклад определяется траекториями, соединяющими две различные точки A и B и обходящими полость цилиндра с разных сторон. Разность фаз между такими траекториями равна $2\pi\Phi/\Phi_0$. Таким образом, интерференция между ними приводит к осцилляциям с периодом Φ_0. Однако вклад этих траекторий содержит также большую фазу порядка $\theta = p_F L$, где L — длина траектории. Эта фаза зависит от формы траектории, т. е. от реализации беспорядка. Если мы теперь усредним проводимость по беспорядку, то этот вклад исчезнет из-за усреднения по фазе θ. Если же по беспорядку не усреднять, а рассматривать образец с конкретной реализацией беспорядка, то его проводимость должна иметь период Φ_0.

При этом возникает необычная ситуация: неусредненная по беспорядку проводимость, зависящая от конкретной реализации случайного потенциала, осциллирует как функция Φ с периодом Φ_0, в два раза бо́льшим, чем период $\Phi_0/2$ осцилляций усредненной проводимости. Чтобы проверить справедливость этой качественной картины, нужно вычислить величину, в которой вклад с периодом Φ_0 не выпадает при усреднении по беспорядку. Чтобы изучить, как проводимость образца с данной реализацией беспорядка зависит от магнитного потока, рассмотрим произведение проводимостей при разных значениях потока и усредним его:

$$K_{\Phi,\Phi'} = \langle\sigma_{\alpha\beta}(\Phi)\sigma_{\mu\nu}(\Phi')\rangle_{\text{бесп}} - \langle\sigma_{\alpha\beta}(\Phi)\rangle_{\text{бесп}}\langle\sigma_{\mu\nu}(\Phi')\rangle_{\text{бесп}}\,. \tag{9.32}$$

Каждая из проводимостей в этом выражении дается до усреднения по беспорядку диаграммой на рис. 9.5, в которой жирная линия обозначает точную функцию Грина, изображенную на рис. 9.1. При усреднении по беспорядку нас интересуют перекрестные члены, поэтому мы должны связать примесными линиями функции Грина в разных петлях. Из-за усреднения по направлениям импульсов примесную

[11] см. работы: P. A. Lee, and A. D. Stone, *Phys. Rev. Lett.*, v. 55, p. 1622 (1985); Б. Л. Альтшулер, Письма в ЖЭТФ, т. 51, с. 530 (1985).

лестницу в каждую из петель вставлять не надо. При этом мы должны постараться сделать так, чтобы примесные линии не пересекались. В результате получаются две диаграммы, показанные на рис. 9.10.

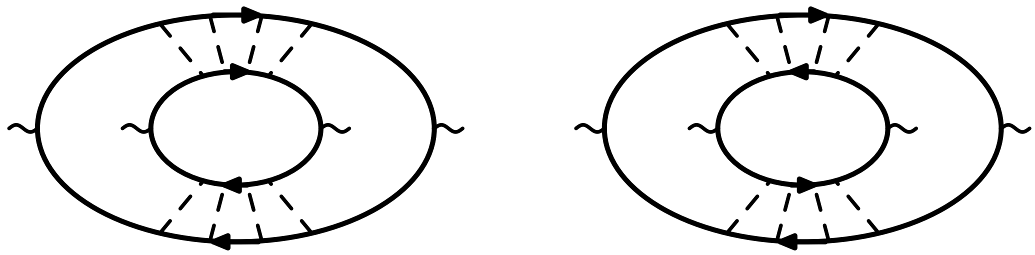


Рис. 9.10

Вычислите эти диаграммы и найдите коррелятор проводимостей (9.32) при разных значениях магнитного потока. Данная задача иллюстрирует то любопытное обстояельство, что физические свойства усредненной по беспорядку величины (в данном случае, проводимости) могут принципиально отличаться от свойств точной, неусредненной величины.

9.5. Решения задач 50 – 57

50 а. Найдем функцию Грина, усредненную по беспорядку, используя импульсное представление. Гамильтониан имеет вид $\widehat{\mathcal{H}} = \widehat{\mathcal{H}}_0 + \widehat{\mathcal{H}}_{\rm int}$, где $\widehat{\mathcal{H}}_0$ — кинетическая энергия, а $\widehat{\mathcal{H}}_{\rm int} = \sum\limits_i \widehat{\mathcal{H}}_i$ — потенциал примесей:

$$\widehat{\mathcal{H}}_i = \iint \psi^+(\mathbf{p})u(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\psi(\mathbf{p}')\, e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\mathbf{r}_i}\, \frac{d^3\mathbf{p}\, d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^6}\,. \tag{9.33}$$

(Здесь $u(\mathbf{p}) = \int u(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{pr}}d^3\mathbf{r}$ — фурье-образ потенциала одной примеси.) Считая $\widehat{\mathcal{H}}_{\rm int}$ возмущением, разложим функцию Грина в ряд по потенциалу и усредним почленно (рис. 9.11).

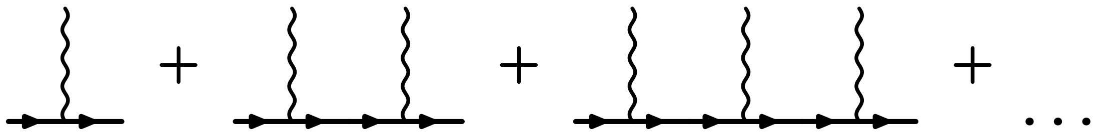


Рис. 9.11

Первое слагаемое от потенциала не зависит, и есть просто функция Грина свободной частицы:

$$G^{(0)}(\varepsilon, \mathbf{p}, \mathbf{p}') = (2\pi)^3 G_0(\varepsilon, \mathbf{p})\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\,. \tag{9.34}$$

Вторoе слагаемое имеет вид $\sum_i G_i^{(1)}$, где

$$G_i^{(1)}(\varepsilon, \mathbf{p}, \mathbf{p}') = G_0(\varepsilon, \mathbf{p})u(\mathbf{p}-\mathbf{p}')e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\mathbf{r}_i}G_0(\varepsilon, \mathbf{p}')\,. \tag{9.35}$$

Усреднение по положениям примесей $\mathbf{r}_i$ можно выполнить с помощью формулы

$$\langle e^{i\mathbf{qr}}\rangle = \frac{1}{V}\int e^{i\mathbf{qr}_i}\,d^3r_i = \frac{1}{V}(2\pi)^3\delta(\mathbf{q})\,. \tag{9.36}$$

Получаем

$$\langle {G_i}^{(1)}(\varepsilon,\mathbf{p},\mathbf{p}')\rangle = [G_0(\mathbf{p})]^2(2\pi)^3\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\frac{u_0}{V}\,. \tag{9.37}$$

Сумма по i дает

$$\langle G^{(1)}(\varepsilon,\mathbf{p},\mathbf{p}')\rangle = nu_0(2\pi)^3\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')[G_0(\mathbf{p})]^2\,, \tag{9.38}$$

где $n = N/V$ — концентрация примесей.

Перейдем к третьему слагаемому, имеющему вид $\sum_{ij} G_{ij}^{(2)}$, где

$$\begin{aligned} G_{ij}^{(2)}(\varepsilon,\mathbf{p},\mathbf{p}') &= G_0(\mathbf{p})G_0(\mathbf{p}')\,\times \\ &\times\int u(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)u(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}')G_0(\mathbf{p}_1)e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)\mathbf{r}_i-i(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}')\mathbf{r}_j}\,\frac{d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3}\,. \end{aligned} \tag{9.39}$$

Это выражение содержит вклады двух различных процессов: двукратного рассеяния на одной примеси ($i = j$), и однократного рассеяния на двух различных примесях ($i \neq j$). При усреднении эти вклады надо разделять.

В случае $i = j$ усредняем по формуле

$$\langle e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\mathbf{r}_i}\rangle = \frac{1}{V}(2\pi)^3\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \tag{9.40}$$

и получаем

$$\langle G_{ii}^{(2)}(\varepsilon,\mathbf{p},\mathbf{p}')\rangle = \frac{1}{V}(2\pi)^3\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')G_0^2(\varepsilon,\mathbf{p})\int|u(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)|^2G_0(\varepsilon,\mathbf{p}_1)\,\frac{d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3}\,. \tag{9.41}$$

Во втором случае ($i \neq j$) усреднение выглядит так:

$$\langle e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)\mathbf{r}_i-i(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}')\mathbf{r}_j}\rangle = \frac{1}{V^2}(2\pi)^6\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)\delta(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}')\,. \tag{9.42}$$

Таким образом, находим

$$\langle G_{ij}^{(2)}(\varepsilon,\mathbf{p},\mathbf{p}')\rangle = \frac{1}{V^2}(2\pi)^3\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')G_0^3(\varepsilon,\mathbf{p})u_0^2\,. \tag{9.43}$$

После суммирования по всем примесям выражение (9.41) умножается на N, а выражение (9.43) — на N^2. Получаются два вклада, пропорциональные первой и второй степени концентрации примесей $n = N/V$, соответственно.

При усреднении следующих членов разложения функции Грина по потенциалу примесей, третьей и более высоких степеней, обозначенных точками на рис. 9.11, поступим так. В каждом порядке выделим процессы рассеяния, когда на каждой примеси электрон рассеивается либо один раз, либо два. Более высокими порядками будем пренебрегать, поскольку потенциал слабый. После усреднения и суммирования ряда, сводящегося, как обычно, к геометрической прогрессии, вклады однократных и двукратных процессов рассеяния выражаются как собственно-энергетическая часть усредненной гриновской функции. Ее нетрудно найти, сравнивая выражения (9.38), (9.41), и (9.43) с разложением

$$\langle G(\varepsilon, \mathbf{p}, \mathbf{p}')\rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \left(G_0^{-1}(\varepsilon, \mathbf{p}) - \left\langle \Sigma \right\rangle\right)^{-1} \tag{9.44}$$

в ряд по Σ.

Отметим еще раз, что пренебречь двукратным рассеянием по сравнению с однократными нельзя. Согласно теореме унитарности (см. задачу 15), именно двукратные процессы рассеяния и определяют борновское сечение рассеяния. Действительно, сечение рассеяния равно мнимой части амплитуды рассеяния, в то время как борновская амплитуда первого порядка чисто вещественна.

Выражение (9.38) дает вклад в Σ, равный

$$\left\langle \Sigma^{(1)} \right\rangle = n u_0 \,, \tag{9.45}$$

где $n = N/V$. Выражение (9.43) поправок к Σ не дает. Оно представляет собой просто член второго порядка в разложении $\langle G(\varepsilon, \mathbf{p}, \mathbf{p}')\rangle$ по $\left\langle \Sigma^{(1)} \right\rangle$. Вклад $\left\langle \Sigma^{(1)} \right\rangle$ действителен и не зависит от p. Поэтому его можно интерпретировать как перенормировку химического потенциала

$$\mu \to \mu^* = \mu - \langle \Sigma^{(1)} \rangle \,. \tag{9.46}$$

Гораздо больший интерес представляет вклад от двукратных процессов рассеяния. Выражение (9.41) дает

$$\left\langle \Sigma^{(2)} \right\rangle_{(ii)} = \frac{N}{V} \int |u(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1)|^2 G_0(\mathbf{p}, \omega) \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \,. \tag{9.47}$$

Как мы видели в гл. 3, с точки зрения теории рассеяния это выражение представляет собой второй член борновского разложения амплитуды рассеяния вперед. Его мнимая часть, с точностью до коэффициента, есть просто полное борновское сечение рассеяние, пропорциональное квадрату борновской амплитуды первого порядка, проинтегрированной по углам.

Найдем $\Sigma^{(2)}$ для δ-функционных примесей (для краткости знак усреднения по примесям здесь и далее будем опускать). Фурье-разложение потенциала $u(\mathbf{r}) = u_0 \delta^{(3)}(\mathbf{r})$ есть константа: $u(\mathbf{q}) = \int u(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}\, d^3 r = u_0$. Поэтому

$$\begin{aligned}
\Sigma^{(2)} &= \int |u(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1)|^2 G_0(\mathbf{p}_1) \frac{d^3 \mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} = u_0^2 \int G_0(\mathbf{p}_1) \frac{d^3 \mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} = \\
&= \frac{u_0^2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{\varepsilon - \xi + i0 \operatorname{sign} \varepsilon} = \frac{4\pi u_0^2}{(2\pi)^3} \frac{p_0^2}{V_0} \int \frac{d\xi}{\varepsilon - \xi + i0 \operatorname{sign} \varepsilon} = \\
&= \frac{4\pi u_0^2}{(2\pi)^3} m p_0 (-\pi i) \operatorname{sign} \varepsilon = -\frac{i}{2\pi} u_0^2 m p_0 \operatorname{sign} \varepsilon \,.
\end{aligned} \tag{9.48}$$

Интегрирование по импульсу $\mathbf{p}_1$ в ξ-приближении выделяет вклад, связанный с резкой ферми-поверхностью. Он — мнимый, и его знак меняется на ферми-поверхности скачком, как и должно быть согласно аналитическим свойствам причинной гриновской функции. Более точное интегрирование, с учетом вкладов от импульсов, далеких от ферми-поверхности, могло бы дать вклад в вещественную часть $\Sigma^{(2)}$, регулярную вблизи ферми-поверхности. Рассматривать такие вклады, представляющие собой поправки более высокого порядка к химическому потенциалу μ, мы не будем. Таким образом, находим

$$\Sigma^{(2)} = -\frac{i}{2\tau}\,\mathrm{sign}\,\varepsilon\,, \tag{9.49}$$

где время рассеяния τ дается выражением

$$\frac{1}{\tau} = \frac{mp_0 n}{\pi}\left|\int u(\mathbf{r})\,d^3r\right|^2. \tag{9.50}$$

Окончательно получаем функцию Грина в виде

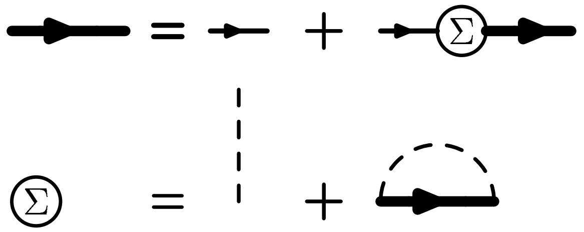
$$\langle G(\varepsilon,\mathbf{p},\mathbf{p}')\rangle = \frac{(2\pi)^3\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')}{\varepsilon - p^2/2m + \mu^* + \frac{i}{2\tau}\,\mathrm{sign}\,\varepsilon}\,. \tag{9.51}$$

К такому же результату можно прийти и другим, несколько менее тяжеловесным способом, используя уравнение Дайсона. Снова представим точную функцию Грина в виде ряда рис. 9.11 по потенциалу. Усредняя каждый член по положениям примесей, будем пользоваться стандартными обозначениями: потенциал примеси обозначим волнистой линией, причем в случаях, когда рассеяние на одной и той же примеси происходит два раза [12], будем вместо двух волнистых линий рисовать одну штриховую линию, соединяющую точки взаимодействия.

Далее, каждую диаграмму, дающую вклад в среднее гриновской функции, разобьем на связные графики, причем, естественно, будем считать штриховые линии составной частью графиков. (Напомним, что связным называется график, который нельзя разбить на части, удалив какую-нибудь одну гриновскую функцию.) Сумма всех таких связных графиков есть собственно-энергетическая часть Σ. С помощью уравнения Дайсона функция Грина G может быть выражена через Σ и затравочную гриновскую функцию G_0 (см. (4.9)). Таким образом получаем:

$$\langle G\rangle = G_0 + G_0\Sigma\langle G\rangle\,, \quad \text{или} \quad \langle G\rangle^{-1} = G_0^{-1} - \Sigma\,. \tag{9.52}$$

Здесь затравочная функция Грина есть $G_0^{-1} = \varepsilon - \xi + i0\,\mathrm{sign}\,\varepsilon$.



[12] В борновском приближении для слабого потенциала рассеяния достаточно ограничиться однократными и двукратными процессами рассеяния.

Рис. 9.12

Собственно-энергетическая часть, взятая в борновском приближении, содержит вклад от однократного взаимодействия с потенциалом примесей, которому сопоставляется среднее от этого потенциала nu_0, а также вклад от двукратного рассеяния, изображаемый на диаграммах штриховой линией, которой соответствует борновская амплитуда второго порядка. При этом, следуя «основному принципу» техники усреднения по беспорядку (см. разд. 9.6), мы пренебрегаем графиками с пересекающимися линиями. Графически, уравнение Дайсона для собственно-энергетической части имеет вид, показанный на рис. 9.12.

Получается следующее уравнение:

$$\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p}) = nu_0 + n \int \frac{|u(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)|^2}{\varepsilon - \xi_{\mathbf{p}_1} - \Sigma(\varepsilon, \mathbf{p}_1) + i0 \operatorname{sign} \varepsilon} \frac{d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} . \tag{9.53}$$

Чтобы решить это уравнение, заметим, что в случае δ-функционных примесей фурье-компонента $u(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1) = u_0$ выносится из-под интеграла (9.53). Это позволяет искать решение в виде функции $\Sigma(\varepsilon)$, зависящей только от ε. Будем искать решение в такой форме: $\Sigma(\varepsilon) = \delta\mu - (i/2\tau) \operatorname{sign} \varepsilon$. Подставив эту функцию в уравнение Дайсона (9.53), убеждаемся, что решение дается суммой выражений (9.45) и (9.49). Итак, усредняя по беспорядку, находим

$$\langle G(\varepsilon, \mathbf{p}) \rangle = \frac{1}{\varepsilon - \frac{p^2}{2m} + \mu^* + \frac{i}{2\tau} \operatorname{sign} \varepsilon} . \tag{9.54}$$

50 б. Теперь нетрудно получить среднее гриновской функции в координатном представлении. В фурье-образе функции Грина $G(\varepsilon, \mathbf{r}) = \int G(\varepsilon, \mathbf{p}) e^{i\mathbf{pr}} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}$ переходим к интегралу по ξ:

$$\langle G(\varepsilon, \mathbf{r}) \rangle = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int \frac{p_0}{v_0|\mathbf{r}|} \frac{\sin |\mathbf{r}| p(\xi) \; d\xi}{\varepsilon - \xi + \frac{i}{2\tau} \operatorname{sign} \varepsilon} , \tag{9.55}$$

где $p(\xi) = p_0 + \xi/v_F$. Выполнить интегрирование по ξ можно точно таким же способом, как в задаче 22 (см. формулы (5.23) и (5.25)). При этом сдвиг полюса $\varepsilon \to \varepsilon + i \operatorname{sign} \varepsilon / 2\tau$ приводит к дополнительному экспоненциальному множителю:

$$\langle G(\varepsilon, \mathbf{r}) \rangle = G_0(\varepsilon, \mathbf{r}) \; e^{-|\mathbf{r}|/2l} , \tag{9.56}$$

где $G_0(\varepsilon, \mathbf{r}) = -\frac{m}{2\pi|\mathbf{r}|} \exp\left[i \operatorname{sign} \varepsilon (p_0 + \varepsilon/v_F)|\mathbf{r}|\right]$, а $l = v_F\tau$ — длина свободного пробега, вычисленная по борновскому сечению рассеяния. В результате получается квазиклассическое выражение (9.18).

51. Вычислим проводимость в однородном переменном электрическом поле, используя теорию возмущений по малой концентрации примесей. Воспользуемся приведенным в условии задачи соотношением (9.15) между проводимостью и мацубаровским коррелятором ток–ток $\Pi_{\alpha\beta}(i\omega_n)$.

Даже если нас интересует статическая проводимость, лучше сначала рассмотреть проводимость на конечной частоте, а затем устремить частоту к нулю. Дело в том, проводимость «плохо себя ведет» в пределе нулевой концентрации примесей. Действительно, статическая проводимость чистого металла, т. е. идеального ферми-газа, обращается в бесконечность, в то время как проводимость на переменном токе конечна: $\sigma(\omega) = ine^2/m\omega$. Поэтому, даже в присутствии рассеяния, правильно сначала рассматривать ток в переменном поле, и уже потом переходить к статическому пределу.

Согласно (9.22), для невзаимодействующих частиц коррелятор ток–ток выражается через произведение двух гриновских функций. Графически выражение (9.22) для $\Pi_{\alpha\beta}(i\omega_n)$ изображается петлевой диаграммой, показанной на рис. 9.13. Волнистые линии в вершинах обозначают компоненты оператора тока $\widehat{j}_\alpha = -i\frac{e\hbar}{2m}\psi^+\nabla_\alpha\psi +$ h.c.

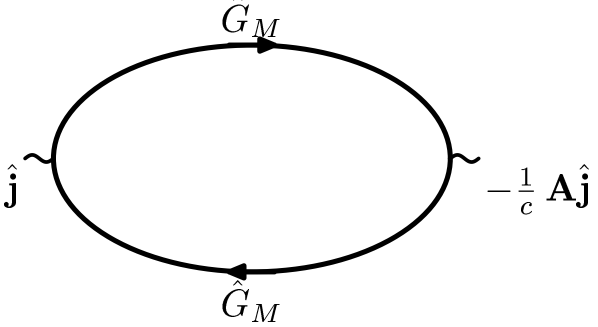


Рис. 9.13

Запишем среднее коррелятора $\Pi_{\alpha\beta}(i\omega_n)$ по беспорядку:

$$\langle \Pi_{\alpha\beta}(i\omega_n)\rangle \;=\; e^2\,T\sum_{\varepsilon_k}\left\langle \mathrm{Tr}\left(\widehat{G}^M(i\varepsilon_k + i\omega_n)\widehat{v}_\alpha\widehat{G}^M(i\varepsilon_k)\widehat{v}_\beta\right)\right\rangle\,, \tag{9.57}$$

где $\varepsilon_k = (2k+1)\pi T$, а $\widehat{v}_\alpha = \widehat{p}_\alpha/m$ — компоненты оператора скорости. Результат усреднения можно представить как сумму графиков, имеющих вид петли из мацубаровских функций Грина, показанной на рис. 9.13, всевозможными способами одетой примесными линиями.

Главный вклад при усреднении по беспорядку в случае малой концентрации примесей $p_0 l \gg 1$ дают графики с непересекающимися примесными линиями (рис. 9.14). Если рассматривать только графики такого типа, то усреднение сильно упрощается.

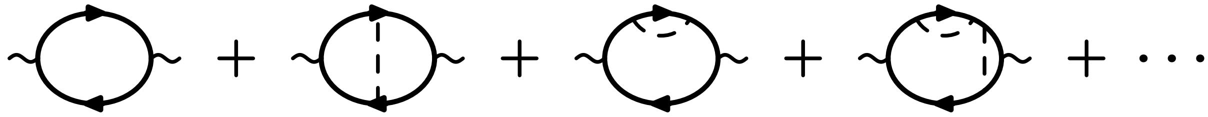


Рис. 9.14

Заметим что, вообще говоря, среднее $\langle G^M(\varepsilon)G^M(\varepsilon')\rangle$ по беспорядку *не равно* произведению средних $\langle G^M(\varepsilon)\rangle\langle G^M(\varepsilon')\rangle$. В рассматриваемом приближении непересекающихся примесных линий в разность $\langle G^M(\varepsilon)G^M(\varepsilon')\rangle - \langle G^M(\varepsilon)\rangle\langle G^M(\varepsilon')\rangle$ дают вклад диаграммы, содержащие примесные линии, соединяющие $G^M(\varepsilon)$ и $G^M(\varepsilon')$, подобные второму и четвертому графикам на рис. 9.14. Иными словами, отличие $\langle G^M(\varepsilon)G^M(\varepsilon')\rangle$ от $\langle G^M(\varepsilon)\rangle\langle G^M(\varepsilon')\rangle$ обусловлено примесями, входящими одновременно и в $G^M(\varepsilon)$, и в $G^M(\varepsilon')$.

Однако, оказывается, что для точечных δ-примесей *любые* такие диаграммы с непересекающимися примесными линиями оказываются равными нулю. Причина этого заключается в том, что для точечных примесей величина диаграммы не зависит от передаваемого по примесной линии импульса. Поэтому, соединив две функции Грина на рис. 9.13 штриховой линией, мы «развязываем» импульсы в вершинах диаграммы. В результате, поскольку токовая вершина нечетна по импульсу, любая такая диаграмма обращается в нуль при интегрировании по импульсам. Итак, в задаче о проводимости в приближении непересекающихся примесных линий отличие $\langle G^M(\varepsilon)G^M(\varepsilon')\rangle$ от $\langle G^M(\varepsilon)\rangle\langle G^M(\varepsilon')\rangle$ можно не учитывать.

Заметим, что с точно такой же ситуацией мы уже встречались в задаче 14, где точечность рассеивателя приводила к занулению диаграмм с разделенными токовыми вершинами при интегрировании по импульсам.

При этом существенно, что рассеяние чисто изотропное, т. е. при рассеянии отсутствует какая-либо корреляция между направлениями начальной и конечной скорости. Поэтому описанное упрощение имеет место только для точечных примесей, рассеивающих в s-канале, когда $\tau_{\rm tr} = \tau$. Для примесей, рассеивающих не только в s-канале, эти два времени не равны. В этом случае приходится суммировать лестницу, напоминающую диффузионную (см. рис. 9.7), но с векторными вершинами, в результате чего и происходит замена τ на $\tau_{\rm tr}$.

Учитывая это обстоятельство, мы видим, что усреднение двух функций Грина в (9.57) расцепляется в произведение средних:

$$\langle \Pi_{\alpha\beta}(i\omega_n)\rangle \,=\, e^2\,T\sum_{\varepsilon_k}\,{\rm Tr}\left(\left\langle \widehat{G}^M(i\varepsilon_k+i\omega_n)\right\rangle \widehat{v}_\alpha \left\langle \widehat{G}^M(i\varepsilon_k)\right\rangle \widehat{v}_\beta\right)\ . \tag{9.58}$$

Функция Грина, усредненная по беспорядку, согласно (9.17), имеет вид $\langle G(\varepsilon_k,\mathbf{p})\rangle = 1/(i\varepsilon_k-\xi(\mathbf{p})+\frac{i}{2\tau}\,{\rm sign}\,\varepsilon_k)$. Поэтому выражение (9.58) можно записать так:

$$\langle \Pi_{\alpha\beta}(i\omega_n)\rangle \,=\, e^2\,T\sum_{\varepsilon_k}\int \frac{(p_\alpha/m)(p_\beta/m)}{(i\tilde\varepsilon'_k-\xi(\mathbf{p}))(i\tilde\varepsilon_k-\xi(\mathbf{p}))}\,\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,, \tag{9.59}$$

где $\tilde\varepsilon'_k=\varepsilon_k+\omega_n+\frac{1}{2\tau}\,{\rm sign}(\varepsilon_k+\omega_n)$, $\tilde\varepsilon_k=\varepsilon_k+\frac{1}{2\tau}\,{\rm sign}\,\varepsilon_k$.

Прежде чем приступить к вычислению выражения (9.59), проверим, что выполняется тождество $\langle\Pi_{\alpha\beta}(0)\rangle=-(ne^2/m)\,\delta_{\alpha\beta}$. Для этого воспользуемся соотношением

$$\mathbf{p}\,\left\langle \widehat{G}^M(i\varepsilon,\mathbf{p})\right\rangle^2 \,=\, m\,\nabla_{\mathbf{p}}\left\langle \widehat{G}^M(i\varepsilon,\mathbf{p})\right\rangle\,, \tag{9.60}$$

и представим выражение (9.59), взятое при $\varepsilon'_k=\varepsilon_k$, в таком виде:

$$\langle\Pi_{\alpha\beta}(0)\rangle \,=\, \frac{e^2}{m}T\sum_{\varepsilon_k}\int p_\alpha\nabla_{p_\beta}\left\langle \widehat{G}^M(i\varepsilon_k,\mathbf{p})\right\rangle\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,. \tag{9.61}$$

Интеграл по $d^3\mathbf{p}$ возьмем по частям, перенеся действие ∇_{p_β} на p_α:

$$\langle\Pi_{\alpha\beta}(0)\rangle \,=\, -\frac{e^2}{m}\,\delta_{\alpha\beta}\,T\sum_{\varepsilon_k}\int \left\langle \widehat{G}^M(i\varepsilon_k,\mathbf{p})\right\rangle\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,. \tag{9.62}$$

Учитывая известное соотношение (2.12) между плотностью частиц и функцией Грина, получаем требуемое тождество.

Перейдем теперь к вычислению выражения (9.59). С технической точки зрения, наиболее просто было бы проинтегрировать вначале по $d^3\mathbf{p}$. Однако формально этот интеграл расходится при $|\mathbf{p}| \gg p_0$. Чтобы обойти эту трудность, рассмотрим разность $\langle\Pi_{\alpha\beta}(i\omega_n)\rangle \;-\; \langle\Pi_{\alpha\beta}(0)\rangle$ и представим ее в таком виде:

$$\frac{e^2}{m^2}T\sum_{\varepsilon_k}\int p_\alpha p_\beta\left[\left\langle\widehat{G}^M(i\varepsilon_k+i\omega_n,\mathbf{p})\right\rangle-\left\langle\widehat{G}^M(i\varepsilon_k,\mathbf{p})\right\rangle\right]\left\langle\widehat{G}^M(i\varepsilon_k,\mathbf{p})\right\rangle\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,. \tag{9.63}$$

В этом выражении интеграл по $d^3\mathbf{p}$ сходится, и более того, как нетрудно видеть, его величина определяется малой окрестностью ферми-поверхности: $\delta\xi \approx \max[\omega_n, \tau^{-1}]$. Поэтому в (9.63) можно перейти к интегрированию по ξ, заменив среднее по углам от $p_\alpha p_\beta$ на $\frac{1}{3}p_0^2\delta_{\alpha\beta}$. Интеграл по ξ от двух слагаемых в (9.63) можно вычислять по отдельности. (Отмеченная выше расходимость при больших $\mathbf{p}$ не имеет отношения к вкладу окрестности ферми-поверхности $\xi \approx \hbar/\tau$, который учитывается интегрированием по ξ.)

Взяв интеграл по ξ от первого слагаемого в (9.63), получаем:

$$\frac{\pi}{3}e^2v_F^2\nu_0\,T\sum_{\varepsilon_k}\frac{\operatorname{sign}\varepsilon_k'-\operatorname{sign}\varepsilon_k}{\tilde\varepsilon_k'-\tilde\varepsilon_k}\,, \tag{9.64}$$

где $\tilde\varepsilon_k'$ и $\tilde\varepsilon_k$ имеют тот же смысл, что и в (9.59). Нетрудно видеть, что интеграл по ξ от второго слагаемого в (9.63) обращается в нуль. Наконец, вычисляя тривиальную сумму по ε_k, имеем

$$\langle\Pi_{\alpha\beta}(i\omega_n)\rangle \;-\; \langle\Pi_{\alpha\beta}(0)\rangle \;=\; \frac{ne^2}{m}\,\frac{|\omega_n|}{\omega_n+\frac{1}{\tau}\operatorname{sign}\omega_n}\,. \tag{9.65}$$

Мы воспользовались здесь тем, что $\frac{1}{3}\nu_0 v_F^2 = n/m$.

Чтобы найти проводимость, воспользуемся доказанным тождеством (9.16). Поскольку векторный потенциал $\mathbf{A}$ и электрическое поле $\mathbf{E}$ связаны соотношением $\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}$, выражение для проводимости можно записать в таком виде:

$$\sigma_{\alpha\beta}(i\omega_n) \;=\; \frac{1}{\omega_n}\left[\Pi_{\alpha\beta}(i\omega_n) \;-\; \Pi_{\alpha\beta}(0)\right]\,. \tag{9.66}$$

Подставляя в (9.66) найденный результат (9.65), получаем

$$\sigma_{\alpha\beta}(i\omega_n) \;=\; \frac{ne^2\,\delta_{\alpha\beta}}{m(|\omega_n|+\frac{1}{\tau})}\,. \tag{9.67}$$

Для перехода к функциям вещественной частоты надо выполнить аналитическое продолжение с верхней мнимой полуоси: $i\omega_n \to \omega$. В результате получаем искомую формулу Друде (9.19).

Обратим внимание на то, что результат не зависит от температуры. Этого и следовало ожидать, поскольку проводимость — одночастичный эффект. Поэтому, если время рассеяния τ не зависит от энергии, проводимость не должна зависеть от теплового размытия фермиевской ступеньки.

52. Нам необходимо усреднить коррелятор плотность-плотность (9.9) по беспорядку. На этот раз, в отличие от предыдущей задачи, уже нельзя игнорировать отличие $\langle G^M G^M\rangle$ от $\langle G^M\rangle\langle G^M\rangle$. (Дело в том, что теперь мы имеем дело не с векторными вершинами, как при вычислении коррелятора ток–ток, а со скалярными, соответствующими плотности частиц.) В главном порядке по параметру $(p_0 l)^{-1}$ интересующее нас среднее дается последовательностью лестничных диаграмм, показанной на рис 9.7.

Чтобы просуммировать эти диаграммы, обратим внимание на то, что каждая лестничная диаграмма разбивается на отдельные блоки («пузырьки»), окруженные с двух сторон линиями примесей («перекладинами»). При этом интегрирования по импульсам в каждом блоке независимы, так как примесная линия не зависит от переданного импульса. Заметим также, что из-за закона сохранения импульса разность импульсов в каждом блоке постоянна и равна импульсу $\mathbf{q}$, входящему в вершину. Кроме того, поскольку рассеяние на примесях упругое, частоты во всех ступенях лестницы попарно совпадают. Иными словами, независимо от числа перекладин, интегрирование происходит всего по одной частоте. Рассмотрим сначала первый член суммы («пузырек без перекладин»). Выражение для него выглядит так:

$$T\sum_{\varepsilon_k}\int \langle G^M(i\varepsilon_k+i\omega_n,\mathbf{p}_+)\rangle\langle G^M(i\varepsilon_k,\mathbf{p}_-)\rangle\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,, \tag{9.68}$$

где $\varepsilon_k=(2k+1)\pi T$, $\omega_n=2n\pi T$, $\mathbf{p}_\pm=\mathbf{p}\pm\frac{1}{2}\mathbf{q}$, а функции Грина, усредненные по беспорядку, имеют стандартный вид:

$$\langle G^M(i\varepsilon,\mathbf{p})\rangle\;=\;\frac{1}{i\varepsilon-\xi(\mathbf{p})+\frac{i}{2\tau}\operatorname{sign}\varepsilon}\,, \tag{9.69}$$

где, как обычно, $\xi(\mathbf{p})=\mathbf{p}^2/2m-\mu$. При интегрировании по $\mathbf{p}$, как нетрудно видеть, выражение (9.68) дает существенно различные результаты, в зависимости от того, находятся ли полюсы двух гриновских функций по одну или по разные стороны от вещественной оси.

Рассмотрим этот вопрос более подробно. Воспользуемся известной связью мацубаровских функций с запаздывающими и опережающими функциями Грина:

$$\begin{aligned}G^M(i\varepsilon_k,\mathbf{p})&=\theta(\varepsilon_k)G_R(i\varepsilon_k,\mathbf{p})+\theta(-\varepsilon_k)G_A(i\varepsilon_k,\mathbf{p})=\\&=\begin{cases}G_R(i\varepsilon_k,\mathbf{p}) & \text{при } \varepsilon_k>0\,,\\ G_A(i\varepsilon_k,\mathbf{p}) & \text{при } \varepsilon_k<0\,.\end{cases}\end{aligned} \tag{9.70}$$

При вычислении выражения (9.68), в зависимости от относительного знака частот ε_k и $\varepsilon_k+\omega_n$, возникает два принципиально разных случая, которые следует рассматривать по–отдельности.

Знак частоты определяет, будет ли соответствующая гриновская функция запаздывающей или опережающей. В случае, когда знаки ε_k и $\varepsilon_k+\omega_n$ одинаковы, возникают средние вида $\langle G_R G_R\rangle$ и $\langle G_A G_A\rangle$. Они дают так называемый *статический* вклад в коррелятор, не обладающий дисперсией при $\omega\tau \approx 1$ и $|\mathbf{q}|l \approx 1$. В случае же различных знаков частот ε_k и $\varepsilon_k+\omega_n$, получаются средние вида $\langle G_R G_A\rangle$ и $\langle G_A G_R\rangle$. Они дают так называемый *кинетический* вклад в коррелятор, обладающий существенной дисперсией при $\omega\tau \approx 1$ и $|\mathbf{q}|l \approx 1$.

Обоснование утверждения о характере частотной дисперсии статического и кинетического корреляторов будет дано ниже. Здесь же приведем следующее простое соображение, касающееся пространственной дисперсии. В координатном представлении

$$\langle G_R(\mathbf{r})\rangle^2 \sim \exp\left(2ip_0|\mathbf{r}| - |\mathbf{r}|/l\right) , \quad \langle G_A(\mathbf{r})\rangle^2 \sim \exp\left(-2ip_0|\mathbf{r}| - |\mathbf{r}|/l\right) . \qquad (9.71)$$

В то же время $\langle G_A(\mathbf{r})\rangle\langle G_R(\mathbf{r})\rangle \exp(-|\mathbf{r}|/l)$, т. е. медленно затухает, не осциллируя. Поэтому пространственная дисперсия статического коррелятора должна иметь место при $|\mathbf{q}| \approx p_0^{-1}$, а динамического — при $|\mathbf{q}| \approx 1/l$.

Перейдем к вычислению.

1. Рассмотрим сначала ситуацию, когда $\operatorname{sign}\varepsilon_k = \operatorname{sign}(\varepsilon_k+\omega_n)$. В этом случае, поскольку полюсы выражения (9.68) находятся по одну сторону от вещественной оси, контур интегрирования по ξ можно деформировать так, чтобы он проходил далеко от полюсов. Такой интеграл набирается, в основном, в области $\xi \approx E_F$. Поскольку нас интересуют $|\omega_n| \ll E_F$ и $|\mathbf{q}| \ll p_0$, а раздвижка полюсов в выражении (9.68) есть $i\omega_n - \mathbf{kv}$, этой раздвижкой можно вообще пренебречь.

Поэтому достаточно рассмотреть выражение (9.68) при $\omega_n = 0$ и $\mathbf{q} = 0$. В этом случае можно воспользоваться тождеством $\langle G(i\varepsilon,\mathbf{p})\rangle^2 = -\partial\langle G(i\varepsilon,\mathbf{p})\rangle/\partial\mu$, где подразумевается, что при дифференцировании по μ можно пренебречь зависимостью τ от μ. Это тождество позволяет представить выражение (9.68) в виде

$$\mathcal{K}_0 \,=\, -\frac{\partial}{\partial\mu}\, T\sum_{\varepsilon_k}\int \langle G^M(i\varepsilon_k,\mathbf{p})\rangle \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,. \qquad (9.72)$$

Заметим теперь, что сумма по ε_k и интеграл по $\mathbf{p}$ дают среднюю плотность частиц в системе. Поэтому выражение (9.72), с точностью до знака, есть просто плотность состояний: $\mathcal{K}_0 = -\nu = -\partial n/\partial\mu$. Такой результат можно было бы предвидеть, поскольку в статическом пределе $\omega = 0$ коррелятор плотность–плотность должен давать сжимаемость, т. е. термодинамическую плотность состояний.

2. Теперь рассмотрим случай $\operatorname{sign}\varepsilon_k = -\operatorname{sign}(\varepsilon_k+\omega_n)$. При этом, поскольку полюсы подинтегрального выражения в (9.68) находятся по разные стороны вещественной оси, интеграл (9.68) определяется малой окрестностью поверхности Ферми.

Например, пусть $\omega_n > 0$ и $-\omega_n < \varepsilon_k < 0$. Для дальнейшего полезно рассмотреть выражение (9.68) без суммирования по ε_k:

$$B_{RA}(\omega_n,\mathbf{q}) = \int G_R(i\varepsilon_k + i\omega_n, \mathbf{p}_+)\, G_A(i\varepsilon_k, \mathbf{p}_-)\, \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,. \qquad (9.73)$$

Вычислим интеграл по ξ:

$$B_{RA}(\omega_n, \mathbf{q}) = \frac{\nu_0}{8\pi^2} \int\!\!\int \frac{do\, d\xi}{(i\varepsilon_k + i\omega_n - \xi - \frac{1}{2}\mathbf{qv} + \frac{i}{2\tau})(i\varepsilon_k - \xi + \frac{1}{2}\mathbf{qv} - \frac{i}{2\tau})} = \\ = \frac{\nu_0}{2} \int \frac{do}{\frac{1}{\tau} + \omega + i\mathbf{qv}}\,. \tag{9.74}$$

Аналогично, при $\omega_n < 0$ и $0 < \varepsilon_k < -\omega_n$ выражение (9.72), непросуммированное по ε_k, принимает такой вид:

$$B_{AR}(\omega_n, \mathbf{q}) = \int G_A(i\varepsilon_k + i\omega_n, \mathbf{p}_+)\, G_R(i\varepsilon_k, \mathbf{p}_-)\, \frac{d^3p}{(2\pi)^3} = \\ = \frac{\nu_0}{2} \int \frac{do}{\frac{1}{\tau} - \omega_n - i\mathbf{qv}}\,. \tag{9.75}$$

Выполняя суммирование по ε_k, получаем $\frac{|\omega_n|}{2\pi} B(\omega_n, \mathbf{q})$, где

$$B(\omega_n, \mathbf{q}) = \left\{ \begin{array}{lll} B_{RA}(\omega_n, \mathbf{q}) & \text{при} & \omega_n > 0 \\ B_{AR}(\omega_n, \mathbf{q}) & \text{при} & \omega_n < 0 \end{array} \right\} = \\ = \frac{\nu_0}{2} \int \frac{do}{\frac{1}{\tau} + |\omega_n| + i\mathbf{qv}\, \mathrm{sign}\, \omega_n} \tag{9.76}$$

Теперь все готово для того, чтобы найти сумму лестничного ряда диаграмм, изображенных на рис. 9.7. Примесная линия («перекладина лестницы») дается выражением $nu_0^2 = 1/(2\pi\nu_0\tau)$.

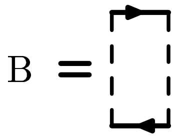


Рис. 9.15

Поскольку все ступени лестницы совершенно одинаковы, удобно рассмотреть всего одну ступень, изображающуюся диаграммой, изображенной на рис. 9.15. (Мы не включаем примесные линии в определение ступени.) Нетрудно видеть, что получающееся выражение оказывается точно таким же, как рассмотренное выше выражение для первой ступени, непросуммированное по ε_k. Поэтому, как и выше, рассмотрим по отдельности статический и кинетический случаи, когда знаки $\varepsilon_k + \omega_n$ и ε_k совпадают, и когда они различны.

В первом случае, как нетрудно видеть, суммирование лестничного ряда дает несущественную поправку к первому члену $\mathcal{K}_0 = -\nu$, полученному выше. Действительно, если знаки $\varepsilon_k + \omega_n$ и ε_k совпадают, то полюсы всех гриновских функций находятся по одну и ту же сторону вещественной оси. Поэтому, как и при рассмотрении первого члена ряда, можно положить $\omega_n = 0$ и $\mathbf{q} = 0$. Тогда весь ряд сворачивается в производную от функции Грина по химическому потенциалу μ. (Сумма членов лестничного ряда, начиная со второго, дает вклад, связанный с зависимостью амплитуды рассеяния на примеси от энергии μ, которым мы пренебрегли выше.)

А вот во втором случае, когда знаки $\varepsilon_k + \omega_n$ и ε_k различны, *все* члены лестничного ряда, включая произвольно далекие, оказываются одинаково важными. Чтобы понять, почему так получается, рассмотрим сначала случай $\mathbf{q} = 0$, и покажем, что сумма лестничного ряда в точности сокращает вклад $-\nu$, рассмотренный выше.

Действительно, при $\mathbf{q} = 0$ одна ступень лестницы есть $B(\omega_n)_{\mathbf{q}=0} = 2\pi\nu_0/(|\omega_n| + 1/\tau)$. Весь же ряд в целом дается суммой геометрической прогрессии:

$$\mathcal{K}_1(\omega_n,\, \mathbf{q}=0) = 2\,\frac{|\omega_n|}{2\pi}\,\left[\frac{B}{2\pi\nu_0\tau} + \frac{B^2}{(2\pi\nu_0\tau)^2} + \cdots\right] = \\ = \frac{|\omega_n|}{\pi}\frac{B}{1 - B/2\pi\nu_0\tau} = \nu\,.$$

Тождественное сокращение $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_1 = 0$, получающееся при $\mathbf{q} = 0$, имеет простой физический смысл. Коррелятор плотность–плотность при $\mathbf{q} = 0$ и $\omega \neq 0$ описывает отклик электронной плотности на независящий от координат переменный внешний потенциал. Очевидно, что поскольку полное число частиц сохраняется, а внешний потенциал один и тот же во всех точках пространства, отклика плотности в ответ на такое возмущение быть не должно. Поэтому указанное сокращение выражает сохранение числа частиц в системе.

Теперь повторим вычисление лестничного ряда при $\mathbf{q}\neq 0$. Выражение $B(\omega_n, \mathbf{q})$ интересует нас при $|\omega_n|\tau,\ |\mathbf{q}|l \ll 1$, и поэтому его можно разложить:

$$B(\omega_n, \mathbf{q}) = \frac{\nu_0\tau}{2}\int\frac{do}{1 + |\omega_n|\tau + i\mathbf{qv}\tau\,\mathrm{sign}\,\omega_n} = \\ = \frac{\nu_0\tau}{2}\int\Big[1 - |\omega_n|\tau - i\mathbf{vq}\tau\,\mathrm{sign}\,\omega_n - (\mathbf{vq})^2\tau^2\Big]\,do\, = \\ = 2\pi\nu_0\tau\left(1 - |\omega_n|\tau - \frac{1}{3}v_F^2q^2\tau^2\right) = 2\pi\nu_0\tau\Big[1 - \tau(|\omega_n| + Dq^2)\Big]\,, \qquad (9.77)$$

где $D = v_F^2\tau/3$ — коэффициент диффузии.

Как и выше, при $\mathbf{q} \neq 0$ вычисление ряда сводится к суммированию геометрической прогрессии:

$$\mathcal{K}_1(\omega, \mathbf{q}) = 2\,\frac{|\omega|B}{2\pi(1 - B/2\pi\nu_0\tau)} = \frac{\nu|\omega_n|}{|\omega_n| + D\mathbf{q}^2}\,. \qquad (9.78)$$

Полный ответ для коррелятора плотность–плотность дается суммой двух слагаемых:

$$\mathcal{K}(\omega_n, \mathbf{q}) = \mathcal{K}_0(\omega_n, \mathbf{q}) + \mathcal{K}_1(\omega_n, \mathbf{q}) = -\,\frac{\nu\, D\mathbf{q}^2}{|\omega_n| + D\mathbf{q}^2}\,, \qquad (9.79)$$

что и требовалось показать.

Выражение для $B(\omega_n, \mathbf{q})$ можно вычислить точно:

$$B(\omega_n, \mathbf{q}) = \frac{\pi\nu_0 \operatorname{sign}\omega_n}{i|\mathbf{q}|v_F} \ln \frac{1 + |\omega_n|\tau + i|\mathbf{q}|l \operatorname{sign}\omega_n}{1 + |\omega_n|\tau - i|\mathbf{q}|l \operatorname{sign}\omega_n}. \tag{9.80}$$

Точное значение $B(\omega_n, \mathbf{q})$ оказывается полезным в режиме баллистической динамики: $\omega\tau \geqslant 1$ или $|\mathbf{q}|l \geqslant 1$. Обратим внимание, что при таких ω и q величина $B/(2\pi\nu_0\tau)$ не близка к единице, и поэтому члены лестничного ряда достаточно быстро убывают. Из-за этого ряд оказывается быстро сходящимся, и существенный вклад дает только первый член.

Остановимся на соответствии между диффузионной лестницей и классической картиной диффузии. Из проделанных вычислений ясно, что отдельная ступень лестницы $B(\omega_n, \mathbf{q})$ соответствует траектории частицы, движущейся по прямой между двумя примесями. Чтобы продемонстрировать это более явно, перейдем от мацубаровских частот и времени к обычным. Выражение для $B(\omega, \mathbf{q})$ может быть получено из (9.80) аналитическим продолжением $i\omega_n \to \omega$ $(n > 0)$:

$$B(\omega, \mathbf{q}) = \frac{\pi\nu_0}{i|\mathbf{q}|v_F} \ln \frac{1 - i\omega\tau + i|\mathbf{q}|l}{1 - i\omega\tau - i|\mathbf{q}|l}. \tag{9.81}$$

Теперь запишем величину $B(\omega, \mathbf{q})$ в координатно-временном представлении. Сделать это можно, либо используя выражения (9.18) для гриновских функций в координатном представлении, либо взяв фурье-образ точного выражения (9.81):

$$B(t, \mathbf{r}) \;=\; \frac{\nu_0}{2\,|\mathbf{r}|^2}\,\delta(|\mathbf{r}| - v_F t)\,e^{-|\mathbf{r}|/l}. \tag{9.82}$$

Нетрудно видеть, что это есть просто вероятность того, что частица пролетит время t после столкновения с примесью, не столкнувшись с другими примесями. Величина $B(t, \mathbf{r})$ правильно нормирована:

$$\int B(t, \mathbf{r})\,d^3r \;=\; 2\pi\nu_0\; e^{-t/\tau}. \tag{9.83}$$

Поэтому величины τ и l, введенные выше, есть в точности классические время и длина свободного пробега.

Отметим любопытное формальное сходство между приведенным выше выводом $\mathcal{K}(\omega, \mathbf{q})$ и вычислением распределения вероятностей для случайных блужданий в задаче 9. Геометрическая прогрессия, которую приходится суммировать и в том, и в другом случае, соответствует сумме по случайным путям с различным числом шагов. Каждому шагу ставится в соответствие «одношаговый формфактор»: $B(\omega, \mathbf{q})$ — в случае диффузии, $\frac{z}{n}(\cos q_1 + \ldots + \cos q_n)$ — в случае блужданий по n-мерной решетке, причем видно, что z имеет смысл $e^{i\omega}$. (Более точно, $z = e^{i\omega\tau_0}$, где $\tau_0 = 1$ — время, за которое делается один шаг.) Чтобы перейти к диффузионному пределу в задаче о блужданиях по решетке, рассмотрим $\omega \ll 1$ и $q_i \ll 1$. При таких ω и q_i можно просто разложить знаменатель в выражении (2.16) для производящей функции:

$$\begin{aligned} G(z, q) &= \frac{1}{1 - e^{i\omega}\,(\cos q_1 + \ldots + \cos q_n)/n} = \\ &= \frac{1}{1 - (1 + i\omega)(n - \frac{1}{2}(q_1^2 + \ldots + q_n^2))/n} \;=\; \frac{1}{-i\omega \,+\, q^2/2n}. \end{aligned} \tag{9.84}$$

Таким образом, коэффициент диффузии для блужданий по n-мерной решетке равен $(2n)^{-1}$.

53. Сформулируем задачу о частице, которая при $t < 0$ находилась в начале координат, а при $t > 0$ стала двигаться свободно, следующим образом. Рассмотрим потенциальную яму $V(\mathbf{r})$ с центром в начале координат, существующую при $-\infty < t < 0$, а затем мгновенно исчезающую. Основное состояние ферми-системы характеризуется избыточной плотностью, притянутой ямой («бугорком»). После выключения потенциала эта плотность начинает рассасываться, диффундируя в поле примесей.

Может показаться, что более естественно — рассмотреть эволюцию во времени состояния $\psi^+(\mathbf{r} = 0, t = 0)|0\rangle$, получающегося добавлением к невозмущенному ферми-морю одной частицы в начале координат в момент $t = 0$. При этом, однако, энергия добавленной частицы имеет очень широкий спектр и, вообще говоря, не близка к уровню Ферми. В результате, поскольку выбранный источник имеет большую немонохроматичность, при такой постановке задачи интересующий нас эффект, хотя и существует, оказывается весьма малым по величине.

Отклик ферми-системы на потенциал, зависящий от координат и времени, как мы выяснили в задаче 52, дается сверткой коррелятора плотность–плотность с потенциалом. В данном случае удобно воспользоваться координатно–частотным представлением, в котором возмущающий ферми-систему потенциал имеет вид $-iV(\mathbf{r})/(\omega - i0)$. Нам потребуются выражения для запаздывающей и опережающей функций Грина:

$$G_R(\varepsilon, \mathbf{r}) = -\frac{m}{2\pi r} \exp\left(ip_0 r + ir\varepsilon/v - r/2l\right) ,$$
$$G_A(\varepsilon, \mathbf{r}) = -\frac{m}{2\pi r} \exp\left(-ip_0 r - ir\varepsilon/v - r/2l\right) , \qquad (9.85)$$

которые нетрудно получить из выражения (9.18) для усредненной причинной функции, если вспомнить, что $G(r, \varepsilon > 0) = G_R(r, \varepsilon)$ и $G(r, \varepsilon < 0) = G_A(r, \varepsilon)$.

При вычислении отклика, как и в задаче 52, следует различать статические и кинетические вклады, соответствующие средним двух одинаковых функций $\langle G_R G_R \rangle$ и $\langle G_A G_A \rangle$ или двух различных функций $\langle G_R G_A \rangle$ и $\langle G_A G_R \rangle$. Нетрудно видеть, что статический вклад описывает часть плотности, существовавшую в то время, когда потенциал ямы был включен, но не описывает рассасывание плотности на временах $t \gg \varepsilon_F^{-1}$. Динамический же вклад, наоборот, описывает только динамику на временах $t \gg \varepsilon_F^{-1}$ после выключения ямы.

Поэтому при усреднении коррелятора плотность–плотность по беспорядку нам будет достаточно учесть только динамический вклад. В главном порядке по $(p_0 l)^{-1}$ — это лестничные графики, рассмотренные в задаче 52 (см. рис. 9.7). В следующем же порядке по $(p_0 l)^{-1}$ возникает еще одна последовательность диаграмм — веерные графики, показанные на рис. 9.8. Рассмотрим их более подробно.

а) Пусть начальная и конечная точки совпадают. Тогда мы можем нарисовать лестничный и веерный графики, проходящие через одни и те же примеси (с номерами от 1 до $N \geqslant 2$), как показано на рис. 9.16. Здесь буквы R и A обозначают запаздывающую и опережающую функции Грина соответственно. Сравнивая, мы видим, что в обоих графиках берется произведение одних и тех же величин. Единственное отличие состоит в порядке аргументов в $G_A(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$. Но поскольку G_A зависит только от $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$, порядок $\mathbf{r}_i$ и $\mathbf{r}_j$ несущественен, и значит графики в точности равны. Поэтому, с точностью до отмеченного в условии задачи несоответствия в первых двух членах ($N = 0, 1$), веерный и лестничный ряды совпадают.

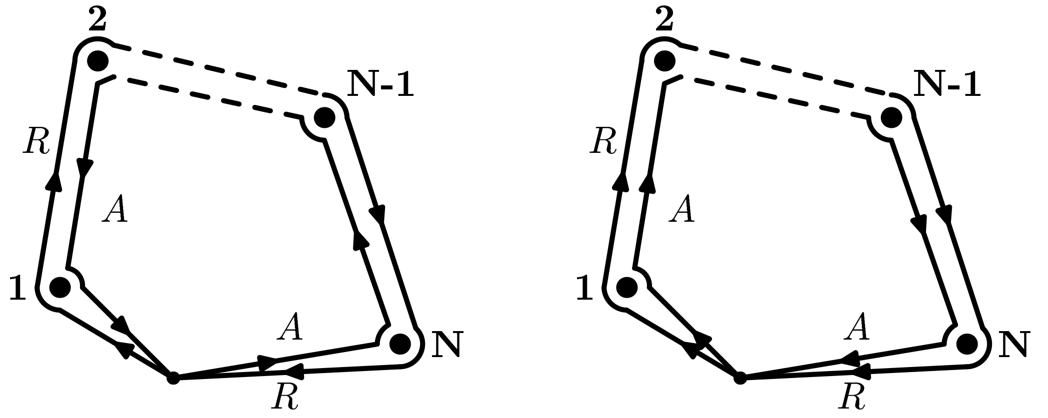


Рис. 9.16

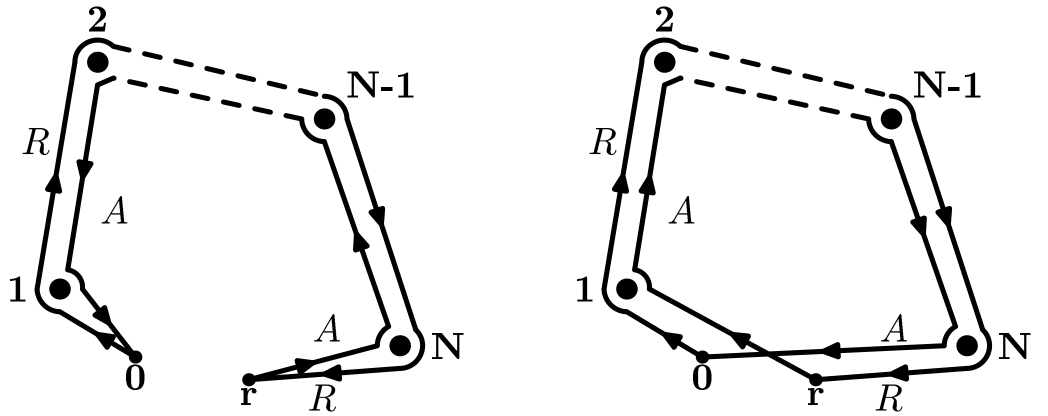


Рис. 9.17

б) Теперь раздвинем начальную (0) и конечную ($\mathbf{r}$) точки (см. рис. 9.17). В этом случае отличие веерного графика от лестничного заключается в том, что аргументы функций G_A на концах другие. Заметим, что части графиков от 1-й примеси до N-й есть в точности диффузионная лестница. Следовательно, как лестничный график, так и веерный можно представить в виде свертки диффузионного пропагатора, взятого в точках $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_N$, с четырьмя функциями Грина. Поскольку диффузионный пропагатор медленно меняется на расстояниях порядка длины свободного пробега, то достаточно просто проинтегрировать произведение функций Грина. Поэтому получаем, что вклады концов лестничного и веерного графиков соответственно равны[13]

$$W_L(\mathbf{r}) = \int G_R(\mathbf{r}_1)\, G_A(\mathbf{r}_1)\, G_R(\mathbf{r}_N - \mathbf{r})\, G_A(\mathbf{r}_N - \mathbf{r})\, d^3\mathbf{r}_1\, d^3\mathbf{r}_N\,, \tag{9.86}$$

[13] Индексы L и F происходят от английских слов «ladder» и «fan».

$$W_F(\mathbf{r}) = \int G_R(\mathbf{r}_1)\, G_A(\mathbf{r}_N)\, G_R(\mathbf{r}_N - \mathbf{r})\, G_A(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})\, d^3\mathbf{r}_1\, d^3\mathbf{r}_N\,, \tag{9.87}$$

причем все запаздывающие функции Грина берутся при энергии $\varepsilon + \omega/2$, а опережающие — при $\varepsilon - \omega/2$.

Нас интересуют возвраты на больших временах $t \gg \tau$, т. е. при $\omega\tau \ll 1$. Динамика на таких временах имеет диффузионный характер. Это позволяет пренебречь зависимостью функций Грина в (9.86) и (9.87) от ω. Дело в том, что, как будет видно из дальнейших вычислений, все четыре расстояния

$$|\mathbf{r}_1|,\ |\mathbf{r}_N|,\ |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|,\ |\mathbf{r} - \mathbf{r}_N| \tag{9.88}$$

оказываются порядка длины пробега l, которая при $\omega\tau \ll 1$ много меньше диффузионной длины $\sqrt{D/\omega}$.

Поэтому полагаем в (9.86) и (9.87) частоту $\omega = 0$ и, пользуясь выражениями (9.85), находим вклад концов лестничного графика:

$$W_L(\mathbf{r}) = \left(\frac{m}{2\pi}\right)^4 \left(\int \frac{e^{-|\mathbf{r}|/l}}{|\mathbf{r}|^2}\, d^3\mathbf{r}\right)^2 = (4\pi)^2 \left(\frac{m}{2\pi}\right)^4 l^2\,. \tag{9.89}$$

Веерные графики представляют интерес в области, когда расстояние между начальной и конечной точкой порядка p_0^{-1}, т. е. при $|\mathbf{r}| \ll l$. Тогда, поскольку характерные $|\mathbf{r}_1|$, $|\mathbf{r}_N|$ определяются медленно убывающими множителями $\exp(-|\mathbf{r}_N|/l)$, $\exp(-|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|/l)$, и т. п., имеет место соотношение $|\mathbf{r}_1|, |\mathbf{r}_N| \gg |\mathbf{r}|$. Поэтому можно разложить расстояния между рассматриваемыми точками по малому $\mathbf{r}$:

$$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}| = |\mathbf{r}_1| - \mathbf{r}\mathbf{n}_1\,, \quad |\mathbf{r}_N - \mathbf{r}| = |\mathbf{r}_N| - \mathbf{r}\mathbf{n}_N\,, \tag{9.90}$$

где $\mathbf{n}_1 = \mathbf{r}_1/|\mathbf{r}_1|$, $\mathbf{n}_N = \mathbf{r}_N/|\mathbf{r}_N|$ — единичные векторы. Таким образом, получаем

$$W_F(\mathbf{r}) = \left(\frac{m}{2\pi}\right)^4 \int\!\!\int \frac{\exp\left(ip_0\mathbf{r}(\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_N) - |\mathbf{r}_1|/l - |\mathbf{r}_N|/l\right)}{|\mathbf{r}_1|^2 |\mathbf{r}_N|^2}\, d^3\mathbf{r}_1\, d^3\mathbf{r}_N\,. \tag{9.91}$$

Используя формулу

$$\int e^{i\mathbf{a}\mathbf{n}} = 4\pi\,\frac{\sin a}{a} do_{\mathbf{n}}\,, \tag{9.92}$$

интегрируем в (9.91) по направлениям:

$$W_F(\mathbf{r}) = (4\pi)^2 \left(\frac{m}{2\pi}\right)^4 \left(\frac{\sin p_0 r}{p_0 r}\right)^2 \int\limits_0^\infty\!\!\int\limits_0^\infty e^{-|\mathbf{r}_1|/l - |\mathbf{r}_N|/l}\, d|\mathbf{r}_1|\, d|\mathbf{r}_N|\,. \tag{9.93}$$

Вычисляя оставшиеся интегралы по $|\mathbf{r}_1|$ и $|\mathbf{r}_N|$ и сравнивая результат с (9.89), находим относительную величину веерного и лестничного вкладов:

$$\frac{W_F(\mathbf{r})}{W_L(\mathbf{r})} = \left(\frac{\sin X}{X}\right)^2\,, \text{ где } X = p_0|\mathbf{r}|\,. \tag{9.94}$$

Характерный масштаб, на котором интерференционная поправка оказывается важна, равен $\hbar/p_0$, в полном соответствии с изложенными в условии качественными рассуждениями. Отметим сходство между полученным ответом и формулой для распределения интенсивности света при фраунгоферовской дифракции на щели. Это сходство лишний раз подчеркивает интерференционную природу рассматриваемого явления.

54. Как мы видели в решении предыдущей задачи, суммы веерных и лестничных диаграмм отличаются несущественно, а именно, только первыми двумя членами. Поэтому в дальнейшем всегда подразумевается, что веерные графики преобразованы (развернуты) так, что получается лестничный ряд. Рассмотрим сумму соответствующих лестничных диаграмм $\mathcal{C}(\omega, \mathbf{q})$, так называемую *куперонную лестницу* или *куперон* [14](рис. 9.18).

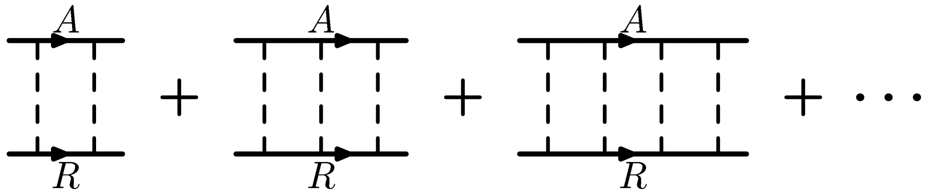


Рис. 9.18

Эта лестница напоминает диффузионную лестницу из задачи 52, и, как мы увидим, дается похожим выражением (9.100). Это не случайно: как функции координат, куперонная и диффузионная лестницы совпадают, если система обладает инвариантностью по отношению к обращению времени. В самом деле, если мы обратим одну из электронных линий на рис. 9.18, то получится диффузионная лестница [15] (рис. 9.7). Обратим внимание на то, что в купероне закон сохранения импульса приводит к постоянству *суммы* импульсов в каждом блоке диаграммы, и куперон оказывается функцией суммы импульсов $\mathbf{q}$ и внешней частоты ω. Из дальнейшего будет видно, что главный вклад в $\mathcal{C}(\omega, \mathbf{q})$ происходит от малых импульсов $|\mathbf{q}|l \ll 1$.

Куперонную лестницу нетрудно связать с поправкой к проводимости. Для этого воспользуемся формулой (9.66) из решения задачи 51, связывающей проводимость с коррелятором $\Pi(i\omega_n)$. Как мы выяснили в задаче 51, проводимость определяется кинетическим вкладом в $\Pi(i\omega_n)$, продолженным с дискретных мнимых частот $\omega_n \geqslant 0$ (см. также задачу 52). Поэтому запишем кинетический вклад как среднее от произведения запаздывающей и опережающей функций Грина и усредним по беспорядку,

[14]Величину $\mathcal{C}(\omega, \mathbf{q})$ называют купероном, потому что точно такая же величина описывает куперовские пары в сверхпроводнике в присутствии примесей (см. гл. 10). Аналогия между купероном в теории локализации и амплитудой куперовских пар оказывается весьма содержательной, поскольку в физических свойствах этих величин имеется немало общего. Эта общность проявляется в разнообразных физических эффектах, таких как, например, влияние магнитного поля, разница между магнитными и немагнитными примесями, температурная зависимость, и т. п.

[15]Это замечание не относится к спиновой зависимости — у куперона она другая.

выделяя куперонный вклад (т. е. веерные графики). В результате получим

$$\delta\sigma_{\alpha\beta} = \frac{e^2}{m^2\omega} \int\limits_{-\omega/2}^{\omega/2} \frac{d\varepsilon}{2\pi} \int p_\alpha(q_\beta - p_\beta)\, \mathcal{C}(\omega, \mathbf{q}) \times$$

$$G_R(\varepsilon_+, \mathbf{p})\, G_R(\varepsilon_+, \mathbf{q}-\mathbf{p})\, G_A(\varepsilon_-, \mathbf{p})\, G_A(\varepsilon_-, \mathbf{q}-\mathbf{p})\, \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^2}\,.$$

Интегрируем по $\mathbf{p}$, считая $\mathbf{q}$ малым:

$$\delta\sigma = -\frac{2\nu_{2D}e^2v_F^2}{2\omega} \int \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\omega/2}^{\omega/2} \frac{d\varepsilon}{2\pi} \int \frac{\mathcal{C}(\omega, \mathbf{q})\, d\xi}{(\varepsilon - \xi + i/2\tau)^2 (\varepsilon - \xi - i/2\tau)^2} \tag{9.95}$$

(здесь $\nu_{2D} = m/2\pi$ — плотность состояний в двумерии с одной проекцией спина). Вычисляя интеграл по ξ и ε, находим

$$\delta\sigma = -\frac{4\nu_{2D}e^2\tau^3v_F^2}{2} \int \mathcal{C}(\omega, \mathbf{q}) \frac{d^2\mathbf{q}}{4\pi^2}\,. \tag{9.96}$$

Теперь вычислим $\mathcal{C}(\omega, \mathbf{q})$. Для этого вначале найдем, чему равна ступень куперонной лестницы:

$$B_c = \int \frac{1}{(\varepsilon + \omega/2 - \xi_\mathbf{p} + i/2\tau)(\varepsilon - \omega/2 - \xi_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} - i/2\tau)} \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^2}\,. \tag{9.97}$$

Считая $\mathbf{q}$ малым и заменяя поэтому $\xi_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} \approx \xi_\mathbf{p} - \mathbf{qv}$, точно так же, как и в задаче 52, получим

$$B_c(\omega, \mathbf{q}) = 2\pi\nu_{2D}\tau(1 + \tau(i\omega - D\mathbf{q}^2))\,, \tag{9.98}$$

где на этот раз $D = v_F^2\tau/2$ – коэффициент диффузии в размерности 2. Как и в случае диффузионной лестницы, наиболее существенной оказывается область $\omega\tau \ll 1$, $|\mathbf{q}|l \ll 1$, вне ее слаболокализационные поправки несущественны. Сама же лестница равна [16]

$$\mathcal{C}(\omega, \mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi\nu_{2D}\tau)^2} \left(B_c + \frac{B_c^2}{2\pi\nu_{2D}\tau} + \cdots \right)\,. \tag{9.99}$$

Таким образом,

$$\mathcal{C}(\omega, \mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi\nu_{2D}\tau^2(-i\omega + D\mathbf{q}^2)}\,. \tag{9.100}$$

Осталось лишь подставить это выражение в (9.96):

$$\delta\sigma = -\frac{De^2}{2\pi^3} \int \frac{d^2\mathbf{q}}{D\mathbf{q}^2 - i\omega}\,. \tag{9.101}$$

[16] Можно проверить, что независимо от размерности пространства d примесная линия всегда равна $1/(2\pi\nu_d\tau)$, поскольку она представляет собой сечение рассеяния на примеси, взятое в энергетической нормировке (см. задачу 11).

Этот интеграл логарифмически расходится. Снизу он обрезается на обратной диффузионной длине $q_{\min} = \sqrt{\omega/D}$, а сверху — на $q_{\max} \approx 1/l$, ибо при $|\mathbf{q}|l \gg 1$ лестничный ряд мал. В результате получаем квантовую поправку к проводимости:

$$\delta\sigma(\omega) = -\frac{e^2}{2\pi^2\hbar}\ln\frac{1}{\omega\tau}\,. \tag{9.102}$$

Интересно отметить, что логарифмическая сингулярность квантовой поправки на малой частоте ω не размывается при конечной температуре. Формально это проявляется в том, что в приведенном выше вычислении, выполненном при конечной температуре, в конце концов температура полностью выпадает. (Точно так же, как при выводе классической формулы Друде в задаче 51.) Физическая причина этого та же, что и в задаче 51 — одночастичный характер проводимости в случае упругого рассеяния. При упругом рассеянии состояния с различными энергиями не перемешиваются и, поэтому, степень размытия фермиевской ступеньки несущественна. Однако, если в системе имеется какое-либо неупругое рассеяние, скажем, из-за взаимодействия с электронами или фононами, сингулярность квантовой поправки на малой частоте размывается (см. разд. 9.4).

Другое любопытное свойство квантовой поправки — ее локальный характер в пространстве. Если рассмотреть проводимость на конечном волновом векторе, то пространственная дисперсия квантовой поправки будет иметь место при $|\mathbf{q}| \approx p_0$, в то время как для классической проводимости Друде дисперсия гораздо сильнее: $|\mathbf{q}| \approx 1/l$. Причина этого в том, что, как мы видели в задаче 53, интерференционный вклад в вероятность рассеяния назад спадает на очень малых масштабах $\approx p_0^{-1}$. Поскольку рассеяние назад — это и есть механизм возникновения квантовой поправки, она тоже должна иметь масштаб локальности порядка p_0^{-1}. В то же время классическая проводимость определяется рассеянием на (большой) длине свободного пробега и поэтому ее пространственная дисперсия намного сильнее.

55. Найдем зависимость квантовой поправки от магнитного поля в трехмерном случае. Это можно сделать с помощью соотношения (9.96), которое в координатном представлении принимает следующий вид:[17]

$$\delta\sigma = -4e^2\nu_0\tau^2 D\,\mathcal{C}(\omega, \mathbf{r} = \mathbf{r}')\,. \tag{9.103}$$

Выражение для куперона $\mathcal{C}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ в присутствии магнитного поля можно получить следующим образом. Калибровочная инвариантность требует, чтобы при включении магнитного поля производные по координатам в уравнениии для куперона изменялись по такому закону:

$$-i\nabla \;\to\; -i\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A} \tag{9.104}$$

Обратим внимание на то, что в калибровочно инвариантном выражении (9.104) появляется удвоенный заряд электрона. Это связано с тем, что куперон описывает интерференцию *двух* электронных волн, распространяющихся по одному и тому же пути в прямом и обратном направлениях.

Теперь, чтобы получить уравнение для куперона, воспользуемся соотношением (9.100), помножив обе его части на $-i\omega + D\mathbf{q}^2$. В координатном представлении, согласно (9.104), следует заменить $\mathbf{q}$ на $-i\nabla - 2e/c\mathbf{A}$. Потерю фазовой когерентности можно учесть в уравнении для куперона феноменологически, сдвинув частоту $-i\omega$ на величину τ_φ^{-1}, так чтобы однородное решение этого уравнения затухало как $\exp(-t/\tau_\varphi)$. Таким образом, мы приходим к следующему уравнению:

$$\left[-i\omega + D\left(-i\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r})\right)^2 + \frac{1}{\tau_\varphi}\right]\mathcal{C}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi\nu_0\tau^2}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tag{9.105}$$

В конечной системе уравнение (9.105) должно быть дополнено граничными условиями. В случае непроницаемой границы поток частиц через границу должен отсутствовать. Соответствующее граничное условие записывается так:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}} + \frac{2ie}{c}\mathbf{n}\cdot\mathbf{A}\right)\mathcal{C}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \tag{9.106}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к границе. Обратим внимание на то, что векторный потенциал входит не только в уравнение для куперона, но и в выражение для потока.

В качестве простейшего применения уравнения (9.105) рассмотрим квантовую поправку к проводимости бесконечного трехмерного металла в однородном магнитном поле B. В этом случае выражение (9.105) имеет вид уравнения на функцию Грина для частицы с зарядом $e_* = 2e$ и массой $m_* = \hbar^2/2D$, находящейся в поле B. Собственные значения и собственные функции этой задачи хорошо известны (например, см. [2], § 112). Поэтому можно сразу записать решение в таком виде:

$$\mathcal{C}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi\nu_0\tau^2}\sum_{n,\alpha}\frac{\psi_{\alpha,n}(\mathbf{r})\psi^*_{\alpha,n}(\mathbf{r}')}{-i\omega + Dq_z^2 + \Omega_*(n+\frac{1}{2}) + \frac{1}{\tau_\varphi}}\,, \tag{9.107}$$

где $\Omega_* = \hbar e_* B/m_* c = 4eDB/\hbar c$ есть «циклотронная частота», а $\psi_{\alpha,n}(\mathbf{r})$ — собственные функции, соответствующие уровням Ландау (α — квантовое число, различающее состояния на одном уровне Ландау, например, импульс). Из-за функций $\psi_{\alpha,n}$ сумма в (9.107) выглядит весьма устрашающе. Но нас, как следует из [18] (9.103), на самом деле интересует куперон в совпадающих точках. При $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ куперон не должен зависеть от абсолютного расположения точек $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$. Поэтому, усредняя по положению $\mathbf{r}$ в объеме проводника V и используя условие ортонормированности собственных функций, получаем

$$\frac{1}{V}\int\mathcal{C}(\omega, \mathbf{r} = \mathbf{r}')\,d^3r = \frac{1}{2\pi\nu_0\tau^2 V}\sum_{n,\alpha}\frac{1}{-i\omega + Dq_z^2 + \Omega_*(n+\frac{1}{2}) + \frac{1}{\tau_\varphi}}\,. \tag{9.108}$$

[17]Если выразить квадрат фермиевской скорости в (9.96) через коэффициент диффузии $D = \frac{1}{3}v_F^2\tau$, то зависящие от размерности множители сокращаются, и формула (9.103) оказывается справедливой в произвольной размерности.

[18]Интегрирование по $\mathbf{q}$ в (9.107) эквивалентно условию $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$.

Суммирование по α (то есть суммирование в пределах одного уровня Ландау) можно легко выполнить, использовав выражение для числа состояний на уровне Ландау (см. [2]):

$$dN = \frac{e_* BV}{(2\pi)^2 \hbar c}\, dq_z \tag{9.109}$$

Таким образом, получаем выражение для куперона в совпадающих точках:

$$\mathcal{C}(\omega, \mathbf{r} = \mathbf{r}') = \frac{eB}{4\pi^2 \nu_0 \hbar c \tau^2} \int \frac{dq_z}{2\pi} \sum_n \frac{1}{-i\omega + Dq_z^2 + \Omega_*(n+\frac{1}{2}) + \frac{1}{\tau_\varphi}}\,. \tag{9.110}$$

С учетом этого поправка к проводимости (9.103) равна

$$\delta\sigma = -\frac{De^3 B}{\pi^2 \hbar c} \int \frac{dq_z}{2\pi} \sum_n \frac{1}{-i\omega + Dq_z^2 + \Omega_*(n+\frac{1}{2}) + \frac{1}{\tau_\varphi}}\,. \tag{9.111}$$

В дальнейших выкладках мы для простоты опустим частоту внешнего поля ω. Вычислим интеграл по q_z:

$$\delta\sigma = -\frac{\sqrt{D} e^3 B}{2\pi^2 \hbar c \sqrt{\Omega_*}} \sum_n \frac{1}{\sqrt{n + \frac{1}{2} + x}}\,, \quad x = \frac{1}{\Omega_* \tau_\varphi} = \frac{\hbar c}{4eBD\tau_\varphi}\,. \tag{9.112}$$

Полученная сумма расходится на верхнем пределе. Очевидно, это в точности та же расходимость, что и в задаче 54 при вычислении интеграла по $\mathbf{q}$, и поэтому её следует обрезать на $|\mathbf{q}|$ порядка обратной длины свободного пробега. Для этого оборвем сумму (9.112) на некотором n_{max}, определяемом соотношением

$$\Omega_* n_{max} \approx D/l^2 \tag{9.113}$$

($\Omega_* n_{max}$ есть собственное значение оператора в (9.107), которое не должно превышать D/l^2). Тогда сумма равна $2\sqrt{n_{max}}$, и поправка даётся выражением

$$\delta\sigma(0) = -\frac{e^2}{4\pi^2}\sqrt{\frac{eB}{\hbar c}} \cdot 2\sqrt{n_{max}} \approx -\frac{e^2}{4\pi^2 \hbar l}\,. \tag{9.114}$$

Это выражение не зависит ни от τ_φ, ни от магнитного поля, поскольку оно определяется малыми масштабами порядка l. Интересные эффекты (зависимость от магнитного поля и т. п.) определяются большими масштабами и представляют собой поправки к (9.114).

Обрезание суммы после интегрирования по q_z может показаться внимательному читателю некорректным, поскольку при этом допускаются как угодно большие q_z, но только конечные n. Но q_z^2 и n есть разные части квадрата волнового вектора $\mathbf{q}^2$. Можно более корректно обрезать сумму «вращательно–инвариантным образом», ограничивая как максимальные n, так и максимальные q_z. Это нетрудно сделать, например, вводя в (9.111) множитель сходимости $\exp(-\mu(Dq_z^2 + \Omega_*(n+1/2)))$, где μ — малое число порядка l^2/D. При этом оказывается, что простая процедура обрезания по n приводит к тем же ответам.

Вычитая из $\delta\sigma$ независящую от магнитного поля часть $\delta\sigma(0)$, получаем

$$\delta\sigma(B) - \delta\sigma(0) = -\frac{e^2}{2\pi^2\hbar}\sqrt{\frac{eB}{\hbar c}}f(x)\,, \tag{9.115}$$

где

$$f(x) = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{\sqrt{n+1/2+x}} - 2\sqrt{N}\right)\,. \tag{9.116}$$

Сумму в (9.116) можно найти в пределе сильных и слабых магнитных полей. Наиболее интересен случай сильного поля ($x \ll 1$), который мы и рассмотрим. При малых x функция $f(x)$ стремится к постоянному пределу, выражающемуся через ζ-функцию Римана:

$$f(x\to 0) = -(\sqrt{2}-1)\zeta(\tfrac{1}{2}) \approx 0.6049 \tag{9.117}$$

Таким образом,

$$\delta\sigma(B) - \delta\sigma(0) = \frac{\sqrt{2}-1}{2\pi^2}\,\zeta(\tfrac{1}{2})\,\frac{e^2}{\hbar}\sqrt{\frac{eB}{\hbar c}}\,. \tag{9.118}$$

Итак, слаболокализационная поправка в трехмерном случае пропорциональна корню из магнитного поля. Выход на этот режим происходит при $\Omega_*\tau_\varphi \approx 1$ в согласии с приведенными выше качественными рассуждениями.

Аналогично можно рассмотреть поведение слаболокализационной поправки в двумерном случае. Он отличается от трехмерного случая только отсутствием интегрирования по q_z, и поэтому

$$\delta\sigma_{2D}(B) = -\frac{e^2}{2\pi^2\hbar}\sum_{n=0}^{n_{max}}\frac{1}{n+1/2+x}\,. \tag{9.119}$$

Эту сумму можно выразить через дигамма-функцию $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$ следующим образом:

$$\delta\sigma_{2D}(B) = -\frac{e^2}{2\pi^2\hbar}\left(\psi(n_{max}+\tfrac{1}{2}+x) - \psi(\tfrac{1}{2}+x)\right)\,. \tag{9.120}$$

При $x \gg 1$ дигамма-функция растет логарифмически, $\psi(x\gg 1)\approx \ln x$, и поэтому в слабых полях

$$\delta\sigma_{2D}(0) = -\frac{e^2}{2\pi^2\hbar}\ln\frac{n_{max}}{x} = -\frac{e^2}{2\pi^2\hbar}\ln\frac{D\tau_\varphi}{l^2}\,, \tag{9.121}$$

то есть слаболокализационная поправка определяется τ_φ и в первом приближении не зависит от магнитного поля. В сильных же полях можно положить $x = 0$:

$$\delta\sigma_{2D}(B) = -\frac{e^2}{2\pi^2\hbar}\left(\ln\frac{4\hbar c}{eBl^2} - \psi(\tfrac{1}{2})\right)\,. \tag{9.122}$$

Как видно из этой формулы, в больших магнитных полях проводимость не зависит от τ_φ. Это происходит потому, что магнитное поле подавляет вклад длинных траекторий, и механизмы сбоя фазы просто не успевают сработать на оставшихся траекториях. Вычитая из (9.122) проводимость в нулевом поле (9.121), получим магнитосопротивление:

$$\delta\sigma_{2D}(B) - \delta\sigma_{2D}(0) = \frac{e^2}{2\pi^2\hbar}\left(\ln\frac{4D\tau_\varphi eB}{\hbar c} - \psi(\tfrac{1}{2})\right). \tag{9.123}$$

Таким образом, как в двумерном, так и в трехмерном случае квантовая поправка к проводимости приводит к весьма необычному поведению магнитосопротивления в классически слабых полях, что позволяет выделять эффекты слабой локализации на фоне классического магнитосопротивления. При этом речь идет об изменении проводимости на величину порядка e^2/h в довольно слабых полях порядка B_c, так что эффект оказывается вполне измеримым. Вдобавок квантовое магнитосопротивление, в отличие от классического, в трехмерном случае не зависит от угла между током и полем и отлично от нуля даже если ток параллелен полю. Измеряя магнитосопротивление, можно найти время сбоя фазы τ_φ, которое определяется взаимодействием электронов. Поэтому данные по аномальному магнитосопротивлению — важный источник информации о квантовых эффектах в металлах.

Помимо этого, квантовая поправка оказывается чувствительна к любым эффектам, нарушающим симметрию по отношению к обращению времени. Например, сильное спин-орбитальное взаимодействие приводит к изменению знака квантовой поправки. Подробное изложение многочисленных эффектов слабой локализации не входит в задачу этой книги. Интересующийся читатель может обратиться к обзорам, посвященным этой теме (см. примечание на с. 232).

56. Итак, пусть имеется тонкая металлическая пленка, свернутая в цилиндр радиуса R, через который пропущен магнитный поток. Будем рассматривать задачу в цилиндрических координатах, выбрав ось z вдоль оси цилиндра. Вектор-потенциал внутри пленки выберем в виде

$$A_\varphi = \frac{\Phi}{2\pi R}, \quad A_r = A_z = 0. \tag{9.124}$$

Положим частоту внешнего поля $\omega = 0$. Тогда уравнение (9.105) перепишется так:

$$\left\{D\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} - i\frac{e\Phi}{\pi\hbar c}\right)^2\right] + \frac{1}{\tau_\varphi}\right\}\mathcal{C}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi\nu_0\tau^2}\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{9.125}$$

Оно легко решается переходом в представление Фурье:

$$C(z,\varphi,z',\varphi') = \sum_{m,k_z} C_{m,k_z}\, e^{ik_z(z-z')+im(\varphi-\varphi')}. \tag{9.126}$$

Подставив (9.126) в (9.125), получим

$$C_{m,k_z} = \frac{1}{2\pi\nu_0\tau^2 R}\left[\frac{1}{\tau_\varphi} + Dk_z^2 + \frac{D}{R^2}\left(m - \frac{2\Phi}{\Phi_0}\right)^2\right]^{-1}, \tag{9.127}$$

где $\Phi_0 = hc/e$ — *одноэлектронный* квант магнитного потока. Выражая слаболокализационную поправку через $\mathcal{C}(\mathbf{r} = \mathbf{r}')$, получаем

$$\delta\sigma(\Phi) = -\frac{2e^2}{\pi\hbar R} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int \left[k_z^2 + \frac{1}{R^2} \left(m - \frac{2\Phi}{\Phi_0} \right)^2 + \frac{1}{D\tau_\varphi} \right]^{-1} \frac{dk_z}{2\pi} . \tag{9.128}$$

Это выражение периодично по магнитному потоку Φ, поскольку изменение Φ на целое кратное $\Phi_0/2$ можно компенсировать сдвигом m. Имеет смысл преобразовать это выражение так, чтобы периодическая зависимость стала явной. Для этого воспользуемся формулой суммирования Пуассона:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{2\pi ikx}\, dx . \tag{9.129}$$

Применяя эту формулу, затем сдвигая переменную интегрирования и вычисляя интеграл по k_z, находим

$$\delta\sigma(\Phi) = -\frac{e^2}{\pi\hbar} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi ik(x+2\Phi/\Phi_0)}}{\sqrt{x^2 + R^2/D\tau_\varphi}}\, dx . \tag{9.130}$$

Теперь видно, что k-й член этой суммы представляет собой k-ю гармонику $\delta\sigma(\Phi)$. Вычислим интеграл по x, используя формулу

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos tx\, dt}{(t^2+1)^\nu} = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}\, K_\nu(x) , \tag{9.131}$$

где $K_\nu(x)$ — функция Макдональда. Окончательно имеем

$$\delta\sigma(\Phi) = -\frac{2e^2}{\pi\hbar} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{4\pi ik\Phi/\Phi_0}\, K_0 \left(\frac{2\pi kR}{L_\varphi} \right) , \tag{9.132}$$

где $L_\varphi = \sqrt{D\tau_\varphi}$ — длина сбоя фазы. В этом выражении член с $k = 0$ сингулярен. Соответствующий интеграл в (9.130) расходится при больших x. Это та же самая расходимость, что и в (9.101), поскольку величина x/R играет роль x-компоненты волнового вектора. Поэтому расходимость следует обрезать при $x \approx R/l$.

Имеется и другой, более удобный способ избавиться от расходимости — вычесть из $\delta\sigma(\Phi)$ ее усредненное по вариациям потока значение:

$$\delta\sigma(\Phi) - \langle\delta\sigma\rangle_\Phi = \frac{4e^2}{\pi\hbar} \sum_{k=1}^{\infty} K_0 \left(\frac{2\pi kR}{L_\varphi} \right) \cos \left(\frac{4\pi k\Phi}{\Phi_0} \right) . \tag{9.133}$$

Таким образом, сопротивление цилиндра периодически зависит от пропущенного через него магнитного потока[19]. Период осцилляций оказывается равен $\Phi_0/2$. Так происходит потому, что слаболокализационная поправка связана с интерференцией двух обращенных по времени замкнутых траекторий. Если такие траектории «наматываются» на цилиндр, то вдоль одной из них электрон набирает дополнительную фазу $\delta\varphi = 2\pi\Phi/\Phi_0$, а вдоль другой $-\delta\varphi$. Разность фаз равна 2π, если $\Phi = \Phi_0/2$. Таким образом, величина интерференционных эффектов одна и та же при $\Phi = 0$ и $\Phi = \Phi_0/2$.

Результат (9.133) допускает простую интерпретацию. Амплитуда осцилляций $K_0(2\pi kR/L_\varphi)$ есть вероятность того, что случайная траектория успеет уйти от начальной точки на расстояние $2\pi kR$ (т. е. обмотаться вокруг цилиндра k раз) за время τ_φ, в течение которого сохраняется фазовая когерентность. При $2\pi kR \gg L_\varphi$ функция Макдональда экспоненциально затухает. Это значит, что наиболее существенны гармоники с $k \leq L_\varphi/2\pi R$. Поэтому для того чтобы эффект был наблюдаемым, нужно, чтобы цилиндр был маленьким: $2\pi R \ll L_\varphi$. Поскольку τ_φ растет с понижением температуры, то этому условию можно удовлетворить лишь при низких температурах или в достаточно маленьких образцах.

57. Диаграммы на рис. 9.10, дающие коррелятор проводимостей при разных значениях магнитного потока, представляют собой два вклада — диффузонный и куперонный. При этом на электрон во внешней петле диаграммы действует магнитное поле, пропорциональное Φ, а во внутренней — пропорциональное Φ'. В этом случае уравнения для куперона и для диффузона можно получить тем же способом, что и в задаче 56. Нужно только учесть, что, поскольку куперон пропорционален $\langle\psi\psi\rangle$, то в нем векторные потенциалы внутренней и внешней петель на диграммах рис. 9.10 складываются, в то время как диффузон пропорционален $\langle\psi\psi^+\rangle$, и поэтому в нем векторные потенциалы вычитаются. (Тогда при $\Phi = \Phi'$ получаем, что магнитное поле не меняет уравнение диффузии, как и должно быть.) Это означает, что в куперонных диаграммах эффективный магнитный поток есть $(\Phi + \Phi')/2$, а в диффузонных — $(\Phi - \Phi')/2$. В остальном же куперонный и диффузонный вклады совпадают.

Строго говоря, это не совсем правильно. Куперонный вклад, в отличие от диффузонного, экспоненциально затухает на временах $t > \tau_\varphi$. (А диффузионный полюс при $k = 0$ всегда остается при $\omega = 0$ из-за сохранения числа частиц.) Тем не менее, поскольку фазочувствительная часть диффузонного вклада, отвечающая за зависимость проводимости от Φ, все равно исчезает при $t > \tau_\varphi$, мы для простоты игнорируем это различие между диффузоном и купероном.

Как мы увидим ниже, в ответ дают вклад только большие масштабы, поэтому характерный суммарный импульс в купероне и разность импульсов в диффузоне оказываются порядка R^{-1}. Это означает, что импульсы, бегущие по разные стороны каждой примесной лестницы, отличаются мало. Поэтому произведение токовых

[19]На самом деле в реальный металлический цилиндр магнитное поле все-таки слегка проникает, и поэтому строгая периодичность разрушается.

вершин и функций Грина на концах дается множителем

$$A_{\alpha\mu\beta\nu} = e^4 \int v_\alpha v_\mu v'_\beta v'_\nu G_R^2(p)\, G_A^2(p)\, G_R^2(p')\, G_A^2(p') \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{d^2p'}{(2\pi)^2} \tag{9.134}$$

(при выводе этой формулы несущественная зависимость функций Грина от энергии была опущена). Интегралы легко вычисляются переходом к интегрированию по ξ, что дает

$$A_{\alpha\mu\beta\nu} = \frac{e^4 v_F^4}{4} \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu}(4\pi\nu_0\tau^3)^2 = 16\pi^2\nu_0^2\tau^4 D^2 \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu}\,. \tag{9.135}$$

Интегрирование по энергиям дает, как обычно, $\omega/2\pi$, причем ω сокращается после подстановки функции отклика в определение проводимости. Поэтому коррелятор проводимостей (9.32) есть [20]

$$K_{\Phi,\Phi'} = 2e^4\pi^2\nu_0^2\tau^4 D^2 \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} \int \left(|C(\mathbf{r},\Phi,\Phi')|^2 + |D(\mathbf{r},\Phi,\Phi')|^2 \right)\, d^2r\,. \tag{9.136}$$

Квадрат куперонной амплитуды можно найти по теореме Парсеваля:

$$I_C = \int C^2(\mathbf{r})\, d^2r = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |C_{m,k_z}|^2 \frac{dk_z}{2\pi}\,. \tag{9.137}$$

Это выражение можно преобразовать, как и ранее, проинтегрировав по k_z и применив формулу суммирования Пуассона (9.129):

$$I_C = \frac{1}{16\pi^2\nu_0^2\tau^4 D^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i k(x+(\Phi+\Phi')/\Phi_0)}}{(x^2+R^2/L_\varphi^2)^{3/2}}\, dx\,. \tag{9.138}$$

Интеграл по x, согласно (9.132), выражается через функцию Макдональда:

$$I_C = \frac{1}{16\pi^2\nu_0^2\tau^4 D^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{4\pi k L_\varphi}{R} K_1\left(\frac{2\pi k R}{L_\varphi}\right) e^{2\pi i k(\Phi+\Phi')/\Phi_0}\,. \tag{9.139}$$

Аналогичное выражение для диффузонного вклада отличается заменой $\Phi+\Phi'$ на $\Phi-\Phi'$. Подставив (9.139) в (9.136) и приведя подобные члены, получим

$$\begin{aligned} K_{\Phi,\Phi'} = {} & \frac{e^4 R^2}{\pi^2\hbar^2 L_\varphi^2}\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} \times \\ & \times \left[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\pi k R}{L_\varphi} K_1\left(\frac{2\pi k R}{L_\varphi}\right) \cos\frac{2\pi k\Phi}{\Phi_0}\, \cos\frac{2\pi k\Phi'}{\Phi_0}\right] \end{aligned} \tag{9.140}$$

(в члене с $k=0$ нужно взять предел малых k и использовать асимптотику функции Макдональда $K_1(x \ll 1) \approx 1/x$).

[20] Интеграл по $d^2\mathbf{r}$ в (9.136) возникает потому, что начальная и конечная точки на диаграммах рис. 9.10 различаются.

Результат (9.140) подтверждает ожидаемую качественную картину. Основная гармоника имеет период Φ_0, а не $\Phi_0/2$. (Это видно из того, что зависящая от магнитного потока часть пропорциональна произведению двух косинусов с периодом Φ_0). Однако при усреднении проводимости по беспорядку этот вклад исчезает, поэтому он проявляется лишь в корреляции проводимостей одного и того же образца.

Обратим внимание на интересную немонотонную зависимость результата от параметра $2\pi R/L_\varphi$. При $2\pi R \gg L_\varphi$ функции Макдональда, определяющие зависимость от магнитного потока, экспоненциально малы. В этом пределе электроны не могут обойти цилиндр, не потеряв при этом фазовую когерентность, так что исчезновение эффекта в этом пределе вполне естественно. Более интересно, что в противоположном пределе ($2\pi R \ll L_\varphi$) эффект тоже мал как R^2/L_φ^2. Это происходит потому, что в этих условиях вклад дает большое число траекторий, проходящих в разных местах поверхности цилиндра, что эффективно приводит к усреднению по беспорядку. А вот при $2\pi R \approx L_\varphi$ электроны, дающие вклад в интерференционную поправку, обходят цилиндр по траекториям, не слишком далеко отстоящим от наикратчайшей, поэтому усреднения по беспорядку не происходит.

Заметим, что отличие проводимости конкретного образца от средней может быть довольно заметным. При $L_\varphi \approx 2\pi R$ (необходимое условие наблюдения эффекта Ааронова–Бома) коррелятор проводимостей оказывается порядка $(e^2/h)^2$. Таким образом, при изменении беспорядка проводимость может измениться на величину порядка e^2/h, хотя образец при этом остается макроскопическим и содержит большое количество примесей ($R \gg l$). Это означает, что интерференционная часть проводимости является макроскопически измеримой несамоусредняющейся величиной. Этот неожиданный эффект есть проявление фазовой когерентности электронов при низких температурах.

9.6. Диаграммы без самопересечений

Остановимся на вопросе о связи между разложением по параметру $(p_0 l)^{-1}$ и классификацией диаграмм, возникающих при усреднении по беспорядку. Диаграммы для рассеяния электронов на случайном потенциале содержат два элемента: электронные линии (функции Грина) и примесные штриховые линии, которые, вообще говоря, могут пересекаться произвольным образом. Основной результат, на котором основаны все применения этой техники, состоит в том, что вклады наинизшего порядка по $(p_0 l)^{-1}$ даются одними лишь непересекающимися графиками. Такие графики определяют так называемое «приближение кинетического уравнения». Условие $p_0 l \gg 1$ в точности соответствует больцмановскому параметру, используемому при выводе классического кинетического уравнения, т. е. большой величине длины свободного пробега по сравнению с радиусом взаимодействия. Оказывается, что результаты, получающиеся при отбрасывании всех графиков с пересекающимися примесными линиями, в точности совпадают с результатами, выведенными из кинетического уравнения.

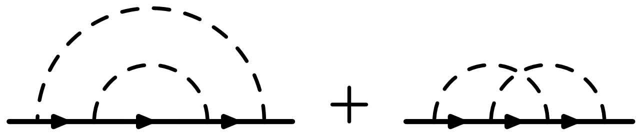


Рис. 9.19

Попробуем понять, почему графики с непересекающимися линиями оказываются выделенными, используя координатное представление. Рассмотрим для этого два графика, дающие поправки к собственно-энергетической части Σ (рис. 9.19). Эти графики дают поправки второго порядка к простейшей собственно-энергетической части $\Sigma = -\delta\mu - \frac{i}{2\tau}\operatorname{sign}\varepsilon$, найденной в задаче 50 в низшем порядке по рассеянию на примесях. Как мы увидим, вклад первого графика много больше вклада второго графика.

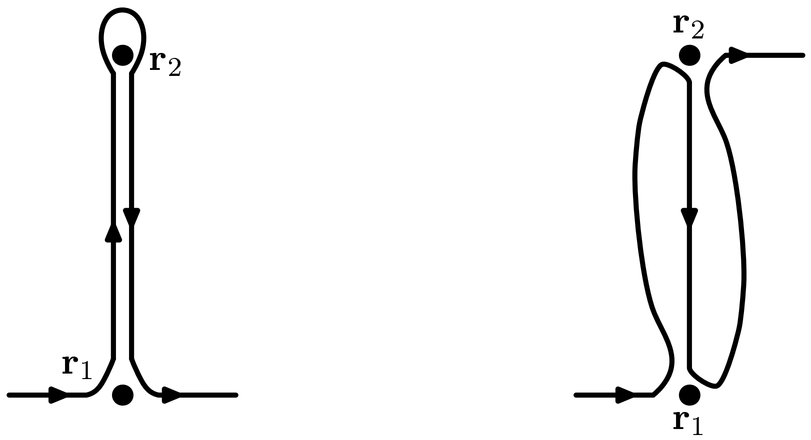


Рис. 9.20

Перерисуем диаграммы, показанные на рис. 9.19, в координатном представлении (рис. 9.20). Все гриновские функции, за исключением первой и последней, прикрепляются обоими своими концами к примесям. В координатном представлении усреднение по взаимному расположению примесей производится интегрированием по радиус-вектору $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Зависимость функций Грина от координат дается выражением (9.18).

Найдем вклады графиков, показанных на рисунках 9.19 и 9.20, в мнимую часть $\operatorname{Im}\Sigma$. Заметим, что $\operatorname{Im}\Sigma$ — это мнимая часть амплитуды рассеяния на двух примесях. Воспользуемся теоремой унитарности, связывающей мнимую часть амплитуды рассеяния с сечением рассеяния. Чтобы получить графическое представление этой теоремы (см. задачу 15), надо в каждой диаграмме, описывающей рассеяние во внешнем поле, пометить одну из функций Грина G и заменить ее на GG^*, где G^* — комплексно-сопряженная функция. Одновременно с этим, все функции, идущие после помеченной функции Грина, надо заменить на комплексно-сопряженные. При этом, с одной стороны, суммирование по различным графикам и по всем способам пометить одну из функций данного графика дает мнимую часть амплитуды рассеяния. С другой стороны, независимое суммирование по различным частям графиков, встречающимся до и после помеченного места, дает произведение амплитуды рассеяния на комплексно-сопряженную амплитуду с коэффициентом, равным плотности состояний.

Следуя этому рецепту, представим мнимую часть графиков, показанных на рис. 9.20, в виде суммы по помеченным графикам. Обратим внимание на то, что в зависимости от количества функций G и G^* осциллирующие фазовые множители $G(\varepsilon, \mathbf{r}) \sim e^{ip_0|\mathbf{r}|\,\mathrm{sign}\,\varepsilon}$, $G^*(\varepsilon, \mathbf{r}) \sim e^{-ip_0|\mathbf{r}|\,\mathrm{sign}\,\varepsilon}$ могут сократиться, а могут и не сократиться. Например, если на первом графике на рис. 9.20 помечена функция, выходящая из примеси 2 и возвращающаяся в нее же, то фазовые множители функций, идущих из примеси 1 в примесь 2, и обратно, сокращают друг друга. В то же время, на втором графике рис. 9.20 никакой способ пометки не приводит к сокращению фазовых множителей.

При усреднении по расположению примесей вклады с сокращающимися и с несокращающимися фазовыми множителями $e^{\pm ip_0|\mathbf{r}|}$ ведут себя по-разному. Осциллирующий как функция расстояния между примесями $|\mathbf{r}|$ множитель обрезает интеграл по $d^3\mathbf{r}$ на $|\mathbf{r}| \approx p_0^{-1}$. Если же происходит сокращение $e^{ip_0|\mathbf{r}|}$ и $e^{-ip_0|\mathbf{r}|}$, то обрезка интеграла по $d^3\mathbf{r}$ определяется медленно убывающим множителем $e^{-|\mathbf{r}|/2l}$ в выражении (9.18). Соответствующий масштаб есть $|\mathbf{r}| \approx l$, что много больше p_0^{-1}. Поэтому главный по $p_0 l$ вклад в $\mathrm{Im}\,\Sigma$ дается графиками, которые можно пометить так, чтобы все фазовые множители $e^{\pm ip_0|\mathbf{r}|}$ сократили друг друга.

Вследствие этого, вклад первого графика на рис. 9.20 будет порядка τ^{-1}, а второго — порядка τ^{-2}. Сделанное наблюдение нетрудно обобщить на более сложные графики, в которые входит произвольно большое число примесей. Действительно, условие непересечения примесных линий означает просто, что функции Грина проходят одну и ту же (случайную) последовательность примесей, сначала в прямом порядке, а потом в обратном. Пример графика такого рода приведен на рис. 9.21. При этом всегда можно добиться сокращения фазовых множителей, если пометить любую из гриновских функций с совпадающими концами. Следовательно, произвольный график с N непересекающимися линиями по порядку величины равен $\tau^{-N}\tau^{N-1} = \tau^{-1}$, где первый сомножитель есть вклад N примесных линий, а второй — есть результат $N-1$ интегрирования по взаимному расположению примесей.

Обратим внимание на то, что вклады всех графиков с непересекающимися линиями оказываются того же порядка, что и $\mathrm{Im}\,\Sigma = -\frac{1}{2\tau}\,\mathrm{sign}\,\varepsilon$, найденное в нулевом приближении (см. задачу 50). Вообще говоря, это означает, что при вычислении Σ ограничиваться нулевым приближением некорректно. Однако, как мы увидим в разд. 9.7, при суммировании *всех* графиков порядка τ^{-1}

получается ответ, совпадающий с нулевым приближением.

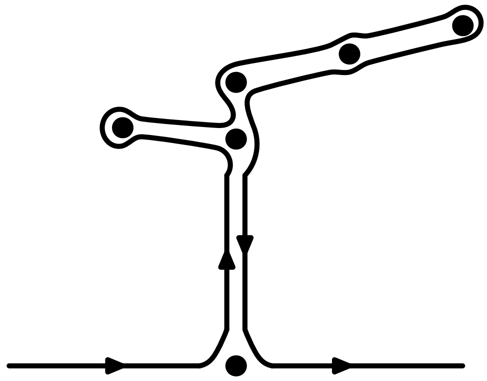


Рис. 9.21

Итак, если в каком–то графике примесные линии пересекаются, то становятся важны корреляции в расположении примесей на расстояниях порядка p_0^{-1}. (Это происходит из-за несокращения фазовых множителей, приводящего к интерференции волн, рассеянных на различных примесях.) Если же линии не пересекаются, то такой корреляции нет, поскольку фазы волн, идущих в прямом и обратном направлении, компенсируются. В результате, когда линии не пересекаются, интегрирования по положениям разных примесей оказываются независимыми. В противном случае интегрирования оказываются зависимыми. Каждое зависимое интегрирование дает лишний множитель $(p_0 l)^{-1}$ по сравнению с независимыми интегрированиями.

При таком рассмотрении становится ясно, что пренебрежение пересекающимися линиями эквивалентно пренебрежению корреляциями между последовательными столкновениями с примесями. Это в точности то же самое приближение, как и то, что используется в теории кинетического уравнения. Поэтому параметр $(p_0 l)^{-1}$ — это обычный больцмановский малый параметр кинетической теории.

Следовательно, любые кинетические коэффициенты, такие как проводимость или коэффициент диффузии, найденные с помощью диаграммной техники в главном порядке по $(p_0 l)^{-1}$, должны совпадать с результатами, полученными с помощью классического кинетического уравнения. В том, что это действительно так, мы убедились в задачах 51 и 52. Разумеется, с помощью диаграммной техники можно не только обосновать кинетическое уравнение квантовомеханически, но и рассмотреть эффекты следующего порядка по $(p_0 l)^{-1}$, не описываемые классической кинетической теорией. Оказывается, что в этом порядке возникают принципиально квантовые физические эффекты, требующие учета интерференции электронных волн (см. задачи 53 и 54).

С несколько более формальной теоретико-полевой точки зрения, ситуция при $p_0 l \gg 1$ аналогична $1/N$-разложению в теориях поля с большим изоспином. Напомним, что $1/N$-разложение вводится для теории, содержащей $N \gg 1$ свободных полей $\varphi_i(x^\mu)$, взаимодействие между которыми изотропно по изоспину:

$$\mathcal{L} = \int \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_i \partial^\mu \varphi^i + \frac{1}{2} g (\varphi_i \varphi^i)^2 \right) d^4 x \,. \qquad (9.141)$$

Оказывается, что в главном порядке по $1/N$ важны только диаграммы, в которых линии, соответствующие полю φ_i, не пересекаются. В теории поля такие диаграммы обычно называют *планарными*, поскольку, с топологической точки зрения, их всегда можно уложить на плоскость без самопересечений. Кроме того, для диаграмм произвольного вида в теории поля доказывается, что порядок диаграммы по $1/N$ определяется минимальным родом поверхности (т. е. числом ручек), при котором диаграмму можно изобразить на этой поверхности без самопересечений [21].

В задаче об упругом рассеянии на случайно расположенных примесях состояния частицы характеризуются импульсом, принимающим значения на ферми-поверхности. Из-за конечной длины свободного пробега, имеется неопределенность в импульсе порядка $\delta p = l^{-1}$. Поэтому количество различных состояний частицы оказывается порядка

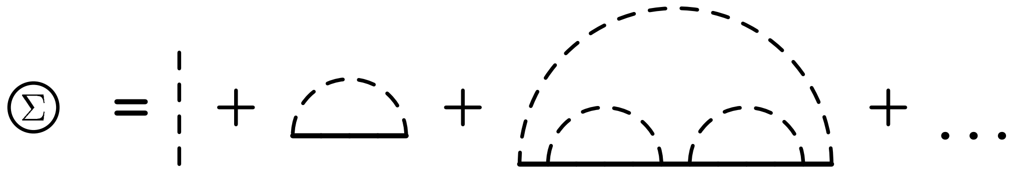
$$N_0 = (p_0/\delta p)^2 = (p_0 l)^{d-1}\,, \tag{9.142}$$

где d — размерность системы. Для объяснения роли непересекающихся диаграмм в [1] приводится рассуждение, использующее ограничение фазового объема при интегрировании по импульсам в диаграммах с пересекающимися примесными линиями. Обратим внимание на то, что эта аргументация точно такая же, как для теории взаимодействующего N-компонентного поля с $N = N_0$.

9.7. Электронный спектр неупорядоченной системы

Выше мы рассмотрели ряд теории возмущений для собственно-энергетической части и показали, что главный вклад дается графиками с непересекающимися линиями. При этом оказалось, что вклады графиков с произвольно большим количеством линий одинаковы и равны по порядку величины τ^{-1}. Поэтому, вообще говоря, необходимо выполнить суммирование всех таких графиков. Это нетрудно сделать с помощью метода блочного суммирования.

Чтобы не загромождать формулы выражениями, зависящими от знака ε, рассмотрим запаздывающую функцию Грина, полагая $\mu = 0$. Невозмущенная функция Грина есть $G_R^{(0)}(\varepsilon, \mathbf{p}) = (\varepsilon - \mathbf{p}^2/2m + i0)^{-1}$. Введем собственно-энергетическую часть $\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})$, определив ее обычным образом, как сумму всех неприводимых диаграмм. Из графического представления $\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})$ (рис. 9.22) ясно, что любой вклад в $\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})$ можно представить в виде вклада в усредненную функцию Грина с концами, замкнутыми примесной линией.



[21] см. оригинальную работу: G. t'Hooft, Nucl. Phys. B, v. 72, p. 461 (1974), или книгу [10]

Рис. 9.22

В этом случае уравнение Дайсона выглядит весьма просто:

$$\Sigma(\varepsilon,\mathbf{p}) \,=\, nu_0 \,+\, \frac{nu_0^2}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3\mathbf{p}'}{\varepsilon-\mathbf{p}'^2/2m-\Sigma(\varepsilon,\mathbf{p}')}\,, \tag{9.143}$$

и его нетрудно решить. Выражение в правой части не зависит от $\mathbf{p}$, поскольку примеси точечные. Поэтому $\Sigma(\varepsilon,\mathbf{p})$ является функцией одного лишь ε.

В главном порядке по nu_0^2 решение получается, если заменить $\Sigma(\varepsilon,\mathbf{p}')$ в правой части (9.143) на $-i0$. В случае, когда величина $\operatorname{Im}\Sigma(\varepsilon)$ отлична от нуля, но мала по сравнению с ε, значение выражения в правой части (9.143) останется таким же, как и в нулевом приближении (с точностью до членов более высокого порядка малости по $(p_0 l)^{-1}$). Поэтому собственно-энергетическая часть $\Sigma(\varepsilon,\mathbf{p})$, найденная в задаче 50 в низшем порядке по $(p_0 l)^{-1}$, в действительности является самосогласованным решением уравнения Дайсона (9.143) при условии $p_0 l \gg 1$.

Поучительно решить уравнение (9.143) явно, не предполагая малости $\Sigma(\varepsilon)$ по сравнению с ε. Чтобы вычислить интеграл в правой части (9.143) надо регуляризовать расходимость при больших $|\mathbf{p}|$. Для этого обрежем интегрирование на a^{-1}, где a — радиус примеси. (Напомним, что примеси можно считать точечными при энергиях $(2m\varepsilon)^{1/2}a \ll 1$.) Перепишем уравнение (9.143) таким образом:

$$\Sigma(\varepsilon) \,=\, nu_0 \,-\, g\int\limits_0^{a^{-1}} \frac{p^2dp}{p^2+\lambda^2(\varepsilon)}\,,\quad \lambda(\varepsilon)=\sqrt{2m(\Sigma(\varepsilon)-\varepsilon)}\,,\quad g=nu_0^2m/\pi^2\,. \tag{9.144}$$

Интеграл в (9.144) есть $a^{-1}-\pi\lambda/2$. Используя связь λ и Σ, получаем уравнение на λ:

$$\pi\, g\,\lambda-\lambda^2/m \,=\, 2\,\tilde{\varepsilon}\,, \tag{9.145}$$

где $\tilde{\varepsilon}=\varepsilon-nu_0+g/a$. Решение этого уравнения имеет вид

$$\lambda(\varepsilon) \,=\, \begin{cases} \frac{\pi}{2}mg+\sqrt{2m(\varepsilon_0-\tilde{\varepsilon})} & \text{при}\quad \tilde{\varepsilon}<\varepsilon_0\,, \\ \frac{\pi}{2}mg+i\sqrt{2m(\tilde{\varepsilon}-\varepsilon_0)} & \text{при}\quad \tilde{\varepsilon}>\varepsilon_0\,, \end{cases} \tag{9.146}$$

где $\varepsilon_0=\pi^2mg^2/8$. Отсюда находим

$$\Sigma(\varepsilon)=\frac{\pi}{2}\,g\,\lambda(\varepsilon)-nu_0+g/a\,. \tag{9.147}$$

При больших положительных $\varepsilon \gg nu_0$, разлагая квадратный корень в (9.146), получаем

$$\Sigma(\varepsilon)=2\varepsilon_0-nu_0+g/a-i\pi nu_0^2\nu(\varepsilon)\,, \tag{9.148}$$

где $\nu(\varepsilon)=m(2m\varepsilon)^{1/2}/2\pi^2$ — плотность состояний в отсутствие примесей. Нетрудно видеть, что вещественная часть Σ просто сдвигает дно электронной зоны (т. е.

меняет химический потенциал) и поэтому несущественна. Мнимая же часть определяет время жизни электрона в данном состоянии и при больших ε совпадает с результатом, найденным в задаче 50.

Полученное решение (9.146) уравнения Дайсона (9.143) часто используют не только при больших, но и при произвольных энергиях. Разумеется, формально это некорректно, поскольку (9.143) было выведено в предположении $p_0 l \gg 1$. Тем не менее, такое *самосогласованное борновское приближение* часто приводит к качественно правильным результатам.

Например, рассмотрим одночастичную плотность состояний. Воспользуемся известным соотношением между плотностью состояний и функцией Грина: $\nu(\varepsilon) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \operatorname{Tr} \widehat{G}$. Нас интересует плотность состояний, усредненная по беспорядку. Поэтому, используя найденное выражение для усредненной функции Грина, получаем

$$\nu(\varepsilon) = \frac{1}{\pi(2\pi)^3} \operatorname{Im} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{\varepsilon - \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2 - \Sigma(\varepsilon)} = -\operatorname{Im} \frac{m}{\pi^3} \int\limits_0^\infty \frac{p^2 dp}{p^2 + \lambda^2(\varepsilon)} =$$
$$= \frac{m}{2\pi^2} \sqrt{2m(\varepsilon - \varepsilon_*)}, \quad \varepsilon_* = nu_0 - g/a + \varepsilon_0 \,, \tag{9.149}$$

где $\lambda(\varepsilon)$ дается выражением (9.146). Итак, самосогласованное борновское приближение дает плотность состояний (9.149), отличающуюся от плотности состояний чистой системы лишь сдвигом энергии на определенную величину. Выражение (9.149) имеет качественно правильное поведение: ниже порога $\varepsilon = \varepsilon_*$ плотность состояний $\nu(\varepsilon)$ обращается в нуль, а при больших ε переходит в $\nu(\varepsilon)$ чистой системы.

9.7.1. Хвост локализованных состояний.

Следует отметить, что самосогласованное борновское приближение несправедливо непосредственно вблизи порога $\varepsilon = \varepsilon_*$. В этой области выражение (9.149) сильно упрощает истинную картину. Дело в том, что состояния в нижней части спектра в случайном потенциале всегда *локализованы*[22] и поэтому приближение слабого рассеяния в этом случае не имеет смысла. Для изучения локализованных состояний требуются совершенно иные методы, выходящие за рамки теории возмущений.

Локализация приводит к качественным изменениям в поведении плотности состояний системы. Рассмотрим, например, случай отталкивательного потенциала примесей, $u_0 > 0$. Согласно формуле (9.149), пороговая энергия ε_*, выше которой плотность состояний отлична от нуля, положительна (поскольку $g/a \ll nu_0$ для точечных примесей). Однако в реальной системе имеются состояния с любыми неотрицательными энергиями. Причина этого в том, что из-за случайного расположения примесей с какой-то вероятностью произвольно большая область пространства может оказаться свободной от примесей. Состояния с энергиями $0 < \varepsilon < \varepsilon_*$ образуют так называемый *хвост локализованных состояний*. Эта часть плотности состояний не

[22] Понятие локализации было впервые введено в работе: P. W. Anderson, Phys. Rev., v. 109, p. 1492-1505 (1958)

может быть получена по теории возмущений, поскольку при энергиях $\varepsilon \approx \varepsilon_*$ формально $p_0 l \ll 1$.

При самых низких энергиях $0 < \varepsilon \ll \varepsilon_*$ плотность состояний допускает простую оценку [23]. Вероятность найти состояние с энергией ε определяется тем, что найдется достаточно большая область объема V_ε, свободная от примесей, в которой имеется состояние с требуемой энергией. Поскольку вероятность найти такую область экспоненциально мала по V_ε, возникает задача о выборе оптимальной области как можно меньшего объема, так называемой *оптимальной флуктуации* случайного потенциала. Можно показать, что такая область должна быть сферической. Условие того, что сферическая полость содержит состояние с энергией ε, есть $\sqrt{2m\varepsilon}R = \pi/2$, где R — радиус полости. Поэтому $V_\varepsilon^{\min} = 4\pi R^3/3 = (\pi^4/6)(2m\varepsilon)^{-3/2}$. Вероятность того, что имеется такая свободная от примесей сферическая область, есть $P(\varepsilon) = \exp\left(-nV_\varepsilon^{\min}\right)$. В результате плотность состояний при самых малых энергиях ведет себя как $\exp\left(-\mathrm{const}\,(\varepsilon_*/\varepsilon)^{3/2}\right)$.

Вопрос о плотности состояний вблизи «самосогласованного порога» $\varepsilon = \varepsilon_*$ также может быть решен [24]. При этом, как и в предыдущем случае, ответ дается вероятностью оптимальной флуктуации. Однако, задача об отыскании такой флуктуации оказывается менее простой.

[23] И. М. Лифшиц, ЖЭТФ, т. 53, с. 743 (1967)

[24] см. работы: B. I. Halperin, M. A. Lax, Phys. Rev., v. 148, p. 722 (1966), ibid., v. 153, p. 802 (1967); J. Zittartz, J. S. Langer, Phys. Rev., v. 148, p. 741 (1966).

Глава 10.

Сверхпроводимость

10.1. Микроскопическая теория сверхпроводимости

10.1.1. Образование куперовских пар.

Сверхпроводимость в металлах возникает из-за электрон-фононного взаимодействия, приводящего к притяжению между электронами. Качественно это можно понять так. Двигаясь в металле, электрон притягивает ионы. За счет этого, кристаллическая решетка слегка деформируется. Поэтому в области, через которую прошел электрон, на некоторое время остается нескомпенсированным положительный заряд ионов, который, в свою очередь, притягивает другие электроны.

На первый взгляд, электрон-фононное взаимодействие не должно существенно влиять на физику электронной системы. Ведь ядра решетки тяжелые, и электронам трудно сдвинуть их с места. Как мы выяснили в гл. 6, где обсуждалась теория Мигдала, принимающая во внимание большую разницу масс электронов и ионов, это в каком-то смысле справедливо. Действительно, даже при величине электрон-фононного взаимодействия порядка единицы, поправки к различным физическим величинам оказываются либо малыми, либо сосредоточенными в интервале энергий порядка дебаевской, т. е. много меньше энергии Ферми.

Однако оказывается, что электрон-фононное притяжение весьма эффективно, если импульсы взаимодействующих электронов направлены в противоположные стороны. Один электрон, двигаясь сквозь кристалл, встряхивает решетку вдоль линии своего движения. Колебания решетки — это медленный процесс, поэтому электрон оставляет за собой сравнительно долгоживущий след. Характерная частота колебаний решетки порядка дебаевской частоты $\omega_D \sim \sqrt{m/M}\varepsilon_F$, где m/M – отношение массы электрона к массе иона. Поэтому время рассасывания возмущения решетки оказывается примерно в $\sqrt{M/m}$ раз больше, чем время, за которое электрон проходит расстояние между соседними ионами. Это означает, что возмущение решетки, созданное движущимся электроном, образует след, вытянутый вдоль траектории электрона примерно на $\sqrt{M/m}$ межатомных расстояний. Второй электрон, если он движется точно навстречу первому, проходит через те же самые точки пространства, но в обратном порядке. Все то время, пока рассасывается возмущение, этот электрон находится внутри следа, оставленного первым электроном. Поэтому притяжение между электронами с противоположными импульсами оказывается гораздо сильнее, чем между электронами, движущимися под углом.

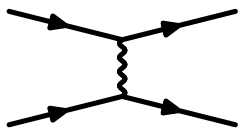


Рис. 10.1

Более формально электрон-электронное притяжение получается так. Взаимодействие между электронами за счет обмена виртуальным фононом описывается диаграммой, изображенной на рис. 10.1. Мы будем рассматривать этот процесс, как эффективное взаимодействие двух электронов с передачей импульса k. По правилам диаграммной техники, описанным в главах 4 и 6, линии взаимодействия соответствует такое выражение:

$$g_{e-ph}^2 D(\omega, \mathbf{k}) = \frac{g_{e-ph}^2 \omega_{\mathbf{k}}^2}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2}\,. \tag{10.1}$$

Интерес для нас представляют процессы, в которых переданный импульс $\mathbf{k}$ порядка фермиевского, а переданная энергия мала: $\omega \ll \omega_D$. Поскольку $\omega_{\mathbf{k}} \approx \omega_D$, выражение (10.1) оказывается равным просто $-g_{e-ph}^2$. Отрицательный знак амплитуды рассеяния на рис. 10.1 означает, что эффективное взаимодействие является притяжением. Заметим, что передача импульса порядка p_0 возможна. лишь если суммарный импульс мал. В противном случае, поскольку все состояния под ферми-поверхностью заняты, а суммарный импульс сохраняется, передача импульса от одной частицы к другой при взаимодействии оказывается малой. (Это наиболее очевидно, если суммарный импульс близок к $2p_0$, т. е. взаимодействующие электроны находятся в близких точках ферми-поверхности. В этом случае возможная величина переданного импульса много меньше p_0.) Таким образом, взаимодействие (10.1) наиболее эффективно для электронов с противоположными импульсами.

Оказывается, что эффективное притяжение приводит к образованию связанного состояния. Электроны группируются в так называемые *куперовские пары* с противоположно направленными импульсами. Спины электронов в паре оказываются при этом направленными в разные стороны, так чтобы спиновая часть волновой функции пары была нечетной, а координатная — четной. При этом выигрыш в энергии пары из-за электрон-фононного взаимодействия максимален. Таким образом, куперовская пара представляет собой спиновый синглет, а ее орбитальный момент равен нулю.

Такое спаривание называется s-спариванием. Существуют и другие виды сверхпроводящего спаривания более общего вида, характеризующиеся отличным от нуля орбитальным моментом пары или спином пары равным единице. Такое спаривание реализуется, например, в ^{3}He, а также в некоторых сверхпроводящих материалах, относящихся к классам так называемых «купратных» и «тяжелофермионных» сверхпроводников.

Наконец, остановимся на связи эффекта спаривания с явлением сверхпроводимости. Заметим, что куперовские пары подчиняются бозе-статистике, и поэтому при низкой температуре они формируют бозе-конденсат. В такой бозе-жидкости из куперовских пар все механизмы рассеяния электронов становятся неэффективными, потому что при рассеянии одного из спаренных электронов пара разрушилась бы. Но разрушение пары требует затраты энергии порядка энергии связи электронов в паре. Поэтому при температуре меньше энергии связи пары рассеяние отдельных электронов оказывается энергетически невыгодным. Вследствие этого при низких температурах электрический ток может течь без диссипации.

Остановимся на влиянии кулоновского взаимодействия на сверхпроводимость. Можно было бы ожидать, что сверхпроводимость должна подавляться прямым электрон-электронным взаимодействием. Действительно, эффекты кулоновского взаимодействия обычно порядка единицы. При этом фононное притяжение между электронами короткодействующее, а кулоновское отталкивание — дальнодействующее. Поэтому, казалось бы, отталкивание должно перевесить. Однако все не так просто. Дело в том, что кулоновское взаимодействие запаздывает на время порядка обратной плазменной частоты, а электрон-фононное — на время порядка ω_D^{-1}. Иными словами, электрон оставляет вдоль своей траектории фононный след, который не рассасывается относительно долго (см. задачу 64). Поэтому взаимодействие между электронами за счет обмена фононами происходит гораздо дольше, чем кулоновское отталкивание. Следствием этого является относительная малость эффекта кулоновского взаимодействия (см. задачу 61). В результате электрон-фононное взаимодействие оказывается более существенным для сверхпроводимости, чем кулоновское.

Чтобы лучше понять механизм образования пар, мы упростим задачу и, следуя первоначальной идее Купера, рассмотрим всего два взаимодействующих электрона, движущихся на фоне ферми-моря. При этом мы будем пренебрегать эффектом рождения электрон-дырочных пар, и учтем влияние остальных электронов только в том смысле, что импульсы выбранных нами двух электронов будут обязаны лежать вовне ферми-сферы.

В импульсном представлении состояния пары электронов описываются волновой функцией $\Psi_{\alpha\beta}(\mathbf{p},\mathbf{p}')$, где $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ — импульсы, а α и β — спиновые индексы. Взаимодействие между электронами сохраняет спин, поэтому будем рассматривать только синглетные состояния $\Psi_{\alpha\beta}(\mathbf{p},\mathbf{p}') = \Psi(\mathbf{p},\mathbf{p}')(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$. Орбитальная часть волновой функции $\Psi(\mathbf{p},\mathbf{p}')$ удовлетворяет уравнению Шредингера в импульсном пространстве:

$$E\,\Psi(\mathbf{p},\mathbf{p}') = (E_p + E_{p'})\Psi(\mathbf{p},\mathbf{p}') + \sum_{\mathbf{p}+\mathbf{p}'=\mathbf{q}+\mathbf{q}'} V_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\mathbf{q}\mathbf{q}'}\Psi(\mathbf{q},\mathbf{q}')\,. \tag{10.2}$$

Здесь $E_p = p^2/2m - \mu$ — одночастичная энергия, а $V_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\mathbf{q}\mathbf{q}'}$ — эффективное взаимодействие между электронами. Как указано выше, мы предполагаем, что импульсы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ находятся снаружи ферми-сферы: $|\mathbf{p}| > p_0$, $|\mathbf{p}'| > p_0$.

Следует заметить, что характерная энергия, переданная при электрон-фононном взаимодействии, не может быть больше дебаевской частоты ω_D. Поэтому будем считать, что взаимодействие $V_{\mathbf{pp'qq'}}$ отлично от нуля только в узком интервале энергий порядка ω_D:

$$V_{\mathbf{pp'qq'}} = \begin{cases} -\lambda & \text{при } |E_p|,\ |E_{p'}| < \omega_D, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{10.3}$$

Здесь мы ввели обозначение для эффективной константы взаимодействия: $\lambda \equiv g_{e-ph}^2$.

Рассмотрим вначале случай нулевого суммарного импульса пары $\mathbf{P} = \mathbf{p} + \mathbf{p}' = 0$. При этом уравнение (10.2) принимает вид

$$(E - 2E_p)\Psi(\mathbf{p}, -\mathbf{p}) = -\lambda \sum_{0<E_q<\omega_D} \Psi(\mathbf{q}, -\mathbf{q}) \tag{10.4}$$

Поскольку правая часть этого уравнения не зависит от $\mathbf{p}$ в области $|E_p| < \omega_D$, решение уравнения есть

$$\Psi(\mathbf{p}, -\mathbf{p}) = \frac{a}{E - 2E_p}\,. \tag{10.5}$$

Такое решение существует, если

$$-\lambda \sum_{0<E_q<\omega_D} \frac{1}{2E_q - E} \;=\; 1\,. \tag{10.6}$$

Напомним, что условие $E_q > 0$ в (10.6) возникает, поскольку в задаче присутствует ферми-море, из-за чего рассматриваемые два электрона не могут переходить в состояния под ферми-поверхностью. Условие же $E_q < \omega_D$ в (10.6) отражает тот факт, что электроны обмениваются фононами, и поэтому переданная при взаимодействии энергия не может быть больше ω_D.

Нас интересует связанное состояние электронов пары, поэтому энергия E должна быть отрицательной. Переходя в (10.6) к интегрированию по ξ, имеем

$$1 \;=\; \lambda\nu_0 \int_0^{\omega_D} \frac{d\xi}{2\xi + |E|} \;=\; \frac{1}{2}\lambda\nu_0\, \ln\Big(1 + \frac{2\omega_D}{|E|}\Big)\,, \tag{10.7}$$

где $\nu_0 = mp_0/(2\pi^2\hbar^3)$ — одночастичная плотность состояний на уровне Ферми. Решая уравнение (10.7), получаем энергию связи пары:

$$E \;=\; -\frac{2\omega_D}{e^{2/\lambda\nu_0} + 1}\,. \tag{10.8}$$

При малой константе связи $\lambda\nu_0 \ll 1$ выражение (10.8) превращается в $E = -2\omega_D e^{-2/\lambda\nu_0}$. Итак, связанное состояние двух электронов действительно существует. Обратим внимание на существенную роль ферми-статистики. Электроны не могут перейти в занятые состояния под ферми-поверхностью, поэтому в импульсном пространстве они всегда находятся в тонком двумерном сферическом слое между $|\mathbf{p}| = p_0$ и $|\mathbf{p}| \approx p_0 + \omega_D/v_F$. Аналогично можно рассмотреть образование пары с суммарным импульсом $\mathbf{p}$ отличным от нуля. Нетрудно показать, что в этом случае минимальная энергия связи достигается при $\mathbf{p} = 0$.

Отметим интересную аналогию между рассмотренной задачей об одной куперовской паре и задачами 12 и 13, в которых обсуждается образование связанного состояния при движении частицы в поле мелкой ямы. Связанное состояние имеется только в пространстве размерности $D \geqslant 2$, причем при $D = 2$ ситуация логарифмическая, как в (10.6), и энергия связи оказывается экспоненциально малой по глубине ямы. Особая роль размерности $D = 2$ связана с тем, что плотность состояний $\nu(\varepsilon)$ при $D < 2$ расходится при энергии $\varepsilon \to 0$, в то время как при $D = 2$ плотность состояний $\nu(\varepsilon)$ остается конечной при сколь угодно малом ε. В то же время при $D > 2$ плотность состояний обращается в нуль при $\varepsilon \to 0$, чем и объясняется отсутствие связанных состояний в мелкой яме. Нетрудно видеть, что при $D = 2$ задача о мелкой яме формально эквивалентна задаче о куперовской паре. Поэтому иногда говорят, что динамика куперовской пары эффективно двумерна.

Интересно оценить размер куперовской пары. Это можно сделать, например, из соотношения неопределенности. Энергия каждого из электронов в паре имеет неопределенность порядка Δ (потому что фиксирована лишь суммарная энергия). Соответствующая неопределенность импульса есть $\delta p \approx \Delta/v_F$ и, следовательно, положение каждого из электронов определено с точностью до

$$\xi = \hbar/\delta p \approx \hbar v_F/\Delta\,. \tag{10.9}$$

Это и есть размер пары. Поскольку при слабом взаимодействии $\lambda\nu_0 \ll 1$ энергия связи Δ экспоненциально мала, расстояние между электронами в паре оказывается гораздо больше, чем среднее расстояние между электронами. Это означает, что пренебрежение взаимодействием электронов пары с электронами ферми-моря, вообще говоря, некорректно. Поэтому рассмотренная нами задача об одной куперовской паре представляет собой лишь наводящее соображение. Тем не менее, как будет показано ниже, полученная оценка энергии связи (10.8) не очень далека от значения, предсказываемого точной теорией. Кроме того, представление о куперовских парах оказывается весьма полезным при качественных рассуждениях.

10.1.2. Квазичастицы в сверхпроводнике.

Перейдем к более формальному анализу задачи о сверхпроводящем спаривании. Запишем гамильтониан системы с притяжением:

$$\widehat{\mathcal{H}}_{\text{БКШ}} = \sum_p \xi_p\, a_p^+ a_p - \frac{1}{2} \sum_{p+p'=q+q'} V_{p\,p'\,q\,q'}\; a_{p\alpha}^+ a_{p'\beta}^+ a_{q\beta} a_{q'\alpha} \tag{10.10}$$

Как и раньше, будем считать, что взаимодействие отлично от нуля только вблизи ферми-поверхности:

$$V_{p\,p'\,q\,q'} = \begin{cases} \lambda & \text{при } \xi_{\max} < \omega_D, \\ 0 & \text{при } \xi_{\max} > \omega_D, \end{cases} \tag{10.11}$$

где $\xi_{\max} = \max\{|\xi_p|, |\xi_{p'}|, |\xi_q|, |\xi_{q'}|\}$. Выражение (10.10) называется гамильтонианом теории Бардина–Купера–Шриффера (БКШ).

При слабом взаимодействии между электронами, константу λ можно выразить через безразмерную константу ζ электрон-фононного взаимодействия: $\lambda = g_{\text{e-ph}}^2 =$

ζ/ν_0 (см. с. 112). Следует отметить, что в реальных системах (т. е. при $\zeta \approx 1$) связь между λ и ζ не такая простая. В этом случае из-за сильной перенормировки электронного спектра теория сверхпроводимости должна самосогласованно учитывать все эффекты электрон-фононного взаимодействия, обсуждавшиеся в гл. 6. Тем не менее, гамильтониан БКШ с $\lambda \approx g^2_{\mathrm{e-ph}}$ оказывается вполне разумным приближением даже при $\zeta \approx 1$.

Упростим гамильтониан БКШ, оставив в нем лишь члены, отвечающие за взаимодействие с противоположными импульсами:

$$\widehat{\mathcal{H}} = \sum_p \xi_p a^+_p a_p - \frac{\lambda}{2} \sum_{pq} a^+_{p\,\alpha} a^+_{-p\,\beta} a_{q\,\beta} a_{-q\,\alpha} \,. \tag{10.12}$$

Получившийся гамильтониан все еще довольно сложен. Поэтому для его анализа мы воспользуемся теорией среднего поля.

В задаче о сверхпроводящем спаривании теория среднего поля оказывается весьма нетривиальной. Введем операторы $\widehat{B}_{\alpha\beta} = \sum\limits_p a^+_{p\,\alpha} a^+_{-p\,\beta}$, описывающие рождение куперовской пары с конфигурацией спинов $|\alpha\,\beta\rangle$. Взаимодействие в гамильтониане (10.12) можно представить в виде $-(\lambda/2)\sum_{\alpha\beta} \widehat{B}^+_{\alpha\beta}\widehat{B}_{\alpha\beta}$. Далее, нетрудно показать, что $\widehat{B}_{\uparrow\uparrow} = \widehat{B}_{\downarrow\downarrow} = 0$, а $\widehat{B}_{\uparrow\downarrow} = -\widehat{B}_{\downarrow\uparrow}$. (Для этого надо рассмотреть тождества $\psi^+_\alpha(r)\psi^+_\alpha(r) = 0$ и $\{\psi^+_\uparrow(r),\ \psi^+_\downarrow(r)\}_+ = 0$, и перейти в фурье-представление.) Поэтому взаимодействие в (10.12) можно представить в виде $-\lambda B^+_{\uparrow\downarrow}\widehat{B}_{\uparrow\downarrow}$.

При бозе-конденсации пар все они оказываются в одном и том же квантовом состоянии, поэтому мы предполагаем, что в сверхпроводящем состоянии среднее от оператора рождения пары отлично от нуля: $\langle\widehat{B}\rangle \neq 0$. Такое предположение может показаться противоречивым, ведь оператор $\widehat{B}$ не сохраняет число частиц, а состояния с различным числом частиц должны быть ортогональны. Дело, однако, заключается в том, что мы рассматриваем систему с очень большим числом частиц N, и изменение N на величину порядка единицы есть в некотором смысле «малая поправка». Поэтому можно считать, что основные состояния с N и с $N+2$ частицами практически тождественны. Более подробно смысл так называемых «аномальных средних» мы обсудим ниже (см. пункты 10.2.1 и 10.2.2), а пока просто заменим в гамильтониане (10.12) операторы $B^+_{\uparrow\downarrow} = \sum\limits_p a^+_{p\uparrow} a^+_{-p\downarrow}$ и $\widehat{B}_{\uparrow\downarrow} = \sum\limits_p a_{p\downarrow} a_{-p\uparrow}$ на их средние. При этом получается так называемый гамильтониан Боголюбова:

$$\widehat{\mathcal{H}} = \sum_p \Big(\xi_p (a^+_{p\uparrow} a_{p\uparrow} + a^+_{p\downarrow} a_{p\downarrow}) + \Delta a^+_{p\downarrow} a^+_{-p\uparrow} + \Delta^* a_{p\uparrow} a_{-p\downarrow} \Big) \,, \tag{10.13}$$

где

$$\Delta = \lambda \sum_q \langle a_{q\downarrow} a_{-q\uparrow}\rangle \,, \quad \Delta^* = \lambda \sum_q \langle a^+_{q\uparrow} a^+_{-q\downarrow}\rangle \,. \tag{10.14}$$

(В выражении (10.13) мы пренебрегли несущественной константой $-\lambda|\Delta|^2$.) Гамильтониан (10.13) квадратичен по операторам $a_{p\,\alpha}$, $a^+_{p\,\beta}$, и поэтому его можно легко диагонализовать с помощью канонического преобразования. Введем для этого новые фермионные операторы:

$$c_{p\uparrow} = u_p a_{p\uparrow} + v_p a^{+}_{-p\downarrow}\,, \quad c_{p\downarrow} = -v_p a^{+}_{p\downarrow} + u_p a_{-p\uparrow}\,. \tag{10.15}$$

Постараемся подобрать u_p и v_p так, чтобы гамильтониан (10.10) перешел в гамильтониан свободных частиц

$$\widehat{\mathcal{H}} \;=\; E_0 \;+ \sum_p \varepsilon_p c^{+}_p c_p\,. \tag{10.16}$$

Это можно сделать любым из методов, рассмотренных в задачах гл. 1. Получаем

$$u_p^2 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\xi_p}{\varepsilon_p}\right)\,, \quad v_p^2 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{\xi_p}{\varepsilon_p}\right)\,, \tag{10.17}$$

где $\varepsilon_p = \sqrt{\xi_p^2 + |\Delta|^2}$ (см., например, задачу 2).

Таким образом, мы нашли *квазичастицы* гамильтониана БКШ, упрощенного методом Боголюбова. Как видно из соотношений (10.15) и (10.17), квазичастицы очень сильно отличаются от исходных электронов в интервале энергий $\xi_p \sim \Delta$ вблизи ферми-поверхности, а за пределами этого интервала отличие невелико. На поверхности Ферми $\xi_p = 0$, и поэтому энергия квазичастицы есть Δ, а энергия квазидырки равна $-\Delta$. Таким образом, в спектре квазичастиц открывается щель ширины 2Δ.

Чтобы определить величину Δ, нужно учесть условие самосогласования (10.14). Вычисляя среднее $\langle a_{q\downarrow} a_{-q\uparrow}\rangle$ с помощью преобразования (10.15), получаем

$$\Delta = \lambda \sum_q \frac{\Delta}{2\sqrt{\xi_q^2+\Delta^2}}\,. \tag{10.18}$$

В этом выражении можно перейти к интегрированию по ξ:

$$\Delta = \frac{\lambda}{2}\,\Delta\,\nu_0 \int\limits_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2+\Delta^2}}\,. \tag{10.19}$$

При $\Delta \ll \omega_D$ интеграл в правой части (10.19), с логарифмической точностью, есть $\ln(2\omega_D/\Delta)$. Поэтому уравнение (10.19) принимает вид $\Delta = \lambda\Delta\ln(2\omega_D/\Delta)$ и соответственно имеет нетривиальное решение

$$\Delta = 2\omega_D e^{-1/\lambda\nu_0}\,. \tag{10.20}$$

Итак, с помощью канонического преобразования мы диагонализовали гамильтониан БКШ и показали, что в спектре квазичастиц открывается щель. При этом были учтены все эффекты взаимодействия, как над, так и под ферми-поверхностью. Интересно, что при таком более строгом рассмотрении ответ для ширины щели в спектре системы не слишком сильно отличается от результата (10.8) задачи об одной паре.

Отметим интересную аналогию между теорией БКШ и теорией пайерлсовского диэлектрика в одномерной системе электронов, взаимодействующих с фононами (см. разд. 6.4). Можно проследить сходство между гамильтонианами, процедурой их диагонализации, спектрами получающихся квазичастиц, и уравнениями самосогласование для щели в спектре. Несмотря на формальное сходство, физика возникающего из-за взаимодействия основного состояния в этих системах совершенно разная. В теории БКШ спариваются электроны на противоположных участках ферми поверхности, а в теории Пайерлса спариваются электроны и дырки. В первом случае получается сверхпроводник, а во втором — диэлектрик. Сверхпроводящее состояние пространственно однородно, а в пайерлсовском состоянии имеется волна плотности.

10.2. Диаграммная техника для теории Бардина–Купера–Шриффера

10.2.1. Рассеяние в куперовском канале.

Образование пар — явление существенно квантовое, поэтому в задаче о сверхпроводимости формализм функций Грина оказывается весьма полезным. С помощью соответствующим образом введенных гриновских функций теорию сверхпроводимости можно распространить довольно далеко и рассмотреть такие вопросы, как термодинамика сверхпроводников, роль кулоновского взаимодействия в спаривании, отклик сверхпроводников на внешнее электромагнитное поле, и т. д. Кроме того, большое значение имеет обобщение теории БКШ на случай так называемых «грязных» сверхпроводников, т. е. металлов с примесями. В последнем случае, как мы увидим, преимущества функций Грина особенно значительны.

В предыдущих главах мы рассматривали либо невзаимодействующие, либо слабо взаимодействующие системы, в которых квантовые эффекты, в основном, возникали из-за квантовой статистики (как, например, в ферми-газе). По этой причине многие из результатов предыдущих глав можно получить, используя вместо функций Грина какой-нибудь обходной прием. (Например, отклик ферми-газа на внешнее поле можно найти либо с помощью кинетического уравнения, либо выписывая явно второй порядок теории возмущений.) Теория же сверхпроводимости имеет дело с сильно взаимодействующей системой, в которой взаимодействие приводит к качественной перестройке основного состояния. Поэтому функции Грина оказываются не только наиболее естественным, но и во многих случаях единственно возможным инструментом.

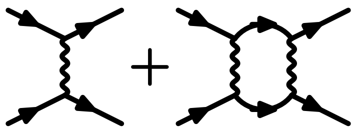


Рис. 10.2

Рассмотрим теперь, как задача о сверхпроводящем спаривании переводится на язык диаграммной техники. Сначала разберемся, что на языке диаграмм означает утверждение об образовании связанного состояния для пары электронов с противоположными импульсами. Как известно, связанному состоянию соответствует полюс в амплитуде рассеяния (см. задачи 12, 13 в гл. 3), поэтому естественно рассмотреть вершинную часть рассеяния электронов с противоположными импульсами друг на друге. Вклады первого и второго порядка по взаимодействию изображены на рис. 10.2. Первой диаграмме соответствует

$$\Gamma^0_{\alpha\,\alpha'\,\beta\,\beta'} \;=\; \frac{\lambda}{2}\left(\delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\beta\beta'} - \delta_{\alpha\beta'}\delta_{\beta\alpha'}\right). \tag{10.21}$$

Вторая диаграмма на рис. 10.2, представляющая собой поправку второго порядка теории возмущений, логарифмически расходится:

$$\lambda\,\nu_0\,\ln\left(2\omega_D/\omega\right)\,\Gamma^0_{\alpha\,\alpha'\,\beta\,\beta'}\,. \tag{10.22}$$

Здесь ω — суммарная энергия взаимодействующих электронов. Соответствующая диаграмма будет вычислена в задаче 58 (см. также [1], § 33).

Рассмотрим диаграммы более высоких порядков, дающие вклад в *амплитуду рассеяния в куперовском канале*, которая описывает рассеяния электронов с противоположными импульсами. Вклады в вершинную часть $\Gamma(\omega)$, наиболее сингулярные при $\omega \to 0$, образуют ряд, показанный на рис. (10.3).

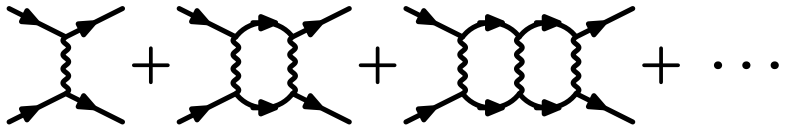


Рис. 10.3

В этом ряде диаграмма n-го порядка по λ имеет $n-1$ «опасных» сечений, импульсы частиц в которых попарно противоположны. Каждое такое сечение приводит к логарифмической расходимости, поэтому n-й член ряда (10.3) ведет себя как $(\,-\lambda\nu_0\,\ln(2\omega_D/\omega))^{n-1}\Gamma^0_{\alpha\,\alpha'\,\beta\,\beta'}$. Суммируя геометрическую прогрессию, получаем

$$\Gamma^C_{\alpha\,\alpha'\,\beta\,\beta'}(\omega) \;=\; \frac{1}{1-\lambda\nu_0\,\ln 2\omega_D/\omega}\;\Gamma^0_{\alpha\,\alpha'\,\beta\,\beta'}\,. \tag{10.23}$$

Последовательность диаграмм для рассеяния электронов в куперовском канале (рис. (10.3)), даваемую геометрической прогрессией, часто называют *куперовской лестницей*. Полюс в выражении (10.23) следует интерпретировать, как неустойчивость ферми-газа, связанную с образованием куперовских пар.

Оказывается, неустойчивость возникает только при достаточно низкой температуре. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим ферми-газ с притяжением (10.10) и найдем «куперовскую восприимчивость». Введем в гамильтониан (10.10) возмущение

$$H_{pert} = \int \left\{\psi^+_\uparrow(\mathbf{r})\psi^+_\downarrow(\mathbf{r})\Delta(\mathbf{r}) + \psi_\downarrow(\mathbf{r})\psi_\uparrow(\mathbf{r})\Delta^*(\mathbf{r})\right\}\,d^3r\;, \tag{10.24}$$

и определим линейный отклик

$$\chi_C = -\frac{\partial\langle\psi_\uparrow(\mathbf{r})\psi_\downarrow(\mathbf{r})\rangle}{\partial\Delta} \tag{10.25}$$

по отношению к возмущению (10.24). Среднее $\langle\psi_\uparrow(\mathbf{r})\psi_\downarrow(\mathbf{r})\rangle$ представляет собой, как обсуждалось выше, амплитуду куперовских пар, а Δ играет роль вспомогательного внешнего поля.

Операторы $\psi_\uparrow(\mathbf{r})\psi_\downarrow(\mathbf{r})$ и $\psi_\uparrow^+(\mathbf{r})\psi_\downarrow^+(\mathbf{r})$ выглядят несколько непривычно, поскольку они не сохраняют число частиц. Среднее от такого оператора, взятое по состоянию с фиксированным числом частиц, обращается в нуль. Тем не менее, подчеркнем, что куперовская восприимчивость есть корректно определенная величина: в присутствии возмущения (10.24), не сохраняющего число частиц, среднее $\langle\psi_\uparrow(\mathbf{r})\psi_\downarrow(\mathbf{r})\rangle$ отлично от нуля.

Перед тем, как вычислять восприимчивость χ_C, отметим, что она отличается от отклика на воздействие какого-либо реального поля тем, что поле Δ нельзя приложить. Однако нас интересует на самом деле лишь, устойчива ли система по отношению к такому возмущению. Неустойчивость, если она имеется, означает, что система сама перестраивается так, чтобы появился конденсат куперовских пар $\langle\psi_\uparrow(\mathbf{r})\psi_\downarrow(\mathbf{r})\rangle \neq 0$ (а вместе с ним и отличная от нуля Δ).

Покажем, что куперовская восприимчивость χ_C конечна при $T > T_c$ и обращается в бесконечность при $T = T_c$, где $T_c \approx \Delta$ — температура перехода в сверхпроводящее состояние. Интересующая нас восприимчивость есть термодинамическая величина, поэтому ее следует вычислять с помощью мацубаровских функций Грина. Соответствующая последовательность диаграмм, подобно амплитуде рассеяния в куперовском канале, дается куперовской лестницей (рис. 10.4).

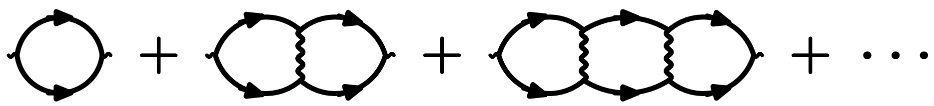


Рис. 10.4

Нетрудно видеть, что эти диаграммы получаются из диаграмм для амплитуды рассеяния замыканием внешних концов. Поэтому восприимчивость χ_C равна

$$\chi_C(i\omega_n) = \Pi_C(i\omega_n) + \lambda\Pi_C^2(i\omega_n) + \ldots = \frac{\Pi_C(i\omega_n)}{1-\lambda\Pi_C(i\omega_n)}\,, \tag{10.26}$$

где одна ступень куперовской лестницы есть

$$\Pi_C(i\omega_n) = T\sum_m \int \frac{d^3p}{(i\varepsilon_m + i\omega_n - \xi_p)(-i\varepsilon_m - \xi_p)}\,. \tag{10.27}$$

Нас интересует термодинамическая восприимчивость, поэтому положим $\omega_n = 0$. Суммируя по m с помощью формулы (7.85) (см. также (7.83)) и переходя к интегрированию по ξ, получаем

$$\Pi_C(0) = \frac{\nu_0}{2}\int\limits_{-\omega_D}^{\omega_D} \mathrm{th}(\xi/2T)\,\frac{d\xi}{\xi}\,, \tag{10.28}$$

что с логарифмической точностью есть $\nu_0 \ln \omega_D/T$ (см. задачу 58, а также [1], § 33).

Итак, условие $\lambda\Pi_C(0) = 1$, определяющее температуру, при которой куперовская восприимчивость (10.26) расходится, принимает вид

$$\lambda\nu_0 \ln\left(\frac{\omega_D}{T}\right) = 1 . \tag{10.29}$$

Решение этого уравнения дает температуру перехода в сверхпроводящее состояние:

$$T_c = \frac{2\gamma}{\pi}\omega_D \, e^{-1/\lambda\nu_0} . \tag{10.30}$$

Здесь $\gamma = e^C$, где $C = 0,577\ldots$ — постоянная Эйлера. Коэффициент $2\gamma/\pi$ в этой формуле получается в результате более аккуратного вычисления (см. задачу 58). Как и следовало ожидать, температура T_c оказывается порядка величины энергетической щели (10.20), отделяющей основное состояние конденсата куперовских пар от возбужденных состояний, а также порядка частоты, при которой куперовская амплитуда рассеяния (10.23) имеет полюс.

10.2.2. Функции Грина в сверхпроводнике.

С формальной точки зрения, последовательность диаграмм на рис. 10.3 сильно напоминает ряд, соответствующий уравнению Бете–Солпитера (4.20) для двухчастичной амплитуды рассеяния (см. гл. 4). Важное отличие, однако, состоит в том, что теперь задача многочастичная, а не двухчастичная. (Функции Грина на рисунках 10.2,10.3 учитывают эффекты ферми-статистики.) Многочастичность задачи означает, что в действительности спаривание есть не двухчастичное, а *коллективное* явление. Поэтому для его описания было бы недостаточно просто заменить затравочную амплитуду рассеяния на полную, как мы поступали в одно- и двухчастичных задачах в главах 3 и 4.

Куперовская неустойчивость означает, что при включении взаимодействия основное состояние ферми-газа перестраивается нетривиальным образом. Эта перестройка и есть образование бозе-конденсата куперовских пар. Оказывается, что функции Грина, необходимые для описания этого явления, совершенно отличаются от обычных функций Грина ферми-системы.

Чтобы правильно ввести гриновские функции, приведем такое наводящее соображение. При ω вблизи полюса выражения (10.23) куперовская лестница, показанная на рис. 10.3, становится «бесконечно длинной». (Имеется в виду, что знаменатель геометрической прогрессии (10.23) близок к единице, поэтому все члены ряда одинаково важны.) Поэтому для вычисления функций Грина нужно суметь просуммировать диаграммы, изображенные на рис. 10.5. Мы намеренно не изобразили на этом рисунке концы лестниц, поскольку их длина оказывается ничем не ограниченной.

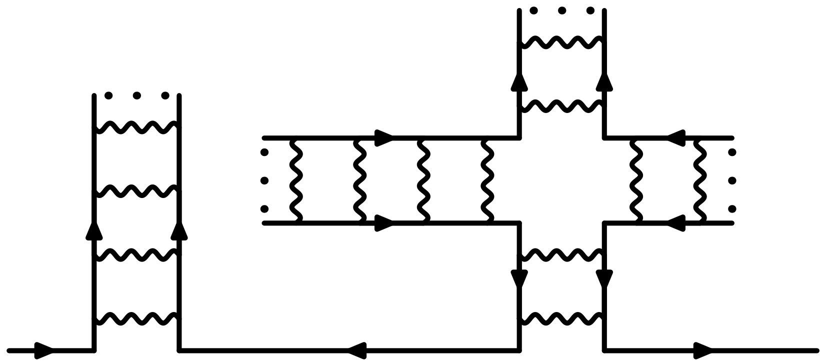


Рис. 10.5

Для суммирования таких диаграмм оказывается удобным ввести две функции Грина:

$$G_{\alpha\beta}(x,x') = -i \left\langle \mathrm{T}\psi_\alpha(x)\, \psi^+_\beta(x') \right\rangle, \quad F_{\alpha\beta}(x,x') = -i \left\langle \mathrm{T}\psi_\alpha(x)\, \psi_\beta(x') \right\rangle. \qquad (10.31)$$

Функцию F часто называют *аномальной функцией Грина*, потому что в нормальном металле она равна нулю. Выражение $\langle \mathrm{T}\psi_\alpha(x)\, \psi_\beta(x') \rangle$ выглядит несколько загадочно, поскольку обычно средние от операторов, не сохраняющих число частиц, обращаются в нуль. Однако в сверхпроводнике это не так. Впрочем, при желании можно считать, что F — это просто удобное обозначение, введенное для облегчения суммирования диаграмм, подобных изображенной на рис. 10.5.

Роль функции F можно понять, сравнив переход в сверхпроводящее состояние с переходом в магнетике из парамагнитной фазы в ферромагнитную. При таком переходе возникает спонтанная намагниченность $\mathbf{M}$, причем ориентацию вектора $\mathbf{M}$ нельзя определить из гамильтониана ферромагнетика, обладающего вращательной симметрией. Ниже температуры магнитного перехода симметричное парамагнитное состояние неустойчиво, и произвольно малое внешнее поле $\mathbf{h}$ ориентирует спины $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ по полю, т. е. приводит к $\mathbf{M} = \langle \mathbf{s}(\mathbf{r}) \rangle \neq 0$. Формально это выражается в том, что магнитная восприимчивость $\chi = \partial\mathbf{M}/\partial\mathbf{h}$ обращается в бесконечность в точке перехода. Ситуация в сверхпроводнике в значительной мере сходная: роль магнитной восприимчивости играет куперовская восприимчивость χ_C, обсуждавшаяся в п. 10.2.1. Мы видели, что $\chi_C(T)$ расходится при $T = T_c$ (см. (10.30)). Поэтому при $T < T_c$ как угодно малое возмущение может создать конечное аномальное среднее $F(x,x')$.

Какая же симметрия нарушается при этом переходе? В ферромагнетике нарушенная симметрия — это T-инвариантность, а также симметрия по отношению к повороту спинов, а в сверхпроводнике — калибровочная инвариантность. При калибровочном преобразовании $\psi \to \psi e^{i\varphi}$ функция F преобразуется так: $F \to F e^{2i\varphi}$. Поэтому она калибровочно неинвариантна и появление $F \neq 0$ означает нарушение калибровочной инвариантности. Как и в случае магнетика, гамильтониан которого обладает полным набором симметрий, исчезновение калибровочной инвариантности в сверхпроводнике не означает неинвариантность гамильтониана относительно калибровочных преобразований. Калибровочно неинвариантным оказывается лишь основное состояние сверхпроводника. Вместо калибровочной инвариантности мы имеем теперь калибровочную *ковариантность*. Если при калибровочном преобразовании изменять основное состояние так, что F и Δ будут тоже преобразовываться, то все физические величины останутся неизменными.

Вернемся к гриновским функциям G и F. На рис. 10.5 показаны не все диаграммы, дающие вклад в G и F, а только простейшие. Более сложные диаграммы, которые также надо учесть, получаются вставкой полубесконечных куперовских лестниц в гриновские функции, входящие в куперовские лестницы, показанные на рис. 10.5. Говоря иначе, все гриновские функции в лестницах на рис. 10.5, следует *ужирнить*.

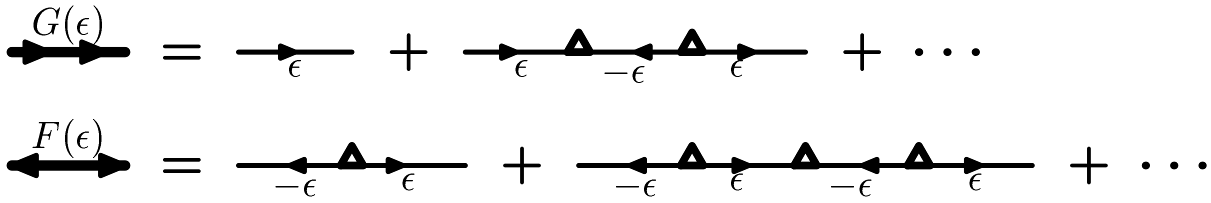


Рис. 10.6

Формально это выполняется введением в графики нового элемента, внешнего поля $\Delta_{\alpha\beta}$, являющегося источником пар электронов (рис. 10.6). При этом величина $\Delta_{\alpha\beta}$ сама зависит от состояния электронной системы. Уравнение самосогласования, которому подчиняется $\Delta_{\alpha\beta}$, может быть представлено графически как показано на рис. 10.7. Комплекснозначная величина $\Delta_{\alpha\beta}$ имеет смысл амплитуды куперовских пар.

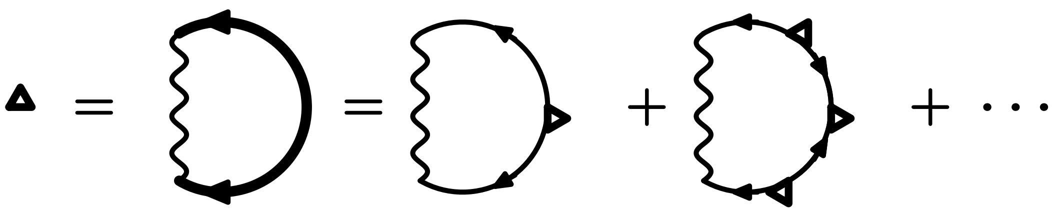


Рис. 10.7

Графики на рисунках 10.6 и 10.7 означают, что функции Грина сверхпроводника $G_{\alpha\beta}$ и $F_{\alpha\beta}$ связаны с гриновской функцией $G^0_{\alpha\beta}(\varepsilon,\, \mathbf{p})$ идеального ферми-газа и полем $\Delta_{\alpha\beta}$ такими уравнениями:

$$G_{\alpha\beta}(\varepsilon,\, \mathbf{p}) = G^0_{\alpha\beta}(\varepsilon,\, \mathbf{p}) + G^0_{\alpha\lambda}(\varepsilon,\, \mathbf{p})\, \Delta^*_{\lambda\mu}\, F_{\mu\beta}(\varepsilon,\, \mathbf{p})\,, \tag{10.32}$$

$$F_{\alpha\beta}(\varepsilon,\, \mathbf{p}) = G^0_{\alpha\lambda}(-\varepsilon,\, \mathbf{p})\, \Delta_{\lambda\mu}\, G_{\mu\beta}(\varepsilon,\, \mathbf{p}) \tag{10.33}$$

(подразумевается суммирование по спиновым индексам λ и μ).

Прежде чем решать уравнения (10.32), сделаем замечание о спиновой структуре функций G и F. Зависимость G от спина такая же, как в нормальном металле:

$G_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}G$. А вот функция F устроена иначе. Поскольку куперовская пара есть спиновый синглет, амплитуда $\Delta_{\alpha\beta} = \Delta(-i)\sigma^y_{\alpha\beta}$. Нетрудно видеть, что уравнения (10.32) совместны только если спиновые структуры $\Delta_{\alpha\beta}$ и $F_{\alpha\beta}$ одинаковы. Поэтому

$$\Delta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Delta\,, \quad F_{\alpha\beta}(\varepsilon,\,\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} F(\varepsilon,\,\mathbf{p})\,. \tag{10.34}$$

С учетом спиновой структуры (10.34) уравнения (10.32) нетрудно решить:

$$G_{\alpha\beta}(\varepsilon,\,\mathbf{p}) \;=\; \frac{\varepsilon+\xi_{\mathbf{p}}}{\varepsilon^2-\xi^2_{\mathbf{p}}-|\Delta|^2}\,\delta_{\alpha\beta} \tag{10.35}$$

$$F_{\alpha\beta}(\varepsilon,\,\mathbf{p}) \;=\; \frac{\Delta}{\varepsilon^2-\xi^2_{\mathbf{p}}-|\Delta|^2}\,i\sigma^y_{\alpha\beta}\,. \tag{10.36}$$

Из выражений (10.35), (10.36) следует закон дисперсии квазичастиц

$$\varepsilon_{\mathbf{p}} = \sqrt{\xi^2_{\mathbf{p}}+\Delta^2}\,. \tag{10.37}$$

Наконец, с помощью (10.36) можно определить щель из уравнения самосогласования,

$$\Delta_{\alpha\beta} = \lambda\int F_{\alpha\beta}(\varepsilon,\mathbf{p})\,\frac{d\varepsilon\,d^3p}{(2\pi)^4}\,, \tag{10.38}$$

часто также называемого уравнением Горькова, и таким образом замкнуть теорию (см. рис. 10.7).

Для изучения термодинамики сверхпроводников нам потребуются мацубаровские функции $G_{\alpha\beta}(i\omega_n,\,\mathbf{p})$ и $F_{\alpha\beta}(i\omega_n,\,\mathbf{p})$. Они получаются из нуль–температурных функций (10.35), (10.36) аналитическим продолжением на дискретные частоты, т. е. просто заменой $\varepsilon \to i\omega_n$. При этом уравнение (10.38) принимает вид

$$\Delta = \lambda T\sum_{\omega_n}\int F(i\omega_n,\mathbf{p})\,\frac{d^3p}{(2\pi)^3} = \lambda T\sum_{\omega_n}\int\frac{\Delta}{\omega_n^2+\xi^2_{\mathbf{p}}+\Delta^2}\,\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,. \tag{10.39}$$

Описанный формализм оказывается весьма эффективным в широком круге задач теории сверхпроводимости.

В заключение отметим, что вычисления гриновских функций сверхпроводника можно «автоматизировать», если работать не с функциями G и F по отдельности, а с так называемыми матрицами Горькова–Намбу, составленными из них (см. [1], (34.32)). Приведем канонический способ записи этих матриц в температурной технике. Определим функции Грина,

$$G_{\uparrow\uparrow}(r_1,r_2,\tau_1,\tau_2) \;=\; -\langle\,\mathrm{T}_\tau\,\psi_\uparrow(r_1,\tau_1)\psi^+_\uparrow(r_2,\tau_2)\rangle\,, \tag{10.40}$$

$$G_{\downarrow\downarrow}(r_1,r_2,\tau_1,\tau_2) \;=\; -\langle\,\mathrm{T}_\tau\,\psi_\downarrow(r_1,\tau_1)\psi^+_\downarrow(r_2,\tau_2)\rangle\,, \tag{10.41}$$

и, аналогично, $F_{\uparrow\downarrow}$, $F_{\downarrow\uparrow}$. Составим из них матричную функцию Грина:

$$\widehat{G}_\omega(r_1,r_2) \;=\; \begin{bmatrix} G_{\uparrow\uparrow} & F_{\uparrow\downarrow} \\ F_{\downarrow\uparrow} & G_{\downarrow\downarrow} \end{bmatrix}. \tag{10.42}$$

Матрица $\widehat{G}$ удовлетворяет уравнению

$$\Big(i\omega - \tau_z\xi(\widehat{\mathbf{p}}) - \frac{1}{2}(\Delta(r_1)\tau_+ + \Delta^*(r_1)\tau_-)\Big)\ \widehat{G}_\omega(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\ =\ \widehat{\delta}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\ , \qquad (10.43)$$

где τ_z и $\tau_\pm = \tau_x \pm i\tau_y$ — матрицы Паули (мы обозначили их так для того, чтобы отличать от спиновых операторов). Матричное уравнение (10.43) есть сокращенная форма записи уравнений (10.32).

Основное удобство представления Горькова–Намбу заключается в том, что при работе с матричными величинами относительные знаки различных диаграмм, содержащих функции F и G автоматически получаются правильными. Кроме того, матричная запись весьма компактна (см. задачи 59, 63, 64).

В частности, матричный формализм весьма удобен при расчете отклика сверхпроводника на внешнее электромагнитное поле (см. задачи 63, 65). Магнитное поле включается в матричную запись заменой $\widehat{\mathbf{p}} \to \widehat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\tau_z\mathbf{A}$ и соответственно оператор тока есть

$$\widehat{\mathbf{j}}(\mathbf{r}) = c\frac{\delta}{\delta\mathbf{A}(\mathbf{r})}\ \widehat{G}^{-1}\left[\mathbf{A}(\mathbf{r})\right] \qquad (10.44)$$

(ср. с формулой $\widehat{\mathbf{j}} = -c\delta\widehat{H}/\delta\mathbf{A}$).

В теории сверхпроводимости имеется много интересных и красивых явлений. Однако подробное их изложение увело бы нас слишком далеко. В задачах этого раздела мы постарались отразить наиболее важные с нашей точки зрения факты микроскопической теории сверхпроводимости. Физика сверхпроводимости подробно освещается в учебной литературе, к которой мы и отсылаем заинтересованного читателя [1].

Литература: Относительно компактное изложение основных фактов физики сверхпроводимости содержится в [3], гл. X, а также в [6], гл. V. Метод функций Грина в теории сверхпроводимости подробно рассмотрен в [1], гл. VII.

10.3. Задачи 58 – 63

Задача 58. (*Куперовская неустойчивость.*) В п. 10.2.1 при вычислении температуры перехода мы использовали приближение (10.11), для того чтобы ограничить сверху область интегрирования по энергии $\xi(\mathbf{p})$ (см. также (10.3)). На самом деле, поскольку сверхпроводимость возникает из-за обмена фононами с относительно большим временем запаздывания, более корректно рассматривать нелокальное во времени взаимодействие, которое обрезало бы не интегралы по импульсам, а интегралы по *частотам*.

[1] В. В. Шмидт, «Введение в физику сверхпроводимости» (М., Наука, 1982); А. А. Абрикосов, «Основы теории металлов» (М., Наука, 1987); П. де Жен «Сверхпроводимость металлов и сплавов» (М., 1968); М. Тинкхам, «Введение в сверхпроводимость», перевод под ред. К. Лихарева (М., Атомиздат, 1980);

Рассмотрим мацубаровскую амплитуду рассеяния в куперовском канале $\Gamma^C(i\varepsilon, i\varepsilon'))$ (энергии сталкивающихся частиц равны $\pm\varepsilon$, а разлетающихся — $\pm\varepsilon'$). Она дается суммой лестничных графиков, изображенных на рис. 10.8.

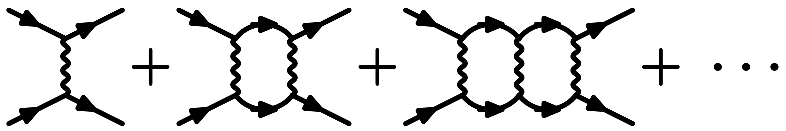


Рис. 10.8

Пусть каждой волнистой линии соответствует множитель $\Gamma^0(i\varepsilon, i\varepsilon')$. Будем считать взаимодействие точечным и соответственно пренебрежем зависимостью Γ^C и Γ^0 от импульсов.

а) Суммируя куперовскую лестницу, выведите интегральное уравнение, определяющее $\Gamma^C(i\varepsilon, i\varepsilon')$.

б) Рассмотрите модель, в которой $\Gamma^0(i\varepsilon, i\varepsilon')$ факторизуется:

$$\Gamma^0(i\varepsilon, i\varepsilon') = \lambda v(i\varepsilon) v(i\varepsilon'), \tag{10.45}$$

где λ — константа взаимодействия, а функция $v(i\varepsilon)$ — формфактор, определяющий масштаб энергий (спиновая структура опущена). Найдите температуру, при которой Γ^C обращается в бесконечность.

в) В случае, когда

$$v(i\varepsilon) = \frac{\omega_D}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega_D^2}}, \tag{10.46}$$

найдите связь между T_c и ω_D.

Модель (10.45) нефизична, поскольку настоящее электрон-фононное взаимодействие приводит к затравочной вершине Γ^0, зависящей от переданной энергии $\varepsilon - \varepsilon'$. Тем не менее, поскольку эта модель учитывает запаздывание притяжения между электронами на временах $\approx \omega_D^{-1}$, она дает качественно правильные предсказания.

Задача 59. (*Температурная зависимость щели* $\Delta(T)$.) Определите температурную зависимость $\Delta(T)$ для запаздывающего взаимодействия (10.45), (10.46) из задачи 58. Примите во внимание, что из-за запаздывания щель Δ становится функцией энергии ε спаривающихся частиц.

а) Соответственно рассмотрите величину $\tilde{\Delta}(\varepsilon)$ и, модифицируя уравнения (10.38), (10.39), получите для $\tilde{\Delta}(\varepsilon)$ уравнение самосогласования.

б) В найденном уравнении вычислите интеграл по ξ. Изобразите качественное поведение решения уравнения $\Delta(T)$ на графике. Как $\Delta(T)$ ведет себя при $T \to 0$ и при $T \to T_c$?

в) Найдите сверхпроводящую щель $\Delta(T)$ в пределе низких температур ($T \to 0$) и вблизи точки перехода ($T \to T_c$).

Задача 60. (*Теплоемкость при* $T < T_c$.) Покажите, что вклад электронов в термодинамический потенциал Ω сверхпроводящего металла дается диграммным рядом, показанным на рис. 10.9. Какие выражения сопоставляются различным диаграммам?

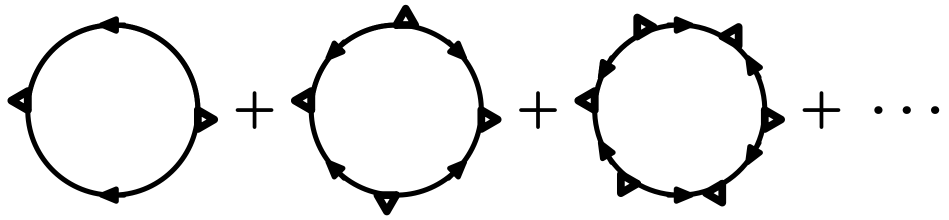


Рис. 10.9

Выразите сумму графиков рис. 10.9 через функцию $\Delta(T)$, считая ее известной. Найдите температурную зависимость теплоемкости сверхпроводника:

а) при $T \ll T_c$;

б) при $T \to T_c$. В этом случае достаточно взять первый график, показанный на рис. 10.9, поскольку вблизи T_c величина Δ мала. Сравните ответ с теплоемкостью нормального металла (см. [1], § 36).

Вычисляя мацубаровскую сумму при низких температурах, удобно пользоваться формулой суммирования Пуассона

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{2\pi ikx}\, dx\,, \tag{10.47}$$

оставляя в сумме по k лишь члены с $k = 0, \pm 1$. Напомним, что применять формулу Пуассона следует с осторожностью, поскольку она справедлива лишь для функций, аналитических на всей вещественной оси.

Задача 61. (*Влияние кулоновского взаимодействия*[2] *на сверхпроводимость.*) Как уже обсуждалось в п. 10.1.1 влияние кулоновского взаимодействия на сверхпроводимость невелико благодаря сильному запаздыванию фононов (см. с. 273). Рассмотрим вопрос об относительной важности электрон-электронного и электрон-фононного взаимодействий более подробно.

Оказывается удобным ввести упрощенную модель взаимодействия, в которой между электронами имеется мгновенное отталкивание и запаздывающее притяжение, причем как отталкивание, так и притяжение считаются точечными. При этом затравочная амплитуда рассеяния в куперовском канале имеет вид

$$\Gamma^0(i\varepsilon, i\varepsilon') = \lambda v(i\varepsilon) v(i\varepsilon') - \mu\,, \tag{10.48}$$

где параметр μ характеризует величину отталкивания между электронами.

Найдите температуру, при которой амплитуда рассеяния в куперовском канале обращается в бесконечность. Покажите, что эффект отталкивания сводится к замене константы λ в выражении (10.30) для T_c на

$$\lambda_* = \lambda - \frac{\mu}{1 + \nu_0 \mu \ln(\varepsilon_F/\omega_D)}\,. \tag{10.49}$$

---

[2]Н. Н. Боголюбов, В. В. Толмачев, Д. В. Ширков, «Новый метод в теории сверхпроводимости», Изд-во АН СССР, М. 1958, § 6.3, с. 84–88; P. Morel, P. W. Anderson, Phys. Rev., v. 125, p. 1263 (1962)

Безразмерная величина кулоновского взаимодействия в металле есть $\nu_0\mu \approx e^2/\hbar v_F$ в пределе высокой электронной плотности и $\nu_0\mu \approx 1$ при обычных значениях плотности. Соответственно максимально возможная поправка к эффективной константе взаимодействия λ_*, согласно (10.49), имеет относительную малость $1/\ln(\varepsilon_F/\omega_D)$. Поэтому кулоновское взаимодействие в нормальном металле не может превратить притяжение в отталкивание и, следовательно, не подавляет сверхпроводимость.

Чтобы установить соответствие между моделью (10.48) и реальным кулоновским взаимодействием $V(\mathbf{q})$ в первом приближении достаточно подставить вместо μ среднее значение $V(\mathbf{q})$ в s-канале. Для случая экранированного кулоновского взаимодействия

$$V(\mathbf{q}) = \frac{4\pi e^2}{q^2 + \varkappa^2}\ ; \quad \varkappa^2 = 8\pi\nu_0 e^2 \tag{10.50}$$

(см. задачу 45) получаем следующее выражение:

$$\mu = \langle V_c(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\rangle = \frac{\pi e^2}{p_0^2}\ln\left(1 + \frac{4p_0^2}{\varkappa^2}\right)\ , \tag{10.51}$$

где усреднение производится по положениям импульсов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ на ферми-поверхности.

Задача 62. (*Тождество Уорда в нормальном металле.*) При вычислении электромагнитного отклика сверхпроводника центральное место занимает рассмотренное в гл. 9 тождество Уорда (9.16), следующее из калибровочной инвариантности. Оно приводит к сокращению градиентного и диамагнитного вкладов в электрический ток, с которым мы уже сталкивались в задаче 51 при выводе формулы Друде. Прежде чем заниматься электродинамикой сверхпроводников, изучим тождество (9.16) более подробно в случае нормального металла.

а) Рассмотрим линейный отклик тока $\mathbf{j}$ в идеальном ферми-газе электронов на неоднородный статический векторный потенциал $\mathbf{A}$. В импульсном представлении линейное соотношение $\mathbf{j}$ и $\mathbf{A}$ записывается как $\mathbf{j_k} = Q(\mathbf{k})\,\mathbf{A_k}$. Калибровочная инвариантность требует, чтобы для ядра $Q(\mathbf{k})$ выполнялось свойство $Q(\mathbf{k} = 0) = 0$. Согласно тождеству Уорда, это равенство обеспечивается сокращением градиентной $\langle \mathbf{v}\,G\,\mathbf{v}\,G\rangle$ и диамагнитной частей тока $\mathbf{j} = -\frac{e}{mc}\langle\psi^+(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})\rangle\mathbf{A}(\mathbf{r})$ (см. задачу 51).

Проверьте это сокращение еще раз в более общем виде, не предполагая спектр электронов $\xi(\mathbf{p})$ квадратичным, а считая его произвольной функцией. Используйте соотношение $\mathbf{v}(\mathbf{p}) = \nabla_{\mathbf{p}}\xi(\mathbf{p})$.

б) (*Диамагнетизм Ландау.*) С помощью тождества Уорда можно найти орбитальную магнитную восприимчивость χ_0 газа невзаимодействующих электронов. Согласно результату части а), разложение $Q(\mathbf{k})$ по $\mathbf{k}$ начинается с члена второй степени: $Q(\mathbf{k}) = a\mathbf{k}^2 + \mathrm{O}(\mathbf{k}^4)$.

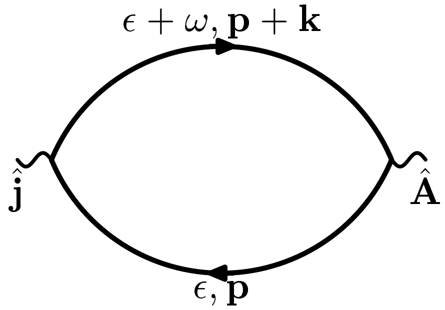


Рис. 10.10

Разложите коррелятор ток-ток, показанный на рис. 10.10, по степеням $\mathbf{k}$ и определите константу a. Какова связь величины a с восприимчивостью χ_0? Проверьте, что $\chi_0 = -\frac{1}{3}\chi_{\text{пара}}$, где $\chi_{\text{пара}}$ — парамагнитная восприимчивость, найденная в задаче 23 (см. [1], § 37).

Если бы нас интересовало не сокращение $Q(0)$, а одно только вычисление χ_0, можно было бы действовать иначе. Рассмотрим оператор орбитального магнитного момента $\mu = \frac{e}{mc}[\mathbf{r}\times\mathbf{p}]$ и найдем его среднее, используя функцию Грина в слабом магнитном поле: $G_H(E, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \exp(i\frac{e}{\hbar c}\int \mathbf{A}(\mathbf{r}')d\mathbf{r}')\, G_0(E, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$. (Интеграл берется по прямому пути, соединяющему $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$.) Восприимчивость χ_0 получится, если выделить из G_H линейный по H член (см. [1], § 38, с. 416).

Задача 63. (*Уравнение Лондонов.*) Найдите отклик тока в сверхпроводнике на статический векторный потенциал. Отличие от задачи 62 состоит в том, что теперь сокращения при $\mathbf{q} = 0$ нет. Положив $\mathbf{q} = 0$ в соотношении $\mathbf{j}_\mathbf{q} = Q(\mathbf{q})\,\mathbf{A}_\mathbf{q}$, получим так называемое уравнение Лондонов:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\frac{e^2}{mc}\, n_s \mathbf{A}(\mathbf{r}). \tag{10.52}$$

Величина n_s называется сверхтекучей плотностью. Как связаны n_s и Δ при $|T - T_c| \ll T_c$?

Физическая причина отсутствия сокращения вкладов в $Q(0)$ заключается в том, что калибровочная инвариантность в сверхпроводнике спонтанно нарушена. В нормальном металле сокращение $Q(0)$ обеспечивается тождеством Уорда (9.16), следующим из калибровочной инвариантности. А в сверхпроводнике калибровочная инвариантность отсутствует.

Определите глубину проникновения магнитного поля в сверхпроводник. Для этого с помощью уравнения Лондонов решите задачу о проникновении магнитного поля в объем сверхпроводника вблизи поверхности. Покажите, что магнитное поле затухает в глубину по экспоненциальному закону: $H(x) = H(0)\exp(-x/\delta_\Lambda)$, $x > 0$, и найдите связь δ_Λ с n_S.

Покажите, что пренебрегать зависимостью ядра $Q(q)$ от q законно, если лондоновская глубина проникновения δ_Λ достаточно велика: $\delta_\Lambda \gg \xi_0 = \hbar v_F/\Delta_0$ (см. [1], § 37, п. 1).

10.4. Трудные задачи 64 – 67 (сверхпроводимость неупорядоченных систем)

Физика сверхпроводимости охватывает большое количество различных интересных явлений. При этом количественный анализ многих эффектов оказывается достаточно трудным. В этот раздел вынесены некоторые интересные задачи о сверхпроводимости в присутствии беспорядка.

Задача 64*. (*Теорема Андерсона.*) Обычно говорят, что куперовские пары образованы электронами с противоположными импульсами и спинами. Оказывается, *беспорядок не разрушает куперовские пары*, хоть импульс и становится плохим квантовым числом. Качественно это можно пояснить так. В присутствии примесей электроны двигаются по ломаным, от одной примеси к другой. За каждым электроном вдоль линии его движения остается деформация решетки, представляющая собой шлейф из виртуальных фононов, рассасывающийся за время порядка ω_D^{-1}. Этот «ароматический след» притягивает другие электроны, причем эффект притяжения максимален для электрона, движущегося в точности по той же траектории, но в обратном направлении. Такие состояния есть при любой степени беспорядка, поскольку увеличение концентрации примесей лишь делает траектории более изломанными, но не выделяет определенного направления движения на каждой из них (в отличие, скажем, от траекторий в магнитном поле). Из этого рассуждения видно, что чисто потенциальное рассеяние на примесях, оставляющее систему инвариантной по отношению к обращению времени, не подавляет сверхпроводимость. А магнитное поле, например, подавляет.

Рассмотрите куперовскую восприимчивость χ_C в присутствие примесей. Чтобы получить χ_C, усредните по беспорядку диаграммы куперовской лестницы, изображенные на рис. 10.8. При этом каждый блок куперовской лестницы на рис. 10.8 превращается в *примесную лестницу*[3], подобную той, что возникает при описании диффузии электронов на диаграммном языке (см. рис. 9.7). Покажите, что наличие примесей не меняет $\chi_C(\mathbf{k} = 0)$ и, следовательно, не приводит к изменению T_c.

Задача 65*. (*Лондоновская длина в сплаве*[4].) Рассеяние на примесях уменьшает сверхтекучую плотность n_s в формуле Лондонов (10.52). Чтобы найти зависимость n_s от концентрации примесей, определим ядро $Q(0)$ с учетом беспорядка. Процедура усреднения по беспорядку аналогична рассмотренной в задачах 50 и 51, с той только разницей, что вместо функций Грина свободных фермионов в сверхпроводнике надо использовать нормальную и аномальную функции (10.35) и (10.36).

а) Усредните по примесям матричную функцию Грина $\widehat{G}$. Используйте введенную

[3]Напомним, что в теории электронного транспорта в неупорядоченных системах имеется два основных вида лестничных диаграмм: диффузоны и купероны. Хотя диаграммы, возникающие в задаче 64 и других задачах этой главы при усреднении блоков куперовской лестницы по беспорядку, являются куперонными лестницами, во избежание путаницы мы будем пользоваться более общим термином: «примесная лестница».

[4]см. работы А. А. Абрикосова и Л. П. Горькова, процитированные на с. 228.

в гл. 9 модель δ-функционных примесей. Получите формулу

$$\langle \widehat{G}(i\omega, p)\rangle \,=\, \left(\widehat{G}_0(i\omega, \mathbf{p})^{-1} + \frac{i\omega - \Delta\tau_x}{2\tau(\omega^2+\Delta^2)^{1/2}}\right)^{-1} . \tag{10.53}$$

Не теряя общности, вычисления можно упростить, считая $\Delta^* = \Delta$. При этом в матричной записи $\widehat{G}_0^{-1}(i\omega, \mathbf{p}) = i\omega - \tau_z\xi(\mathbf{p}) - \Delta\tau_x$.

б) Усредните по беспорядку диграмму для $Q(\mathbf{k})$, изображенную на рис. 10.10. Вычислив $\mathrm{Tr}(\widehat{j}\widehat{G}\widehat{j}\widehat{G})$ получите $Q(\mathbf{k})$, после чего по $Q(\mathbf{k}=0)$ определите сверхтекучую плотность (см. [1], формула (39.28)).

Задача 66*. (*Влияние магнитных примесей на сверхпроводимость*[5].) Пусть кроме обычных примесей имеются также и магнитные:

$$H_{int} = \sum_{\mathbf{r}_a} J\psi^+(\mathbf{r}_a)\widehat{\sigma}^k\widehat{S}_a^k\psi(\mathbf{r}_a) \ . \tag{10.54}$$

Здесь $\widehat{S}_a^k$ — оператор спина a-й примеси. Спины примесей будем считать некоррелированными. Такие примеси нарушают симметрию по отношению к обращению времени и поэтому легко подавляют сверхпроводимость. Найдите T_c как функцию концентрации примесей $n_{\text{маг}}$. Покажите, что сверхпроводимость подавляется при относительно малой концентрации $n_{\text{маг}} \approx T_c/v_F\sigma$, где σ — сечение рассеяния на магнитной примеси.

Задача 67*. (*Верхнее критическое поле H_{c2} в грязном сверхпроводнике*[6].)

Сверхпроводимость можно подавить магнитным полем, поскольку оно нарушает симметрию по отношению к обращению времени. Как именно происходит это подавление, зависит от характеристик сверхпроводника. Рассмотрим грязный сверхпроводник, в котором $l \ll \xi_0$, и, начиная с сильного поля H, в котором сверхпроводимость подавлена, будем постепенно уменьшать величину H и определим пороговое значение H, при котором сверхпроводимость восстанавливается. Оказывается, для этого нужно изучить устойчивость системы по отношению к малым *неоднородным* флуктуациям $\Delta(\mathbf{r})$. Формально, для этого надо рассмотреть куперовскую лестницу в слабом статическом поле $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, таком что $\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \mathbf{H}$. Записав для этого случая уравнение самосогласования (10.38) в пределе $\Delta \to 0$, найдите, при каком поле существует нетривиальное решение этого уравнения. Это поле называется *верхним критическим полем H_{c2}*.

10.5. Решения задач 58 – 67

58 а. Выведем уравнение для вершинной части $\Gamma^C(i\varepsilon, i\varepsilon')$, суммируя диаграммы на рис. 10.8. Заметим, что в этих диаграммах сумма 4-импульсов $s = p_1 + p_2$ одинакова

[5] см. работу: А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, ЖЭТФ, т. 39, с. 1781 (1960)

[6] Л. П. Горьков, ЖЭТФ, т. 36, с. 1918 (1959); R. Helfand, N. R. Werthammer, Phys. Rev. Lett., v. 13, p. 686 (1964).

в каждой петле. Поэтому интегральное уравнение, соответствующее этим диаграммам, имеет вид

$$\Gamma^C(p,p';s) = \Gamma^0(p,p') + \int \Gamma^0(p,k)G(k)G(s-k)\Gamma^C(k,p';s)\,\frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tag{10.55}$$

(конечно, по частотам следует брать не интеграл, а мацубаровскую сумму). Это уравнение отличается от аналогичного уравнения теории ферми-жидкости знаком перед интегральным членом. (Отличие возникает из-за того, что ферми-жидкостные диаграммы содержат фермионные петли, а куперовские диаграммы — нет.) Полагая $s = 0$ и пренебрегая зависимостью Γ^0 и Γ^C от пространственного импульса, перепишем уравнение (10.55) так:

$$\begin{aligned}\Gamma^C(i\varepsilon,i\varepsilon') &= \Gamma^0(i\varepsilon,i\varepsilon') + \\ &+ T\sum_{\varepsilon''}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\Gamma^0(i\varepsilon,i\varepsilon'')G(i\varepsilon'',\mathbf{p})\,G(-i\varepsilon'',-\mathbf{p})\,\Gamma^C(i\varepsilon'',i\varepsilon')\,.\end{aligned} \tag{10.56}$$

Интеграл по импульсам вычисляется переходом к интегрированию по ξ:

$$\int \frac{1}{(\varepsilon'')^2+\xi_p^2}\,\frac{d^3p}{(2\pi)^3} = \frac{\pi\nu_0}{|\varepsilon''|}\,. \tag{10.57}$$

Поэтому уравнение на куперовскую амплитуду принимает вид

$$\Gamma^C(i\varepsilon,i\varepsilon') = \Gamma^0(i\varepsilon,i\varepsilon') + \pi\nu_0 T\sum_{\varepsilon''}\Gamma^0(i\varepsilon,i\varepsilon'')\Gamma^C(i\varepsilon'',i\varepsilon')/|\varepsilon''| \tag{10.58}$$

58 б. Уравнение (10.58) можно решить, если зависимость от ε и ε' факторизуется. Тогда уравнение становится вырожденным. Перепишем его, явно выделяя зависимость от ε':

$$\Gamma^C(i\varepsilon,i\varepsilon') = \lambda v(i\varepsilon)\left(v(i\varepsilon') + \pi\nu_0 T\sum_{\varepsilon''}v(i\varepsilon'')\Gamma^C(i\varepsilon'',i\varepsilon')/|\varepsilon''|\right)\,. \tag{10.59}$$

Таким образом, оба члена в уравнении пропорциональны $v(i\varepsilon)$, поэтому $\Gamma^C(i\varepsilon,i\varepsilon') \approx v(i\varepsilon)$. Из соображений симметрии следует, что зависимость от ε' такая же:

$$\Gamma^C(i\varepsilon,i\varepsilon') = \alpha v(i\varepsilon)v(i\varepsilon')\,, \tag{10.60}$$

где α — константа, которую можно определить, подставив (10.60) в (10.59):

$$\alpha = \lambda + \pi\nu_0\alpha\lambda T\sum_{\varepsilon''}v^2(i\varepsilon'')/|\varepsilon''|\,. \tag{10.61}$$

Таким образом,

$$\alpha = \lambda\left(1 - \pi\nu_0\lambda T\sum_{\varepsilon''}v^2(i\varepsilon'')/|\varepsilon''|\right)^{-1}\,. \tag{10.62}$$

Это выражение обращается в бесконечность, если

$$\pi T \sum_{\varepsilon''} v^2(i\varepsilon'')/|\varepsilon''| \,=\, 1/\lambda\nu_0\,. \tag{10.63}$$

Условие (10.63) и определяет температуру перехода T_c.

58 в. В случае

$$v(i\varepsilon) = \omega_D/(\omega_D^2 + \varepsilon^2)^{1/2} \tag{10.64}$$

уравнение на температуру перехода (10.63) принимает такой вид:

$$2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega_D^2}{(\omega_D^2 + \pi^2 T_c^2(2n+1)^2)(2n+1)} = \frac{1}{\lambda\nu_0}\,. \tag{10.65}$$

Удобно вначале решить это уравнение с логарифмической точностью, а затем найти T_c более точно. Множитель $v^2(i\varepsilon)$ обрезает сумму в (10.63) при $n \approx n_{\max} = \omega_D/\pi T_c$. Если считать $n_{\max} \gg 1$ и пренебречь множителем $v^2(i\varepsilon)$, заменив верхний предел суммы на $n_{\max}$, получим

$$\sum_{n=0}^{n_{\max}} \frac{1}{n+1/2} = \ln n_{\max} = \frac{1}{\nu_0\lambda}\,, \tag{10.66}$$

откуда

$$T_c \approx \frac{\omega_D}{\pi}\, e^{-1/\lambda\nu_0}\,. \tag{10.67}$$

Значение коэффициента в этой формуле таким образом найти нельзя. Для этого надо точнее вычислить сумму в (10.65).

Заметим, что в сумме (10.65) имеются два масштаба: T_c и ω_D, причем, согласно (10.67), $T_c \ll \omega_D$. Поэтому вклады этих масштабов можно разделить, используя следующий стандартный прием. Разобьем сумму на две части: по $n < n_0$ и по $n > n_0$, причем точку разбиения n_0 выберем так, что $n_0 \gg 1$, и одновременно $2\pi T_c n_0 \ll \omega_D$. Найдем сумму по каждой из областей, а затем сложим результаты. В области $n < n_0$ можно заменить функцию $v(i\varepsilon)$ на единицу, после чего эта часть суммы легко вычисляется с помощью тождеств

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}/k = \ln 2\,, \quad \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} 1/k\, - \ln n\right) = C\,, \tag{10.68}$$

где $C = 0,577\ldots$ — постоянная Эйлера. Складывая эти два тождества, получаем вклад области $n < n_0$:

$$S(n < n_0) = \sum_{n=0}^{n_0} \frac{2}{2n+1} \approx \ln(4n_0) + C\,. \tag{10.69}$$

В высокочастотной области $n > n_0$ можно пренебречь T_c по сравнению с ω_D и заменить сумму интегралом, который легко вычисляется:

$$S(n > n_0) = \int\limits_{2\pi T n_0}^{\infty} \frac{\omega_D^2}{\varepsilon^2 + \omega_D^2}\,\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{1}{2}\ln\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + \omega_D^2}\bigg|_{2\pi T n_0}^{\infty}\,. \tag{10.70}$$

В пределе $\omega_D \gg 2\pi n_0 T_c$ находим

$$S(n > n_0) = \ln \frac{\omega_D}{2\pi n_0 T_c}\,. \tag{10.71}$$

Теперь, суммируя вклады от областей $n < n_0$ и $n \geqslant n_0$, приводим уравнение (10.63) к виду

$$\frac{1}{\lambda\nu_0} = \ln \frac{\omega_D}{\pi T_c} + C\,. \tag{10.72}$$

Решая его, находим уточненное выражение для температуры перехода T_c:

$$T_c = \frac{2\gamma}{\pi}\,\omega_D e^{-1/\lambda\nu_0}\,, \tag{10.73}$$

где $\gamma = e^C$.

59 а. Диаграммы на рисунках 10.6, 10.7 показывают, что щель Δ возникает в результате свертки аномальной функции $F(i\varepsilon, \mathbf{p})$ и куперовской вершины $\Gamma^0(i\varepsilon, i\varepsilon')$. Поэтому в общем случае щель зависит от энергии и, соответственно, мы будем использовать обозначение $\tilde{\Delta}(i\varepsilon)$. При этом уравнение самосогласования принимает следующий вид:

$$\tilde{\Delta}(i\varepsilon) = T\sum_{\varepsilon'} \Gamma^0(i\varepsilon, i\varepsilon')F(i\varepsilon', \mathbf{r} = \mathbf{r}')\,, \tag{10.74}$$

а величина $F(i\varepsilon, \mathbf{r} = \mathbf{r}')$ равна

$$F(i\varepsilon, \mathbf{r} = \mathbf{r}') = \int \frac{\tilde{\Delta}(i\varepsilon)}{\varepsilon^2 + \xi_p^2 + \tilde{\Delta}^2(i\varepsilon)}\,\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,. \tag{10.75}$$

Таким образом, в общем случае щель следует определять из интегрального уравнения. Оно несколько упрощается, если зависимость $\Gamma^0(i\varepsilon, i\varepsilon')$ от энергии факторизуется. Тогда легко видеть, что щель $\tilde{\Delta}(i\varepsilon)$ пропорциональна $v(i\varepsilon)$. Таким образом, сверхпроводящие эффекты «выключаются» при $|\varepsilon| \gg \omega_D$. Записывая $\tilde{\Delta}(i\varepsilon)$ в виде

$$\tilde{\Delta}(i\varepsilon) = \Delta(T)v(i\varepsilon)\,, \tag{10.76}$$

получаем уравнение

$$\Delta(T) = \lambda T\sum_{\varepsilon} \int \frac{v^2(i\varepsilon)\Delta(T)}{\varepsilon^2 + \xi_{\mathbf{p}}^2 + v^2(i\varepsilon)\Delta^2(T)}\,\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,. \tag{10.77}$$

59 б. Вычисляя интеграл по ξ в соотношении (10.77), получаем

$$\frac{1}{\lambda\nu_0} = \pi T\sum_{\varepsilon} \frac{v^2(i\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2(T)v^2(i\varepsilon)}}\,. \tag{10.78}$$

Рассмотрим качественно, как ведет себя решение этого уравнения. При $T \ll \Delta(T)$ сумму в правой части можно заменить интегралом. Таким образом, в этом пределе зависимость от T исчезает, и $\Delta(T)$ стремится к постоянному пределу. Зависимость от T должна быть очень слабой, поскольку для гладкой функции сумма очень хорошо аппроксимирует значение интеграла.

Ясно также, что при увеличении температуры величина щели $\Delta(T)$ будет уменьшаться. Формально это следует из того, что сумма в правой части (10.78) переоценивает значение интеграла тем больше, чем больше расстояние между мацубаровскими частотами. Поэтому для того, чтобы удержать правую часть постоянной, рост температуры следует компенсировать убыванием $\Delta(T)$. Заметим, что при $\Delta = 0$ уравнение (10.78) совпадает с уравнением для определения температуры перехода (10.63), рассмотренным в предыдущей задаче. Это означает, что при $T = T_c$ щель $\Delta(T)$ обратится в нуль. Вблизи этой точки правая часть (10.78) зависит линейно от $T - T_c$ и квадратично от $\Delta(T)$. Поэтому $\Delta(T) \approx \sqrt{T_c - T}$. Из этих рассуждений также следует, что $\Delta(0) \approx T_c$. Полученная таким образом качественная зависимость $\Delta(T)$ согласуется с результатом численного решения уравнения Горькова, изображенном на рис. 10.11.

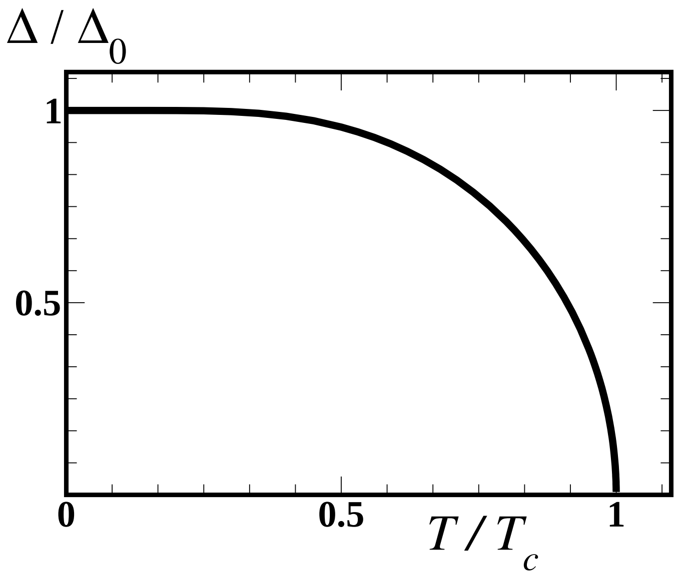


Рис. 10.11

59 в. Теперь вычислим $\Delta(T)$ при $T \to 0$. Вначале мы просто заменим сумму в (10.78) интегралом и получим, что $\Delta_0 \equiv \Delta(T = 0)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\nu_0 \lambda} = \int\limits_0^\infty \frac{v^2(i\varepsilon)\, d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_0^2 v^2(i\varepsilon)}} \,. \tag{10.79}$$

Найдем этот интеграл для нашей модельной функции $v(i\varepsilon) = \omega_D/(\varepsilon^2 + \omega_D^2)^{1/2}$. Вычисление сильно упрощается, если заметить, что $\Delta_0 \approx T_c \ll \omega_D$. Множитель $v^2(i\varepsilon)$ в подкоренном выражении важен лишь при $\varepsilon \leq \Delta_0$, но при таких энергиях $v^2(i\varepsilon) \approx 1$.

С учетом этого обстоятельства уравнение на щель переписывается так:

$$\frac{1}{\nu_0\lambda} = \int_0^\infty \frac{\omega_D^2\,d\varepsilon}{(\varepsilon^2+\omega_D^2)\sqrt{\varepsilon^2+\Delta_0^2}}\,. \tag{10.80}$$

В этом интеграле имеется два существенно разных масштаба энергий: Δ_0 и ω_D. Поэтому можно применить прием, использованный при решении предыдущей задачи: разбить область интегрирования на две части: $\varepsilon < \varepsilon_0$ и $\varepsilon > \varepsilon_0$, причем $\Delta_0 \ll \varepsilon_0 \ll \omega_D$. Тогда интеграл в правой части (10.80) равен

$$\int_0^{\varepsilon_0} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2+\Delta_0^2}} + \int_{\varepsilon_0}^\infty \frac{\omega_D^2\,d\varepsilon}{\varepsilon(\varepsilon^2+\omega_D^2)} = \ln\frac{2\varepsilon_0}{\Delta_0} + \ln\frac{\omega_D}{\varepsilon_0}\,. \tag{10.81}$$

Промежуточная энергия ε_0 выпадает. Окончательно получаем

$$\frac{1}{\lambda\nu_0} = \ln\frac{2\omega_D}{\Delta_0}\,. \tag{10.82}$$

Сравнивая это соотношение с выражением (10.73) для температуры перехода T_c, получаем соотношение

$$\Delta_0 = \frac{\gamma}{\pi}T_c\,. \tag{10.83}$$

Заметим, что коэффициент в формуле (10.73) для T_c связан с конкретной формой обрезания по энергии. Что же касается соотношения (10.83) между Δ_0 и T_c, то при $T_c \ll \omega_D$ оно определяется только физикой низкоэнергетической области $\varepsilon \ll \omega_D$ и поэтому не зависит от выбора обрезающей функции $v(i\varepsilon)$. Кроме того, точно такое же соотношение между Δ_0 и T_c получается и при обрезании по ξ. Таким образом, соотношение (10.83) носит универсальный характер.

Теперь найдем поведение $\Delta(T)$ при конечных, но малых температурах. Для этого надо вычислить отличие суммы в правой части (10.78) от интеграла. Это можно было бы сделать с помощью формулы суммирования Пуассона (10.47). Однако гораздо проще получить ответ, заметив, что самым малым масштабом, на котором меняется правая часть (10.78), является Δ_0. Поэтому при расчете низкотемпературных поправок структурой правой части на масштабе ω_D можно пренебречь. Тогда можно переписать (10.77) как

$$\frac{1}{\lambda\nu_0} = T\sum_\varepsilon \int_{-\infty}^\infty \frac{d\xi}{\varepsilon^2+\xi^2+\Delta^2}\,. \tag{10.84}$$

Преобразуем правую часть, используя (7.83):

$$\frac{1}{\lambda\nu_0} = \int_0^\infty \operatorname{th}\frac{\sqrt{\xi^2+\Delta^2}}{2T}\,\frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2+\Delta^2}}\,. \tag{10.85}$$

Этот интеграл логарифмически расходится, но его значение при $T = 0$ мы уже нашли, и сейчас нас интересуют поправки, возникающие при $T \neq 0$, которые, как мы сейчас увидим, описываются сходящимися интегралами. Минимальное значение аргумента гиперболического тангенса есть $\Delta/(2T) \gg 1$, поэтому можно заменить $\operatorname{th} x$ на $\operatorname{sign} x\,(1 - 2\exp(-|x|))$. Таким образом,

$$\frac{1}{\lambda\nu_0} = \ln\frac{2\omega_D}{\Delta} - 2\int\limits_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2+\Delta^2}}\,\exp\left(-\frac{\sqrt{\xi^2+\Delta^2}}{T}\right). \tag{10.86}$$

Так как при интегрировании второго члена вклад дают лишь $\xi \ll \Delta$, можно разложить квадратные корни следующим образом:

$$\frac{1}{\nu_0\lambda} = \ln\frac{2\omega_D}{\Delta} - 2e^{-\Delta/T}\int\limits_0^\infty e^{-\xi^2/2\Delta T}\left(1 - \frac{\xi^2}{2\Delta^2}\right)\frac{d\xi}{\Delta}, \tag{10.87}$$

откуда

$$\ln\frac{\Delta}{\Delta_0} = -\sqrt{\frac{2\pi T}{\Delta}}e^{-\Delta/T}\left(1 - \frac{T}{8\Delta}\right), \tag{10.88}$$

где $\Delta_0 = \gamma T_c/\pi$ — щель при $T = 0$. Выписанная поправка к Δ_0 понадобится нам при вычислении термодинамического потенциала в задаче 60. (Точность выражения (10.88) может показаться чрезмерной, но оказывается, что главный член в выражении (10.88) не дает вклада в термодинамический потенциал, и нам придется учесть выписанную поправку.) Окончательно получаем

$$\Delta(T \ll T_c) = \Delta_0\left(1 - \sqrt{\frac{2\pi T}{\Delta_0}}e^{-\Delta_0/T}\left(1 - \frac{T}{8\Delta_0}\right)\right). \tag{10.89}$$

Теперь рассмотрим случай $T \to T_c$. В этом пределе $\Delta(T) \ll T$, поэтому правую часть (10.78) можно разложить по Δ:

$$\frac{1}{\lambda\nu_0} = \pi T\sum_\varepsilon\left(\frac{v^2(i\varepsilon)}{|\varepsilon|} - \frac{\Delta^2 v^4(i\varepsilon)}{2|\varepsilon|^3}\right). \tag{10.90}$$

Как показано в задаче 58, первый член в правой части логарифмически зависит от T и сравнивается с левой частью при $T = T_c$. Поэтому его можно объединить с левой частью, получив $\ln T_c/T$. Что же касается второго члена, пропорционального Δ^2, то он определяется областью $\varepsilon \approx \pi T$, и в нем можно заменить $v^4(i\varepsilon)$ на единицу. Таким образом,

$$\ln\frac{T}{T_c} = -\frac{\pi\Delta^2}{2}T\sum_{\varepsilon_n}\frac{1}{|\varepsilon_n|^3}. \tag{10.91}$$

Сумма по мацубаровским частотам легко выражается через ζ-функцию:

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^x}, \quad \sum_{n=0}^\infty\frac{1}{(2n+1)^x} = \left(1 - \frac{1}{2^x}\right)\zeta(x). \tag{10.92}$$

Разлагая логарифм в левой части, получаем

$$\frac{T - T_c}{T_c} = -\frac{7\zeta(3)}{8\pi^2}\frac{\Delta^2}{T_c^2}, \tag{10.93}$$

откуда

$$\Delta^2_{T\to T_c} = \frac{8\pi^2}{7\zeta(3)} T_c(T_c - T). \tag{10.94}$$

Таким образом, и в этом случае обрезка при $\omega \approx \omega_D$ оказалась несущественной для вычисления щели.

Подводя итог, можно сказать, что конкретный вид обрезания важен в основном для определения T_c. Все остальные физические величины сверхпроводника могут быть выражены через T_c с помощью универсальных соотношений, не зависящих от вида конкретной функции запаздывания $v(i\varepsilon)$. Это происходит потому, что физика сверхпроводника определяется масштабами энергий порядка $T_c \ll \omega_D$. Это оправдывает применение популярной модели, в которой запаздывание на временах порядка ω_D^{-1} учитывается с помощью обрезания интегралов по ξ, а не по ε, т. е. запаздывающее взаимодействие заменяется на взаимодействие нелокальное в пространстве.

60. Приступим теперь к расчету термодинамических величин сверхпроводника [7]. Характерный масштаб энергий, дающих вклад в термодинамику, оказывается порядка $\max\{\Delta_0, T_c\}$, и следовательно эффектами запаздывания на временах порядка ω_D^{-1} можно пренебречь, выражая все величины через T_c или Δ_0.

Рассмотрим диаграммное разложение термодинамического потенциала, показанное на рис. 10.9. Как обычно, продифференцируем термодинамический потенциал по константе связи λ для того, чтобы убрать множитель $1/n$ перед диаграммами. Как нетрудно заметить, если в каждой из диаграмм на рис. 10.9 перерезать одну из электронных линий, то получается одна из диаграмм на рис. 10.6, причем соответствие взаимнооднозначное. Поэтому

$$\begin{aligned}\frac{\lambda}{V}\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda} &= T\sum_{\omega_n}\int G_0^{-1}(i\omega_n,\, \mathbf{p})\Big(G(i\omega_n,\, \mathbf{p}) - G_0(i\omega_n,\, \mathbf{p})\Big)\,\frac{d^3p}{(2\pi)^3} = \\ &= -T\sum_{\omega_n}\int \Delta^* F(i\omega_n,\, \mathbf{p})\,\frac{d^3p}{(2\pi)^3} = -\frac{|\Delta|^2}{\lambda}.\end{aligned} \tag{10.95}$$

Делая преобразование, мы воспользовались соотношениями (10.32) и (10.39).

Термодинамический потенциал получается интегрированием $\partial\Omega/\partial\lambda$ по λ от $\lambda = 0$ до истинного значения. Чтобы проинтегрировать по λ, выразим $d\lambda$ через $d\Delta$ с помощью (10.39):

$$\frac{d\lambda}{\lambda^2} = T\sum_{\omega_n}\int \frac{2\Delta\, d\Delta}{(\omega_n^2 + \xi_{\mathbf{p}} + \Delta^2)^2}\,\frac{d^3p}{(2\pi)^3}. \tag{10.96}$$

[7] Эту задачу можно решить, вычисляя термодинамический потенциал идеального газа квазичастиц со спектром (10.37). Вместо этого мы воспользуемся диаграммами, чтобы проиллюстрировать некоторые общие положения.

Поэтому

$$\frac{\Omega_s - \Omega_n}{V} = -2\int_0^{\Delta} T\sum_{\omega_n}\int \frac{\Delta^3 d\Delta}{\left(\omega_n^2 + \xi_{\mathbf{p}}^2 + \Delta^2\right)^2}\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,. \tag{10.97}$$

Интегрируя по ξ и Δ, получим

$$\frac{\Omega_s - \Omega_n}{V} = -\pi\,\nu_0\,T\sum_{\omega_n}\left(\sqrt{\omega_n^2 + \Delta^2} + \frac{\omega_n^2}{\sqrt{\omega_n^2+\Delta^2}} - 2|\omega_n|\right)\,. \tag{10.98}$$

Снова рассмотрим предельные случаи.

а) $T \to 0$. При очень низкой температуре мацубаровская сумма $T\sum\limits_{\omega_n}\ldots$ хорошо аппроксимируется интегралом $\int\ldots\frac{d\omega}{2\pi}$. Поправки нетрудно найти, перейдя от суммы к интегралу по формуле Пуассона, и удержав в ней только первые три члена:

$$\sum_n f(n) = \int f(x)dx\, + \int e^{2\pi i x}f(x)dx\, + \int e^{-2\pi i x}f(x)dx\, + \ldots \tag{10.99}$$

Здесь

$$f(x) = \sqrt{(2\pi T x)^2 + \Delta^2} + \frac{\Delta^2}{\sqrt{(2\pi T x)^2 + \Delta^2}} - 4\pi T|x|\,. \tag{10.100}$$

(Заметим, что неаналитичность $|x|$ не мешает использовать формулу Пуассона, поскольку для последнего слагаемого сумму в формуле Пуассона можно вычислить явно, не делая никаких приближений.) После громоздких вычислений, приведенных в конце решения, получим

$$\Omega_s = -\frac{V\,\nu_0\,\Delta^2}{2}\left(1 + 2\sqrt{\frac{2\pi\,T}{\Delta}}e^{-\Delta/T}\left(1 + \frac{15}{8}\frac{T}{\Delta}\right)\right)\,. \tag{10.101}$$

Подставляя сюда $\Delta(T)$ из (10.89), находим

$$\Omega_s = -\frac{\nu_0\,V\,\Delta_0^2}{2}\left(1 + 4\sqrt{\frac{2\pi\,T^3}{\Delta_0^3}}\,e^{-\Delta_0/T}\right)\,. \tag{10.102}$$

Обратим внимание на происходящее здесь сокращение главного температурно-зависящего члена. Из (10.102) найдем теплоемкость, дифференцируя энтропию по T:

$$C_s = T\,\frac{\partial S_s}{\partial T} = -T\,\frac{\partial^2 \Omega_s}{\partial T^2} = 2\,\nu_0\,V\sqrt{\frac{2\pi\,\Delta_0^5}{T^3}}\,e^{-\Delta_0/T}\,. \tag{10.103}$$

б) $T \to T_c$. В этом случае достаточно просто разложить (10.98) до четвертого порядка по Δ (член второго порядка обращается в нуль):

$$\frac{\Omega_s - \Omega_n}{V} = -\pi\,\nu_0\,\Delta^4\,T\sum_{\omega_n}\frac{1}{|\omega_n|^3}\,. \tag{10.104}$$

Сумма, как и в задаче 59, выражается через ζ-функцию:

$$\frac{\Omega_s - \Omega_n}{V} = -\frac{7\zeta(3)}{16\pi^2}\frac{\nu_0\,\Delta^4}{T_c^2}\,. \tag{10.105}$$

Подставляя сюда Δ из (10.94), получим

$$\Omega_s - \Omega_n = -\frac{4\pi^2}{7\zeta(3)}\,V\,\nu_0\,(T-T_c)^2\,. \tag{10.106}$$

Дифференцируя по температуре, находим теплоемкость:

$$C_s - C_n = \frac{8\pi^2}{7\zeta(3)}\,\nu_0\,T_c\,V\,. \tag{10.107}$$

Напомним, что теплоемкость нормального металла есть

$$C_n = \frac{2\pi^2}{3}\,\nu_0\,V\,T\,, \tag{10.108}$$

поэтому

$$\frac{C_s - C_n}{C_n} = \frac{12}{7\zeta(3)}\,. \tag{10.109}$$

Вычислим сумму в (10.98) при $T \to 0$. Согласно формуле суммирования Пуассона,

$$\frac{\Omega_s - \Omega_n}{V} = -\pi\nu_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sqrt{\omega^2+\Delta^2} + \frac{\omega_n^2}{\sqrt{\omega^2+\Delta^2}} - 2|\omega|\right) v\,e^{ik\omega/T}\,\frac{d\omega}{2\pi}\,. \tag{10.110}$$

Заметим, что первые два члена — плавные функции ω, поэтому интегралы от них экспоненциально малы. Поэтому нам достаточно удержать их лишь при $k = 0, \pm 1$. Что же касается последнего члена, то интеграл от него легко вычисляется и равен $-4T^2/k^2$. В результате выражение для термодинамического потенциала приводится к виду

$$\frac{\Omega_s - \Omega_n}{V} = -\nu_0\left[\int_0^{\infty}\left(\sqrt{\omega^2+\Delta^2} + \frac{\omega^2}{\sqrt{\omega^2+\Delta^2}} - 2\omega\right)d\omega + \right. \tag{10.111}$$
$$\left. + \int_{-\infty}^{\infty}\left(\sqrt{\omega^2+\Delta^2} + \frac{\omega^2}{\sqrt{\omega^2+\Delta^2}}\right)\cos\frac{\omega}{T}\,d\omega \;-\; 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{T^2}{k^2}\right].$$

Первый интеграл есть

$$\int_0^{\infty}\left(\sqrt{\omega^2+\Delta^2} + \frac{\omega^2}{\sqrt{\omega^2+\Delta^2}} - 2\omega\right)d\omega = \frac{\Delta^2}{2}\,, \tag{10.112}$$

а сумма равна

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}\,. \tag{10.113}$$

Оставшийся интеграл вычисляется так. Функция $\sqrt{\omega^2+\Delta^2}$ имеет скачок на разрезе, идущем от точки $i\Delta$ до бесконечности. В остальной же части верхней полуплоскости функция аналитична, поэтому контур интегрирования можно деформировать так, чтобы он огибал этот разрез (рис. 10.12).

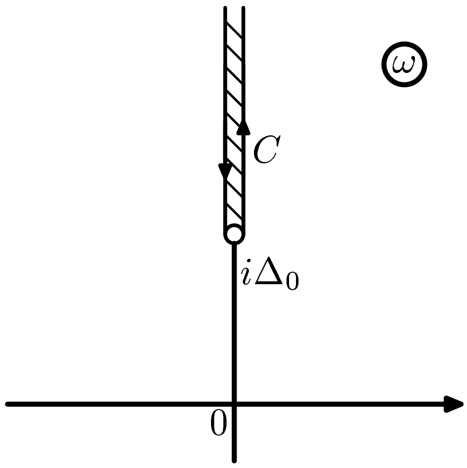


Рис. 10.12

Вводя переменную интегрирования u по формуле $\omega = i\Delta + iu$, приведем интеграл к виду

$$2\int_0^\infty \frac{\Delta^2 + 2u^2 + 4u\Delta}{\sqrt{2\Delta u + u^2}}\, e^{-(\Delta+u)/T}\, du\,. \qquad (10.114)$$

В этот интеграл дают вклад $u \approx T$, поэтому подинтегральное выражение можно разложить по u:

$$2\Delta^2 e^{-\Delta/T}\int_0^\infty \left(1 + \frac{15}{4}\frac{u}{\Delta}\right) e^{-u/T}\,\frac{du}{\sqrt{2\Delta\, u}} = \sqrt{2\pi T\Delta^3}\, e^{-\Delta/T}\,\left(1 + \frac{15}{8}\frac{T}{\Delta}\right) \qquad (10.115)$$

В результате

$$\frac{\Omega_s - \Omega_n}{V} = -\frac{\nu_0\,\Delta^2}{2}\left(1 + 2\sqrt{\frac{2\pi T}{\Delta}}e^{-\Delta/T}\left(1 + \frac{15}{8}\frac{T}{\Delta}\right)\right) + \frac{\pi^2\nu_0 T^2}{3}\,. \qquad (10.116)$$

Заметим, что последний член в этой формуле есть не что иное, как взятый с обратным знаком термодинамический потенциал нормального металла.

61. Рассмотрим уравнение (10.58) для куперовской амплитуды рассеяния, полученное в решении задачи 58. Если куперовская амплитуда $\Gamma^C(i\varepsilon, i\varepsilon')$ имеет полюс при $T \to T_c$, то в уравнении (10.58) можно пренебречь свободным членом:

$$\Gamma^C(i\varepsilon, i\varepsilon') = \pi\nu_0 T\sum_{\varepsilon''}\Gamma^0(i\varepsilon, i\varepsilon'')\Gamma^C(i\varepsilon'', i\varepsilon')/|\varepsilon''|\,. \qquad (10.117)$$

Зависимость от ε' в этом уравнении «сокращается». Поэтому можно считать, что решение факторизуется:

$$\Gamma^C(i\varepsilon, i\varepsilon') = \Phi(i\varepsilon)\Phi(i\varepsilon')\,. \qquad (10.118)$$

(Зависимость Γ^C от ε и ε' должна быть одинаковой ввиду симметрии куперовской лестницы.) Тогда функция $\Phi(\varepsilon)$ удовлетворяет уравнению

$$\Phi(i\varepsilon) = \pi\nu_0 T\sum_{\varepsilon'}\left(\Gamma^0(i\varepsilon, i\varepsilon')/|\varepsilon'|\right)\,\Phi(i\varepsilon')\,. \qquad (10.119)$$

Для Γ^0 из условия задачи это интегральное уравнение оказывается вырожденным и легко решается. Видно, что функция $\Phi(\varepsilon)$ содержит два члена: пропорциональный $v(i\varepsilon)$ и не зависящий от ε. Ищем решение в виде

$$\Phi(\varepsilon) = av(i\varepsilon) + b\,. \tag{10.120}$$

Подставляя это выражение в (10.119) и приравнивая коэффициенты перед $v(i\varepsilon)$ и перед константой, получаем

$$a = \pi\lambda\nu_0 T \sum_{\varepsilon'} \left[av^2(i\varepsilon') + bv(i\varepsilon')\right]/|\varepsilon'|\,, \tag{10.121}$$

$$b = -\pi\mu\nu_0 T \sum_{\varepsilon'} \left[av(i\varepsilon) + b\right]/|\varepsilon'|\,. \tag{10.122}$$

На этот раз мы не будем заниматься точным вычислением сумм в этом выражении, а найдем их с логарифмической точностью, поскольку основной интерес будут представлять величины, стоящие перед логарифмами. Суммы, содержащие $v(i\varepsilon)$ и $v^2(i\varepsilon)$ следует обрезать сверху при $\varepsilon \approx \omega_D$. Сумму, не содержащую факторов запаздывания, мы обрежем сверху при $\varepsilon \approx \omega_p\,(\approx \varepsilon_F)$ — на плазменной частоте, которая играет в физике электрон-электронного взаимодействия роль, аналогичную ω_D для электрон-фононного взаимодействия. Таким образом, получаем

$$a = \nu_0\lambda \ln\frac{\omega_D}{T}\,(a+b)\,, \tag{10.123}$$
$$b = -\mu\nu_0\left[a\ln\frac{\omega_D}{T} + b\left(\ln\frac{\omega_D}{T} + \ln\frac{\omega_p}{\omega_D}\right)\right]\,.$$

Перенося во втором уравнении член с $\ln(\omega_p/\omega_D)$ в левую часть, можно переписать его в таком виде, что оно становится похоже на первое:

$$b = -\nu_0\mu_*\ln\frac{\omega_D}{T}(a+b)\;; \quad \mu_* = \frac{\mu}{1+\nu_0\mu\ln(\omega_p/\omega_D)}\,. \tag{10.124}$$

Мы ввели здесь эффективную куперовскую амплитуду μ_*, которая отличается от μ из-за запаздывания фононов. Теперь, складывая первое из уравнений (10.123) с уравнением (10.124), приходим к условию совместности системы (10.123):

$$1 = (\lambda - \mu_*)\ln\frac{\omega_D}{T}\,, \tag{10.125}$$

из которого находим температуру перехода:

$$T_c \approx \omega_D\, e^{-1/\lambda_*\nu_0}\,, \quad \lambda_* = \lambda - \mu_*\,. \tag{10.126}$$

Таким образом, кулоновское взаимодействие действительно понижает температуру сверхпроводящего перехода, но не очень сильно. При $\nu_0\mu\ln\varepsilon_F/\omega_D \gg 1$ относительная поправка к λ мала как $1/\ln(\varepsilon_F/\omega_D)$.

62 а. Прежде чем вычислять $Q(0)$ для произвольного электронного спектра $\xi(\mathbf{p})$, уточним выражение для тока. Гамильтониан частиц со спектром $\xi(\mathbf{p})$ во внешнем магнитном поле $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ есть

$$\widehat{\mathcal{H}} = \int \psi^{+}(\mathbf{r})\, \xi\left(\widehat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\, \psi(\mathbf{r})\, d^3\mathbf{r}\,. \tag{10.127}$$

где $\widehat{\mathbf{p}} = -i\nabla_{\mathbf{r}}$. Ток, согласно общим принципам, получается варьированием гамильтониана по $\mathbf{A}$:

$$\widehat{\mathbf{j}} = e\,\psi^{+}(\mathbf{r})\, \nabla_{\mathbf{p}}\xi\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\, \psi(\mathbf{r})\,. \tag{10.128}$$

Выделим линейный по $\mathbf{A}$ член:

$$\widehat{\mathbf{j}} = e\,\psi^{+}(\mathbf{r})\, \nabla_{\mathbf{p}}\xi\left(\mathbf{p}\right)\, \psi(\mathbf{r}) - \frac{e^2}{c}\,\psi^{+}(\mathbf{r})\, \nabla_{\mathbf{p}}\Big[(\mathbf{A}\nabla_{\mathbf{p}})\, \xi(\mathbf{p})\Big]\, \psi(\mathbf{r})\,. \tag{10.129}$$

При $\xi(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2m - E_F$ это выражение для тока переходит в обычную квантовомеханическую формулу.

Проще всего вычисляется вклад в $Q(0)$ второго члена:

$$Q^{(2)}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = -\frac{e^2}{c}\left\langle \psi^{+}\frac{\partial^2\xi(\mathbf{p})}{\partial p_\alpha \partial p_\beta}\psi\right\rangle = -\frac{e^2}{c}\int \frac{\partial^2\xi(\mathbf{p})}{\partial p_\alpha \partial p_\beta}\, n_F(\xi(\mathbf{p}))\, \frac{2d^3p}{(2\pi)^3}\,. \tag{10.130}$$

Чтобы найти вклад первого члена, поступим стандартным образом. В линейном по $\mathbf{A}$ приближении взаимодействие тока с полем есть

$$\widehat{\mathcal{H}}_{\rm int} = -\frac{1}{c}\int \widehat{\mathbf{j}}(\mathbf{r})\, \mathbf{A}(\mathbf{r})\, d^3r\,. \tag{10.131}$$

Находя, как обычно, поправку первого порядка к функции Грина и вычисляя с ее помощью $\langle\, \mathbf{j}\,\rangle$, получаем, что этот вклад дается петлей:

$$Q^{(1)}_{\alpha\beta}(i\Omega,\, \mathbf{k}) = -\frac{e^2}{c}\lim_{\tau\to+0} T\sum_{\omega_n}\int \frac{v_\alpha(\mathbf{p})\, v_\beta(\mathbf{p})}{i\omega_n - \xi(\mathbf{p})}\, \frac{e^{i\omega_n\tau}}{i\omega_n + i\Omega - \xi(\mathbf{p}+\mathbf{k})}\, \frac{2d^3p}{(2\pi)^3}\,. \tag{10.132}$$

Мы ввели здесь множитель сходимости $e^{i\omega_n\tau}$ $(\tau \to +0)$, который отвечает за правильный порядок ψ и ψ^{+} (ср. с задачей 35).

При $\Omega = 0$ и $\mathbf{k} = 0$ это выражение сводится к такому:

$$Q^{(1)}_{\alpha\beta}(0) = -\frac{e^2}{c}\lim_{\tau\to+0} T\sum_{\omega_n} e^{i\omega_n\tau}\int \frac{v_\alpha(\mathbf{p})\, v_\beta(\mathbf{p})}{(i\omega_n - \xi(\mathbf{p}))^2}\, \frac{2d^3p}{(2\pi)^3} \tag{10.133}$$

Учитывая, что $\mathbf{v} = \nabla_{\mathbf{p}}\xi(\mathbf{p})$, перепишем $Q^{(1)}_{\alpha\beta}(0)$ в виде

$$Q^{(1)}_{\alpha\beta}(0) = -\frac{e^2}{c}\lim_{\tau\to+0} T\sum_{\omega_n} e^{i\omega_n\tau}\int v_\alpha(\mathbf{p})\, \nabla_\beta \frac{1}{i\omega_n - \xi(\mathbf{p})}\, \frac{2d^3p}{(2\pi)^3}\,, \tag{10.134}$$

после чего проинтегрируем по частям:

$$Q^{(1)}_{\alpha\beta}(0) = +\frac{e^2}{c}\lim_{\tau\to+0} T\sum_{\omega_n} e^{i\omega_n\tau}\int \nabla_\beta v_\alpha(\mathbf{p})\,\frac{1}{i\omega_n - \xi(\mathbf{p})}\,\frac{2d^3p}{(2\pi)^3} = -Q^{(2)}_{\alpha\beta} \tag{10.135}$$

(суммирование по мацубаровским частотам производится так же, как в выражении (7.59) в решении задачи 35). Итак, $Q_{\alpha\beta}(0) = 0$.

62 б. Чтобы найти диамагнитную восприимчивость ферми-газа χ_0, свяжем ее с константой a в разложении $Q(\mathbf{k}) = a\mathbf{k}^2 + \ldots$ По определению $Q(\mathbf{k})$,

$$\mathbf{j} = \widehat{Q}\mathbf{A} = -a\nabla^2\mathbf{A}\,. \tag{10.136}$$

С другой стороны, ток связан с намагниченностью:

$$\mathbf{j} = c\,\mathrm{rot}\,\mathbf{M} = c\,\mathrm{rot}\,\chi_0\mathbf{B} = \chi_0 c\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}\,. \tag{10.137}$$

Поскольку $\mathrm{div}\,\mathbf{A} = 0$, ток можно записать так:

$$\mathbf{j} = -\chi_0 c\nabla^2\mathbf{A}\,. \tag{10.138}$$

Отсюда находим $\chi_0 = a/c$.

Теперь вычислим a. Предположим, что волновой вектор $\mathbf{k}$ направлен вдоль оси z, и найдем Q_{xx}:

$$Q_{xx} = -\lim_{\tau\to+0}\frac{e^2}{c}T\sum_{\omega_n} e^{i\omega_n\tau}\int \frac{v_x(\mathbf{p}+\mathbf{k})\,v_x(\mathbf{p})}{(i\omega_n - \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{k}})\,(i\omega_n - \xi_{\mathbf{p}})}\,\frac{2d^3p}{(2\pi)^3}\,. \tag{10.139}$$

В отличие от спиновой восприимчивости, орбитальная восприимчивость определяется не только окрестностью поверхности Ферми, но и всеми состояниями под ней, потому что квантование Ландау затрагивает все состояния с $E < E_F$, и конечная восприимчивость χ_0 возникает из-за отличия суммы квантованных энергий от интеграла по непрерывному спектру. Поэтому мы ограничимся случаем $\xi(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2m - E_F$. Разлагая $Q(k)$ по $k_z = k$, и имея в виду, что для квадратичного спектра $v_x(\mathbf{p}+\mathbf{k}) = v_x(\mathbf{p}) = p_x/m$, запишем

$$Q_{xx} = -\frac{e^2k^2}{c}\,T\sum_{\omega_n} e^{i\omega_n\tau}\int \frac{v_x^2}{i\omega_n - \xi_{\mathbf{p}}}\frac{\partial^2}{\partial p_z^2}\frac{1}{i\omega_n - \xi_{\mathbf{p}}}\,\frac{2\,d^3p}{(2\pi)^3}\,. \tag{10.140}$$

Проинтегрировав по частям, получим

$$\chi_0 = \frac{e^2}{c^2}T\sum_{\omega_n} e^{i\omega_n\tau}\int \frac{v_x^2\,v_z^2}{(i\omega_n - \xi_{\mathbf{p}})^4}\,\frac{2d^3p}{(2\pi)^3}\,. \tag{10.141}$$

Теперь усредним по углам ($\langle v_x^2 v_z^2\rangle = v^4/15$):

$$\chi_0 = \frac{e^2}{15c^2m^4}\,T\sum_{\omega_n} e^{i\omega_n\tau}\int \frac{p^4}{(i\omega_n - \xi_{\mathbf{p}})^4}\,\frac{2d^3p}{(2\pi)^3}\,. \tag{10.142}$$

Интеграл по модулю импульса трехкратным интегрированием по частям приводится к виду

$$\int_0^\infty \frac{p^6\,dp}{\left(i\omega_n + E_F - p^2/2m\right)^4} = -\frac{5m^3}{2}\int_0^\infty \frac{dp}{i\omega_n + E_F - p^2/2m}\,, \tag{10.143}$$

после чего суммирование по ω_n дает, как обычно, распределение Ферми (см. формулу (7.59) в решении задачи 35):

$$\chi_0 = -\frac{e^2}{12\pi^2 mc^2}\int_0^\infty n_F(\xi_p)\,dp = -\frac{e^2 p_0}{12\pi^2 mc^2}\,. \tag{10.144}$$

Используя выражение для спиновой восприимчивости, найденное в задаче 24

$$\chi_{napa} = 2\mu_B^2\nu_0 = \frac{e^2}{4m^2c^2}\frac{mp_0}{\pi^2}\,, \tag{10.145}$$

находим соотношение между орбитальной и спиновой восприимчивостью:

$$\chi_0 = -\frac{1}{3}\chi_{napa}\,. \tag{10.146}$$

Отметим, что это соотношение не универсально. Как видно из нашего вычисления, вклад в χ_0 дает весь спектр, а не только поверхность Ферми. Поэтому полученное соотношение между χ_0 и χ_{napa} верно лишь для квадратичного спектра. При более общем законе дисперсии $\xi(\mathbf{p})$ восприимчивость χ_0 по величине может оказаться даже больше, чем χ_{napa}. В этом случае нормальный металл оказывается диамагнетиком.

63. В этой задаче мы вычислим функцию отклика $Q(0)$ для сверхпроводника. При этом основное отличие от вычисления для нормального металла, проделанного в задаче 62, возникает из-за необходимости учесть как нормальные, так и аномальные средние.

Среднее от диамагнитного вклада в ток есть просто

$$Q^{(2)}(0) = -ne^2/mc\,. \tag{10.147}$$

Что же касается градиентного вклада $Q^{(1)}_{\alpha\beta}(i\Omega,\,\mathbf{k})$, то он получается усреднением произведения токов и дается следующим выражением:

$$Q^{(1)}_{\alpha\beta}(i\Omega_s,\mathbf{k}) = \frac{1}{2c}\sum_{\sigma,\sigma'}\int_{-\beta}^{\beta} e^{i\Omega\tau}\,d\tau\int e^{i\mathbf{kr}}\;\times \tag{10.148}$$
$$\times\,\langle \mathrm{T}_\tau\,\psi^+_\sigma(\mathbf{r},\,\tau)\,\hat{j}_\alpha\psi_\sigma(\mathbf{r},\,\tau)\,\psi^+_{\sigma'}(0,\,0)\,\hat{j}_\beta\psi_{\sigma'}(0,\,0)\,\rangle\, d^3\mathbf{r}$$

(σ, σ' — спиновые индексы, а $\mathbf{j} = -i\frac{e}{m}\nabla_{\mathbf{r}}$).

Теперь необходимо спарить ψ-операторы, учитывая как нормальные, так и аномальные средние. При этом теорема Вика по-прежнему справедлива, поскольку операторы ψ и ψ^+ можно выразить линейным образом через операторы рождения и уничтожения квазичастиц сверхпроводника, для которых аномальные средние равны нулю. Таким образом,

$$\begin{aligned}&\langle \mathrm{T}_\tau\, \psi^+_\sigma(\mathbf{r},\,\tau)\,\widehat{j}_\alpha\psi_\sigma(\mathbf{r},\,\tau)\,\psi^+_{\sigma'}(0,\,0)\,\widehat{j}_\beta\psi_{\sigma'}(0,\,0)\,\rangle = \\ &= -\widehat{j}_\alpha\, G_{\sigma\sigma'}(\mathbf{r},\,\tau)\,\widehat{j}_\beta\, G_{\sigma'\sigma}(-\mathbf{r},\,-\tau) - \widehat{j}_\alpha\, F^+_{\sigma\sigma'}(\mathbf{r},\,\tau)\,\widehat{j}_\beta\, F_{\sigma'\sigma}(-\mathbf{r},\,-\tau)\,.\end{aligned} \tag{10.149}$$

Тогда $Q^{(1)}_{\alpha\beta}(i\Omega,\,\mathbf{k})$ принимает вид

$$\begin{aligned}Q^{(1)}_{\alpha\beta}(i\Omega,\,\mathbf{k}) = -\frac{1}{2c}\int\limits_{-\beta}^{\beta} e^{i\Omega\tau}\,d\tau \int d^3r\, e^{i\mathbf{kr}}\,\times \\ \times\left[2\widehat{j}_\alpha\, G(\mathbf{r},\,\tau)\,\widehat{j}_\beta\, G(-\mathbf{r},\,-\tau) + 2\widehat{j}_\alpha\, F(\mathbf{r},\,\tau)\,\widehat{j}_\beta\, F^*(-\mathbf{r},\,-\tau)\right]\,.\end{aligned} \tag{10.150}$$

Заметим, что знаки петель, содержащих функции G и F, оказываются одинаковыми. Переписывая выражение (10.150) в импульсном представлении, получаем

$$\begin{aligned}Q^{(1)}_{\alpha\beta}(i\Omega,\,\mathbf{k}) = -\frac{Te^2}{c}\sum_{\omega_n}\int v_\alpha\left(\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}\right)\,v_\beta\left(\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}\right)\,\times \\ \times\left\{G\left(i\omega_n,\,\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}\right)\,G\left(i\omega_n+i\Omega,\,\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}\right)\,+\right. \\ \left.+\,F\left(i\omega_n,\,\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}\right)\,F^*\left(i\omega_n+i\Omega,\,\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}\right)\right\}\frac{2d^3p}{(2\pi)^3}\,.\end{aligned} \tag{10.151}$$

Тогда при $\mathbf{k}=0$

$$Q^{(1)}(0) = \frac{1}{3}Q^{(1)}_{\alpha\alpha}(0) = -\frac{e^2T}{3m^2c}\sum_{\omega_n}\int\,\mathbf{p}^2\left(G^2(i\omega_n,\,\mathbf{p}) + |F(i\omega_n,\,\mathbf{p})|^2\right)\frac{2d^3p}{(2\pi)^3}\,. \tag{10.152}$$

Собирая вместе $Q^{(1)}$ и $Q^{(2)}$ и учитывая определение n_s, получим

$$n - n_s = -\frac{2\,T\nu_0p_0^2}{3m}\sum_{\omega_n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\Delta^2+\xi^2-\omega_n^2}{\left(\omega_n^2+\xi^2+\Delta^2\right)^2}\,d\xi\,. \tag{10.153}$$

Обратим внимание на то, что при интегрировании по ω выражение (10.153) обращается в нуль, в то время как при интегрировании по ξ этого не происходит. Следовательно, оно не вполне корректно определено. Дело в том, что эта величина не «сидит» на поверхности Ферми, и для правильного учета состояний вдали от уровня Ферми следовало бы брать плотность состояний, зависящую от энергии. Однако сверхтекучая плотность, несомненно, определяется поверхностью Ферми, потому что только там и происходит перестройка электронных состояний. В глубине же фермиевского моря (т. е. при $\xi \sim E_F$) ничего не происходит. Поэтому можно поступить так: вычесть из этого выражения аналогичное с $\Delta = 0$, т. е. для нормального металла.

Тогда вклад глубоких состояний выпадет. При этом, как мы знаем, для нормального металла $n_s = 0$. В результате

$$n_s = \frac{2\nu_0 p_0^2}{3m} T \sum_{\omega_n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\xi^2 - \omega_n^2}{(\xi^2 + \omega_n^2)^2} - \frac{\xi^2 - \omega_n^2 + \Delta^2}{(\xi^2 + \omega_n^2 + \Delta^2)^2} \right] d\xi \,. \tag{10.154}$$

Получившееся выражение можно интегрировать в любом порядке. Лучше всего сначала проинтегрировать по ξ. При этом оказываются полезными следующие соотношения:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{\pi}{2a^3} \,, \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\, dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{\pi}{2a} \,. \tag{10.155}$$

После интегрирования получаем ответ:

$$n_s = \frac{2\nu_0 p_0^2}{3m} T \sum_{\omega_n} \frac{\pi \Delta^2}{(\omega_n^2 + \Delta^2)^{3/2}} \,. \tag{10.156}$$

Рассмотрим различные предельные случаи.

а) $T \to 0$. Заменим сумму интегралом:

$$n_s = \frac{2\nu_0 p_0^2}{3m} \frac{\pi \Delta^2}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(\omega^2 + \Delta^2)^{3/2}} = \frac{2\nu_0 p_0^2}{3m} = \frac{p_0^3}{3\pi^2} = n \,. \tag{10.157}$$

Видим, что при $T = 0$ сверхтекучая плотность равна полной, как и должно быть в трансляционно–инвариантной системе.

б) $T \to T_c$. В этом случае достаточно пренебречь Δ в знаменателе. Тогда сумма выражается через ζ-функцию (см. задачу 59), что дает

$$\frac{n_s}{n} = \frac{7\Delta^2}{4\pi^2 T_c^2} = 2\left(1 - \frac{T}{T_c}\right) \,. \tag{10.158}$$

Таким образом, при $T \to T_c$ сверхтекучая плотность уменьшается до нуля.

Теперь свяжем n_s с глубиной проникновения. Запишем закон Ампера:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} = -\frac{4\pi n_s e^2}{mc^2} \mathbf{A} \,. \tag{10.159}$$

Поскольку $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$, имеем

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{4\pi n_s e^2}{mc^2} \mathbf{A} \,. \tag{10.160}$$

Пусть граница образца перпендикулярна оси x, а магнитное поле параллельно оси z. Тогда

$$A_y(x) = A_y(0)\, e^{-x/\delta_\Lambda} \,, \tag{10.161}$$

где

$$\delta_\Lambda^2 = \frac{mc^2}{4\pi n_s e^2} \,. \tag{10.162}$$

Отсюда получаем, что магнитное поле

$$H_z = -\frac{\partial A_y}{\partial x} = \frac{A_y(0)}{\delta_\Lambda}\, e^{-x/\delta_\Lambda} = H_z(0) e^{-x/\delta_\Lambda} \tag{10.163}$$

экспоненциально затухает в глубь сверхпроводника, причем глубина проникновения равна δ_Λ.

В нашем расчете мы пренебрегали дисперсией $Q(k)$. Выясним, при каких условиях это законно, или, иными словами, каков масштаб пространственной дисперсии в сверхпроводнике. Чтобы определить этот масштаб, следует сравнить $\mathbf{kv}$ (это и есть величина, которой мы пренебрегли) со всеми остальными величинами в знаменателях функций G и F в (10.151). Сравнивая ξ с Δ, получаем характерный волновой вектор $k_0 \approx \xi^{-1}(T) \approx \Delta(T)/(\hbar v_F)$. Заметим, однако, что при $T \to T_c$ $\Delta(T) \to 0$ и основную роль в знаменателе играет $\omega_{n=0} = \pi T_c \approx \Delta_0$. Поэтому на самом деле характерный волновой вектор при любых температурах есть $k_0 \approx \xi_0^{-1} \approx \Delta_0/(\hbar v_F)$. Для того чтобы наш расчет был применим, должно быть $\delta_\Lambda \gg \xi_0$. В этом случае сверхпроводник называют лондоновским. Противоположный предельный случай называется пиппардовским.

Оказывается, что в сверхпроводниках есть два пространственных масштаба. Один из них, $\xi(T)$, — это масштаб корреляций параметра порядка Δ. Другой, ξ_0, — это размер куперовской пары. При $T \to T_c$ различие между ними становится весьма ощутимым, поскольку при приближении T к T_c корреляционная длина $\xi(T)$ расходится, в то время как размер пары ξ_0 (он же масштаб пространственной дисперсии) при этом остается конечным.

В заключение покажем, как производить подобные расчеты с помощью матричной функции Грина

$$\widehat{G} = \begin{bmatrix} G_{\uparrow\uparrow} & F_{\uparrow\downarrow} \\ F_{\downarrow\uparrow} & G_{\downarrow\downarrow} \end{bmatrix}. \tag{10.164}$$

Она удовлетворяет такому уравнению:

$$(i\omega - \xi(\mathbf{p})\tau_z - \Delta_1\tau_x - \Delta_2\tau_y)\ \widehat{G} = \widehat{1} \tag{10.165}$$

$(\Delta = \Delta_1 + i\Delta_2)$. Оператор тока равен

$$\widehat{\mathbf{j}} = c\,\frac{\delta \widehat{G}^{-1}}{\delta \mathbf{A}} = e\mathbf{v}(\mathbf{p})\,\widehat{1} - \frac{e^2}{mc}\,\mathbf{A}\tau_z\,. \tag{10.166}$$

Сама $\widehat{G}$ равна

$$\widehat{G} = -\frac{1}{\omega_n^2 + \xi^2 + \Delta^2}\begin{pmatrix} i\omega_n + \xi & \Delta \\ \Delta^* & i\omega_n - \xi \end{pmatrix}. \tag{10.167}$$

Вычисляя

$$\begin{aligned} &\mathrm{Tr}\left(\widehat{j}_\alpha\,\widehat{G}(i\omega_n, \mathbf{p})\,\widehat{j}_\beta\,\widehat{G}(i\omega_n, \mathbf{p})\right) = \\ &= \frac{e^2\, v_\alpha(\mathbf{p})\, v_\beta(\mathbf{p})}{(\omega_n^2 + \xi^2 + \Delta^2)^2}\ \mathrm{Tr}\Big((i\omega_n + \xi\tau_z + \Delta\tau_x)\,(i\omega_n + \xi\tau_z + \Delta\tau_x)\Big) = \\ &= 2e^2\, v_\alpha(\mathbf{p})\, v_\beta(\mathbf{p})\,\frac{\Delta^2 + \xi^2 - \omega_n^2}{(\omega_n^2 + \xi^2 + \Delta^2)^2}\,, \end{aligned} \tag{10.168}$$

получим то же выражение, что и ранее (см. (10.156)).

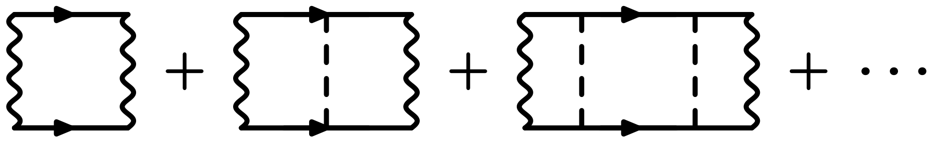


Рис. 10.13

64. Для того чтобы изучить влияние примесей на T_c, рассмотрим диаграммы, образующие один блок куперовской лестницы, и усредним их по беспорядку (рис. 10.13). Полученные в результате усреднения диаграммы имеют ту же структуру, что и диаграммы на рис. 10.8. Отличие состоит в том, что каждый блок теперь содержит примесную лестницу, описывающую рассеяние куперовской пары на примесях. Поэтому

$$\Gamma^C = -\frac{\lambda}{1 + \lambda \Pi_c}, \tag{10.169}$$

где Π_c — сумма лестничных диаграмм (рис. 10.14).

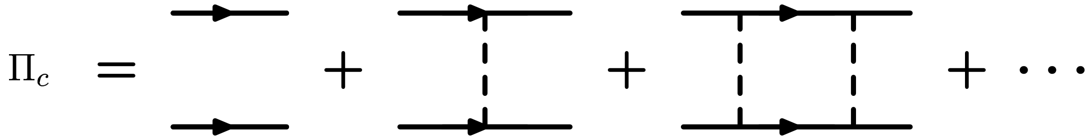


Рис. 10.14

По сути дела, такая сумма уже была вычислена нами в задаче 54. Напомним, что усредненная по беспорядку функция Грина в грязном металле равна

$$G(i\omega_n, \mathbf{p}) = \frac{1}{i\omega_n - \xi_p + \dfrac{1}{2\tau}\operatorname{sign}\omega_n}. \tag{10.170}$$

Каждая ступенька примесной лестницы, состоящая из двух функций Грина, взятая при $\Omega = 0$, $\mathbf{s} = 0$, есть

$$B_c(i\omega_n) = \int G(i\omega_n, \mathbf{p})\, G(-i\omega_n, -\mathbf{p})\, \frac{d^3p}{(2\pi)^3} = \tag{10.171}$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu_0\, d\xi}{\left(\omega_n + \dfrac{1}{2\tau}\operatorname{sign}\omega_n\right)^2 + \xi^2} = \frac{2\pi\nu_0\tau}{1 + 2\tau|\omega_n|}.$$

Суммировать B_c по ω_n не следует, поскольку столкновения с примесями — упругие.

Теперь вычислим всю примесную лестницу. При этом полезно вспомнить, что примесная штриховая линия равна $nu_0^2 = (2\pi\nu_0\tau)^{-1}$ (см. гл. 9). Суммируя геометрическую прогрессию, получаем

$$L(i\omega_n) = B_c(i\omega_n) + \frac{1}{2\pi\nu_0\tau} B_c^2(i\omega_n) + \ldots =$$

$$= \frac{B_c(i\omega_n)}{1 - B_c(i\omega_n)/(2\pi\nu_0\tau)} = \frac{\pi\nu_0}{|\omega_n|}\,. \qquad (10.172)$$

Как мы видим, τ полностью исчезло из этой формулы. Отметим, что выпадение τ из ответа формально обязано тому же сокращению, которое обеспечивает сохранение числа частиц при вычислении коррелятора плотность–плотность в ферми газе с примесями:

$$\langle n(\omega,\,\mathbf{q})n(-\omega,\,-\mathbf{q})\rangle_{\mathbf{q}=0} = \pi\nu_0/(i\omega) \qquad (10.173)$$

(см. задачу 52). Находим куперовскую петлю:

$$\Pi_c = -T\sum_{\omega_n} L(i\omega_n) = -2\pi\nu_0 T\sum_{\omega_n>0}\frac{1}{|\omega_n|} = -\nu_0\ln\frac{2\gamma\omega_D}{\pi T}\,. \qquad (10.174)$$

Поэтому

$$T_c = \frac{2\gamma}{\pi}\,\omega_D e^{-1/\lambda\nu_0}\,, \qquad (10.175)$$

как и в отсутствие примесей.

65 а. Начнем с усреднения функций Грина сверхпроводника по примесям. Для этого мы вычислим матричную собственно-энергетическую часть (рис. 10.15).

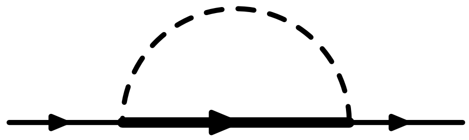


Рис. 10.15

При этом матричное выражение для примесной линии таково:

$$nu_0^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi\nu_0\tau}\,\hat{1} \qquad (10.176)$$

(примеси одинаково хорошо рассеивают как электроны, бегущие вперед, так и бегущие назад, и при этом не переводят одно из спаривающихся состояний в другое, поскольку у них разный спин). Вычисляем собственно-энергетическую часть в первом порядке по концентрации примесей, следуя методу задачи 50:

$$\hat{\Sigma}(i\omega_n) = \frac{1}{2\pi\nu_0\tau}\int \hat{G}(i\omega_n,\mathbf{p})\,\frac{d^3p}{(2\pi)^3} = -\frac{1}{2\pi\nu_0\tau}\int\frac{i\omega_n\hat{1} + \xi_{\mathbf{p}}\hat{\tau}_z - \Delta\hat{\tau}_x}{\omega_n^2 + \Delta^2 + \xi_{\mathbf{p}}^2}\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,. \qquad (10.177)$$

Интегрируя по ξ, получаем

$$\hat{\Sigma}(i\omega_n) = -\frac{1}{2\tau}\frac{i\omega_n\,\hat{1} + \Delta\hat{\tau}_x}{\sqrt{\omega_n^2 + \Delta^2}}\,. \qquad (10.178)$$

Таким образом,

$$\hat{G}^{-1} = \hat{G}_0^{-1} - \hat{\Sigma} = i\tilde{\omega}_n\hat{1} - \xi\hat{\tau}_z - \tilde{\Delta}\hat{\tau}_x\,, \qquad (10.179)$$

где

$$\tilde{\omega}_n = \omega_n \left(1 + \frac{1}{2\tau\sqrt{\omega_n^2 + \Delta^2}}\right), \quad \tilde{\Delta} = \Delta\left(1 + \frac{1}{2\tau\sqrt{\omega_n^2 + \Delta^2}}\right) \tag{10.180}$$

Обратим внимание, что

$$\tilde{\omega}_n/\tilde{\Delta} \,=\, \omega_n/\Delta\,. \tag{10.181}$$

Как мы убедимся в дальнейшем, это свойство очень важно.

При вычислении $\widehat{\Sigma}$ мы использовали затравочные функции Грина G и F. Что произойдет, если теперь подставить исправленные функции Грина в выражение для $\widehat{\Sigma}$? Оказывается, $\widehat{\Sigma}$ при этом не изменится. Это легко видно из (10.178), поскольку при изменении в этом выражении ω_n и Δ в одно и то же число раз величина $\widehat{\Sigma}$ не меняется. Поэтому полученный нами ответ автоматически оказался решением интегрального уравнения для $\widehat{\Sigma}$, точно так же, как и для нормального металла (см. задачу 50).

В принципе, щель в грязном сверхпроводнике следует определять заново, решая уравнение самосогласования (10.38), принимающее вид

$$\Delta = \lambda T \sum_{\omega_n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu_0\, d\xi\, \tilde{\Delta}}{\tilde{\omega}_n^2 + \tilde{\Delta}^2 + \xi^2}\,. \tag{10.182}$$

Интегрируя по ξ, приходим к уравнению

$$\Delta = \pi\lambda\nu_0 T \sum_{\omega_n} \frac{\tilde{\Delta}}{\sqrt{\tilde{\omega}_n^2 + \tilde{\Delta}^2}} = \pi\lambda\nu_0 T \sum_{\omega_n} \frac{\Delta}{\sqrt{\omega_n^2 + \Delta^2}}\,, \tag{10.183}$$

не содержащему концентрации примесей. (Во втором равенстве мы использовали (10.181).) Таким образом, примеси не влияют не только на T_c, но и на термодинамику сверхпроводника вообще. Так происходит потому, что для термодинамических свойств существенна лишь полная плотность состояний (или, грубо говоря, сколько длин волн укладывается на каждой квазичастичной траектории) и совершенно не важно, как эти состояния устроены (т. е. по каким конкретно траекториям движутся квазичастицы, по прямым, или по ломаным, рассеиваясь на примесях).

65 б. Теперь рассмотрим отклик сверхтекучего тока на внешнее магнитное поле. В отличие от T_c, эта величина гораздо более чувствительна к форме траекторий и сильно изменяется даже при малых концентрациях примесей. (Достаточно, чтобы длина свободного пробега стала меньше, чем размер куперовской пары ξ_0.) Определим сверхтекучую плотность. Как и в задаче 51, для вычисления отклика достаточно провести вычисления с усредненными по примесям функциями Грина, потому что диаграмма с примесной линией, соединяющей разные функции Грина, равна нулю (из-за того, что вершина взаимодействия с электромагнитным полем векторная). Усредненные же функции Грина отличаются от затравочных лишь заменой $\omega_n \to \tilde{\omega}_n$, $\Delta \to \tilde{\Delta}$. Поэтому можно сразу написать формулу для n_s по аналогии с задачей 50:

$$\frac{n - n_s}{n} = T \sum_{\omega_n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi^2 + \tilde{\Delta} - \tilde{\omega}_n^2}{\left(\xi^2 + \tilde{\Delta} + \tilde{\omega}_n^2\right)^2}\, d\xi\,. \tag{10.184}$$

Как и ранее, вычтем из этого выражения его значение при $\Delta = 0$, $\tau = \infty$, чтобы исключить вклад ферми-моря. Интегрирование по ξ дает:

$$\frac{n_s}{n} = \pi T \sum_{\omega_n} \frac{\tilde{\Delta}^2}{\left(\tilde{\omega}^2 + \tilde{\Delta}^2\right)^{3/2}} \,. \tag{10.185}$$

Итак,

$$\frac{n_s}{n} = \pi T \sum_{\omega_n} \frac{\Delta^2}{\left(\omega_n^2 + \Delta^2\right)^{3/2} \left(1 + \dfrac{1}{2\tau\sqrt{\omega_n^2 + \Delta^2}}\right)} \,. \tag{10.186}$$

При малой концентрации примесей, когда $\tau\Delta_0 \gg 1$, это выражение воспроизводит результат задачи 63, а в противоположном «грязном» пределе $\tau\Delta_0 \ll 1$ дает следующее:

$$\frac{n_s}{n} = 2\pi\tau T \sum_{\omega_n} \frac{\Delta^2}{\left(\omega_n^2 + \Delta^2\right)^2} = \pi\tau\Delta \,\mathrm{th}\, \frac{\Delta}{2T} \,. \tag{10.187}$$

Интересно, что в грязном сверхпроводнике даже при $T \to 0$ сверхтекучая плотность много меньше полной:

$$\frac{n_s(T \to 0)}{n} = \pi\tau\Delta_0 \ll 1 \,. \tag{10.188}$$

Это связано с нарушением трансляционной инвариантности и «торможением» электронов примесями.

Подставляя n_s в формулу для глубины проникновения δ_Λ, получаем

$$\delta_\Lambda = \frac{1}{2\pi} \sqrt{mc^2 / \left[e^2 n\, \Delta\, \tau \;\mathrm{th}(\Delta/2T)\right]} \,. \tag{10.189}$$

66. Вначале найдем усредненную по парамагнитным примесям функцию Грина. Для того чтобы ее вычислить, мы используем модифицированную крестовую технику. Введем четырехкомпонентные функции Грина

$$\widehat{G} = - \begin{pmatrix} \langle \mathrm{T}_\tau \, \psi_\alpha^+(\mathbf{r}, \tau) \psi_\beta(0,0) \rangle & \langle \mathrm{T}_\tau \, \psi_\alpha(\mathbf{r}, \tau) \psi_\beta(0,0) \rangle \\ \langle \mathrm{T}_\tau \, \psi_\alpha^+(\mathbf{r}, \tau) \psi_\beta^+(0,0) \rangle & \langle \mathrm{T}_\tau \, \psi_\alpha(\mathbf{r}, \tau) \widehat{\psi}_\beta^+(0,0) \rangle \end{pmatrix} \tag{10.190}$$

(α и β – спиновые индексы). При этом функция Грина в отсутствие примесей равна

$$\widehat{G}_0 = - \frac{1}{\omega_n^2 + \xi^2 + \Delta^2} \begin{pmatrix} (i\omega_n + \xi)\delta_{\alpha\beta} & -\Delta_{\alpha\beta} \\ -\Delta_{\alpha\beta}^+ & (i\omega_n - \xi)\delta_{\alpha\beta} \end{pmatrix} , \tag{10.191}$$

а $\Delta_{\alpha\beta} = i\Delta\sigma_{\alpha\beta}^y$ ($\sigma_{\alpha\beta}^i$ – спиновые матрицы Паули). Как и в предыдущей задаче, найдем собственно-энергетическую часть из диаграммы, показанной на рис. 10.16.

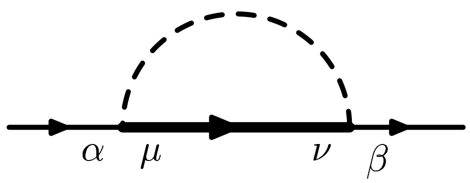


Рис. 10.16

В случае парамагнитных примесей штриховая линия имеет нетривиальную спиновую структуру. Ее можно найти, вычислив коррелятор флуктуаций примесного потенциала:

$$\left\langle \sum_a J\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a)\sigma^i_{\alpha\beta}S^a_i \sum_b J\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_b)\sigma^k_{\mu\nu}S^b_k \right\rangle = n_{\text{маг}}J^2\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\langle S^iS^k\rangle\sigma^i_{\alpha\beta}\sigma^k_{\mu\nu} = \\ = \frac{S(S+1)}{3}n_{\text{маг}}J^2\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\sigma^i_{\alpha\beta}\sigma^i_{\mu\nu}\,. \tag{10.192}$$

Стоящее здесь скалярное произведение матриц Паули можно преобразовать, используя тождество Фирца (см. [9], § 28):

$$\sigma^i_{\alpha\beta}\sigma^i_{\mu\nu} = 2\delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu} - \delta_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu}\,. \tag{10.193}$$

Таким образом,

$$\widehat{\Sigma}_{\alpha\beta}(i\omega_n) = -\frac{n_{\text{маг}}}{3}J^2S(S+1)\left(2\delta_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu} - \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu}\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widehat{G}_{\mu\nu}(i\omega_n,\,\xi)\,\nu_0\,d\xi\,. \tag{10.194}$$

Подставим вначале в этот интеграл $\widehat{G}_0$. Интегрирование производится довольно просто, и мы находим

$$\widehat{\Sigma}_{\alpha\beta}(i\omega_n) = -\frac{1}{2\pi\tau_s}\frac{i\omega_n\widehat{1} - 2\delta_{\alpha\beta}\Delta_{\mu\nu}\delta_{\mu\nu}\widehat{\tau}_x + \Delta_{\alpha\beta}\widehat{\tau}_x}{\sqrt{\omega_n^2+\Delta^2}}\,, \tag{10.195}$$

где

$$\tau_s = \frac{3}{\pi\nu_0 n_{\text{маг}}J^2S(S+1)} \tag{10.196}$$

— время релаксации спина на примесях. Поскольку $\Delta_{\mu\nu}\delta_{\mu\nu} = 0$, то мы получаем таким образом, что $\widehat{G}^{-1} = \widehat{G}_0^{-1} - \widehat{\Sigma}$ отличается от $\widehat{G}_0$ заменой ω_n и Δ на

$$\tilde{\omega}_n = \omega_n\left(1 + \frac{1}{2\tau_s\sqrt{\omega_n^2+\Delta^2}}\right)\,, \quad \tilde{\Delta} = \Delta\left(1 - \frac{1}{2\tau_s\sqrt{\omega_n^2+\Delta^2}}\right)\,. \tag{10.197}$$

Однако заметим, что теперь, в отличие от задачи 64,

$$\tilde{\omega}/\tilde{\Delta} \neq \omega/\Delta\,. \tag{10.198}$$

Поэтому если теперь подставить $\widehat{G}$ в (10.194), то получится другое значение $\widehat{\Sigma}$. Попробуем решить задачу самосогласованно, подставляя в (10.194) $\widehat{G}$ с неизвестными $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\Delta}$. Тогда

$$\widehat{\Sigma}_{\alpha\beta}(i\omega_n) = -\frac{1}{2\pi\tau_s}\frac{i\tilde{\omega}_n\widehat{1} - \tilde{\Delta}_{\alpha\beta}\widehat{\tau}_x}{\sqrt{\tilde{\omega}_n^2+\tilde{\Delta}^2}}\,. \tag{10.199}$$

Уравнение Дайсона приводит к следующим условиям самосогласования для величин $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\Delta}$:

$$\tilde{\omega} = \omega + \frac{\tilde{\omega}}{2\tau_s\sqrt{\tilde{\omega}^2 + \tilde{\Delta}^2}}\,, \tag{10.200}$$

$$\tilde{\Delta} = \Delta - \frac{\tilde{\Delta}}{2\tau_s\sqrt{\tilde{\omega}^2 + \tilde{\Delta}^2}}\,. \tag{10.201}$$

Теперь запишем уравнение Горькова (10.38) определяющее щель:

$$\begin{aligned} \Delta &= \lambda T \sum_{\omega_n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \nu_0\, d\xi\, F(i\omega_n,\, \xi) = \\ &= \lambda T \sum_{\omega_n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\Delta}\,\nu_0\, d\xi}{\tilde{\omega}_n^2 + \tilde{\Delta}^2 + \xi^2} = \pi\lambda\nu_0 T \sum_{\omega_n} \frac{\tilde{\Delta}}{\sqrt{\tilde{\omega}_n^2 + \tilde{\Delta}^2}}\,. \end{aligned} \tag{10.202}$$

Из-за того, что $\tilde{\omega}/\tilde{\Delta} \neq \omega/\Delta$, это уравнение отличается от уравнения для чистого сверхпроводника.

Выведем отсюда уравнение, определяющее температуру перехода сверхпроводника с парамагнитными примесями T_c^*. Полагая $\Delta \to 0$, решим уравнения (10.200), (10.201):

$$\tilde{\omega} = \omega + \frac{1}{2\tau_s}\operatorname{sign}\omega\,, \quad \tilde{\Delta}\left(1 + \frac{1}{2\tau_s|\tilde{\omega}|}\right) = \Delta\,. \tag{10.203}$$

Тогда уравнение на T_c^* выглядит так:

$$\begin{aligned} 1 &= 2\pi\lambda\nu_0 T_c^* \sum_{\omega_n>0} \frac{\tilde{\Delta}}{\Delta\tilde{\omega}_n} = 2\pi\lambda\nu_0 T_c^* \sum_{\omega_n>0} \frac{1}{\tilde{\omega}_n + 1/2\tau_s} = \\ &= 2\pi\lambda\nu_0 T_c^* \sum_{\omega_n>0} \frac{1}{\omega_n + 1/\tau_s}\,. \end{aligned} \tag{10.204}$$

Остановимся на физическом смысле этой формулы. При рассеянии на парамагнитной примеси спин электрона может перевернуться, и τ_s есть среднее время между двумя переворотами спина, т. е. время жизни куперовской пары. Знаменатель в (10.204) описывает развал куперовских пар из-за рассеяния на магнитных примесях и уменьшение эффективного времени взаимодействия.

Если τ_s велико по сравнению с $\hbar/T_c^*$, то парамагнитные примеси лишь слегка сдвигают T_c. Но при $\tau_s \approx \hbar/T_c^*$ сверхпроводимость полностью подавляется. Найдем критическое τ_s^*, полагая $T_c^* = 0$ и заменяя сумму на интеграл:

$$\frac{1}{\lambda\nu_0} = \ln\frac{2\gamma\omega_D}{\pi T_c} = \int\limits_0^{\omega_D} \frac{d\omega}{\omega + 1/\tau_s^*} = \ln(\omega_D\tau_s^*)\,, \tag{10.205}$$

откуда

$$\tau_s^* = 2\gamma\hbar/(\pi T_c)\,. \tag{10.206}$$

Таким образом, парамагнитные примеси даже в малых концентрациях могут существенно повлиять на свойства сверхпроводника и даже полностью подавить сверхпроводимость. При этом оказывается, что в определенном интервале по концентрации примесей существует режим так называемой бесщелевой сверхпроводимости, в котором сопротивление металла равно нулю, но энергетическая щель отсутствует. Так получается из-за того, что примеси меняют энергию связи электронов в паре по-разному в разных частях образца. Читатель, интересующийся этим эффектом, может обратиться к оригинальной работе [8].

67. Как и в задаче 64, мы вначале найдем куперовскую примесную лестницу, а затем подставим ее в уравнение самосогласования. Вычисление примесной лестницы во внешнем магнитном поле в общем случае довольно сложно. Однако если поле медленно меняется на длине свободного пробега, эта задача сильно упрощается. Заметим, что две ступеньки примесной лестницы находятся друг от друга на расстоянии порядка l в координатном пространстве. Это позволяет пренебречь изменением поля на одной ступеньке и рассмотреть ступеньку в постоянном поле. Изменение поля мы учтем, переходя к суммированию ступенек, каждая из которых чувствует магнитное поле на своем отрезке траектории.

Поскольку нас интересуют неоднородные решения уравнения самосогласования, мы вначале вычислим примесную лестницу при ненулевом суммарном импульсе $\mathbf{s}$ в нулевом магнитном поле. Это можно сделать так же, как и в задаче 54. Одна ступенька лестницы вычисляется так же как и раньше:

$$B_c = \int\int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{\nu_0\, d\xi}{\left(i\omega - \xi + \dfrac{i}{2\tau}\operatorname{sign}\omega\right)\left(-i\omega - \xi + \mathbf{sv} - \dfrac{i}{2\tau}\operatorname{sign}\omega\right)} =$$

$$= \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{2\pi\nu_0\tau}{1 + 2|\omega|\tau + i\tau\mathbf{sv}} = \frac{2\pi\nu_0\tau}{1 + 2|\omega|\tau + \tau D\mathbf{s}^2} \qquad (10.207)$$

(D — коэффициент диффузии). Суммируя лестницу, получаем

$$C_\omega(\mathbf{s}) = \frac{B_c}{1 - B_c/2\pi\nu_0\tau} = \frac{2\pi\nu_0}{2|\omega| + D\mathbf{s}^2}\,. \qquad (10.208)$$

Теперь попробуем учесть магнитное поле. Пусть сначала его векторный потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ постоянен. Тогда его учет сведется к сдвигу импульсов $\mathbf{p} \to \mathbf{p} - e\mathbf{A}/c$ в функциях Грина. Поэтому в примесной лестнице $\mathbf{s}$ заменится на $\mathbf{s} - 2e\mathbf{A}/c$. Следовательно,

$$\widehat{C}_\omega = \frac{2\pi\nu_0}{2|\omega| + D\left(\mathbf{s} - \dfrac{2e}{c}\mathbf{A}\right)^2}\,. \qquad (10.209)$$

Удобно записать это выражение в координатном представлении. Будем считать $C_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ функцией начальной и конечной точек. Заменяя $\mathbf{s}$ на $-i\nabla_{\mathbf{r}}$, перепишем вы-

[8] А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, ЖЭТФ, т. 39, с. 178 (1960)

ражение для куперона в форме дифференциального уравнения:

$$\left[2|\omega| + D\left(-i\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\right)^2\right] C_\omega(\mathbf{r},\, \mathbf{r}') = 2\pi\nu_0\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,. \tag{10.210}$$

Что изменится, если $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ — медленно меняющаяся функция? Если мы намерены учитывать лишь первые два порядка по $\mathbf{A}$ в знаменателе (10.209), то легко понять, что все возможные усложнения связаны с появлением членов, зависящих от $\operatorname{div}\mathbf{A}$, поскольку это единственная вращательно инвариантная комбинация из производных $\mathbf{A}$. (Иными словами, если $\mathbf{A}$ становится функцией $\mathbf{r}$, возникает вопрос о порядке операторов $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ и ∇ в кdevупероне.) Но выбирая калибровку, в которой $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$, мы всегда можем добиться исчезновения подобных поправок. Поэтому для того, чтобы вычислить примесную лестницу, достаточно решить уравнение

$$\left[2|\omega| + D\left(-i\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \frac{2e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r})\right)^2\right] C_\omega(\mathbf{r},\, \mathbf{r}') = 2\pi\nu_0\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,. \tag{10.211}$$

Это уравнение можно вывести и напрямую. Для этого надо рассмотреть такие поправки к одной «ступеньке»примесной лестницы (рис. 10.17). (Волнистые линии на этом рисунке изображают взаимодействие с внешним магнитным полем.) После этого суммирование лестницы дает уравнение (10.211).

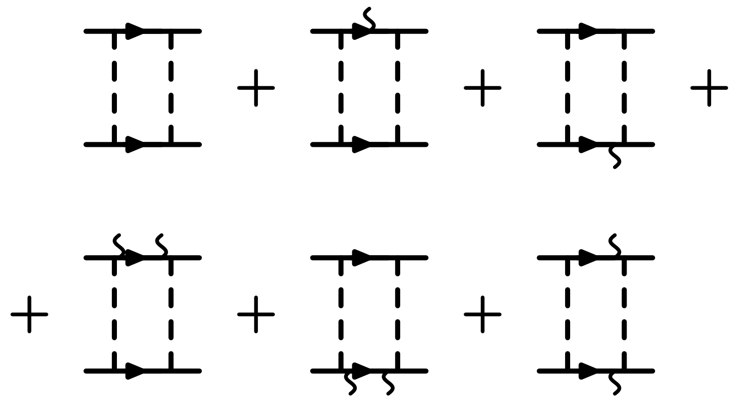


Рис. 10.17

Теперь запишем уравнение самосогласования, полагая $\Delta \to 0$. Вблизи H_{c2} состояние неоднородно, поэтому Δ зависит от $\mathbf{r}$. Уравнение Горькова имеет вид

$$\Delta(\mathbf{r}) = \lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega,\, \mathbf{r},\, \mathbf{r})\,\frac{d\omega}{2\pi}\,. \tag{10.212}$$

Аномальная гриновская функция $F(\omega,\, \mathbf{r},\, \mathbf{r})$ дается при $\Delta \to 0$ единственной диаграммой (рис. 10.18).

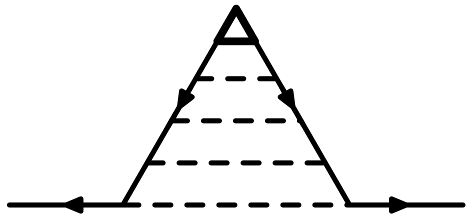


Рис. 10.18

Сравнивая рис. 10.18 с диаграммами для (куперонной) примесной лестницы, находим

$$F(\omega,\,\mathbf{r},\,\mathbf{r}) = \int \Delta(\mathbf{r}')\,C_\omega(\mathbf{r},\,\mathbf{r}')\,d^3r'\,. \tag{10.213}$$

Поэтому уравнение самосогласования записывается так:

$$\Delta(\mathbf{r}) = \lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int C_\omega(\mathbf{r},\,\mathbf{r}')\,\Delta(\mathbf{r}')\,d^3r'\,. \tag{10.214}$$

Чтобы найти его решение, удобно разложить $\Delta(\mathbf{r})$ по нормированным собственным функциям $\varphi_n(\mathbf{r})$ оператора в левой части (10.211). Эти функции обладают такими свойствами:

$$D\left(-i\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} - \frac{2e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r})\right)^2 \varphi_n(\mathbf{r}) = \mu_n\varphi_n(\mathbf{r})\,, \tag{10.215}$$

$$\int \varphi_n(\mathbf{r})\,\varphi_m^*(\mathbf{r})\,d^3r = \delta_{nm} \tag{10.216}$$

(μ_n — n-е собственное значение). Запишем $\Delta(\mathbf{r})$ в виде

$$\Delta(\mathbf{r}) = \sum_n \Delta_n\,\varphi_n(\mathbf{r})\,. \tag{10.217}$$

Куперон $C_\omega(\mathbf{r},\,\mathbf{r}')$ можно выразить через собственные функции $\varphi_n(\mathbf{r})$ следующим образом:

$$C_\omega(\mathbf{r},\,\mathbf{r}') = 2\pi\nu_0 \sum_n \frac{\varphi_n(\mathbf{r})\,\varphi_n^*(\mathbf{r}')}{2|\omega| + \mu_n}\,. \tag{10.218}$$

Это соотношение легко проверить, заметив, что эта функция в силу (10.215) удовлетворяет уравнению при $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$, а при $\mathbf{r} \to \mathbf{r}'$ левая часть уравнения совпадает с δ-функцией, поскольку интеграл от нее по $\mathbf{r}$ равен 1 в силу (10.216).

Тогда уравнение (10.214) перепишется так:

$$\Delta_n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi\nu_0\,\lambda\,\Delta_n}{2|\omega| + \mu_n}\,\frac{d\omega}{2\pi}\,. \tag{10.219}$$

Оно имеет нетривиальное решение при

$$\frac{1}{\nu_0\lambda} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2|\omega| + \mu_n}\,. \tag{10.220}$$

Интеграл следует обрезать сверху при $\omega = \omega_D$, как и ранее. В результате

$$\frac{1}{\nu_0\lambda} = \ln\frac{2\omega_D}{\mu_n}\,. \tag{10.221}$$

Найдем собственные значения μ_n. Для этого нужно решить уравнение (10.215). Выберем калибровку $A_y = -Hx$. Тогда можно заметить, что уравнение (10.215) совпадает с уравнением Шредингера для частицы с массой $m = (2D)^{-1}$, зарядом $q = 2e$ и энергией μ_n в магнитном поле H. Из квантовой механики известно, что в этом случае собственные знвчения таковы:

$$E_n = \omega_H\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}\ ; \quad \omega_H = \frac{qH}{mc}\,. \tag{10.222}$$

Это означает, что

$$\mu_n = \frac{4DeH}{c}\left(n + \frac{1}{2}\right) + Dk_z^2\,. \tag{10.223}$$

Поскольку собственные значения растут с ростом H, критическое магнитное поле определяется наименьшим собственным значением. Оно равно $\mu_0 = 2DeH/c$. Таким образом,

$$\frac{1}{\nu_0\lambda} = \ln\frac{\omega_D c}{DeH_{c2}}\,. \tag{10.224}$$

Выражая λ через T_c с помощью (10.73), получаем окончательно

$$H_{c2} = \frac{\pi}{2\gamma}\frac{T_c c}{De} = \frac{\pi}{\gamma}\frac{T_c}{\hbar D}\Phi_0\ , \tag{10.225}$$

где $\Phi_0 = \hbar c/2e$ — квант потока.

Заметим, что собственные функции, отвечающие минимальному собственному значению, локализованы:

$$\varphi_{n,k_y}(x,y,z) = \frac{1}{\pi^{1/4} l_H^{1/2}}\, e^{ik_y y}\, e^{-(x-x_0)^2/2l_H^2}\ , \tag{10.226}$$

где

$$l_H = \sqrt{\hbar c/(qH)}\,, \quad x_0 = ck_y/(qH)\,, \quad q = 2e\,. \tag{10.227}$$

Таким образом, сверхпроводимость возникает в «нитях»толщины l_H. При понижении поля концентрация нитей быстро возрастает, пока они не заполнят собой весь объем.

В каких случаях переход от сверхпроводимости к нормальному металлу в магнитном поле устроен так, как описано в решении? Чтобы ответить на этот вопрос, надо сравнить магнитные поля, соответствующие различным сценариям разрушения сверхпроводимости. Мы вычислили магнитное поле, соответствующее разрушению сверхпроводимости неоднородным образом. Оценим поле, соответствующее разрушению сверхпроводимости сразу во всем объеме. Для этого надо сравнить энергию магнитного поля в объеме сверхпроводника с энергией конденсации. Энергия магнитного поля на единицу объема есть

$$E_{\text{маг}} = H^2/8\pi\,. \tag{10.228}$$

Энергию конденсации легко оценить, считая, что частицы в интервале энергий Δ за счет конденсации понижают свою энергию на Δ. Число таких частиц в единице объема есть $\nu_0\Delta$, поэтому энергия конденсации равна

$$E_c \approx \nu_0\Delta^2 \approx \nu_0 T_c^2\,. \tag{10.229}$$

Таким образом, магнитное поле, соответствующее однородному разрушению сверхпроводимости (*термодинамическое критическое поле*), есть

$$H_c \approx T_c\sqrt{\nu_0}\,. \tag{10.230}$$

Сравним его с H_{c2}:

$$\frac{H_c}{H_{c2}} \approx \nu_0^{1/2}\frac{\hbar D}{\Phi_0} = \nu_0^{1/2}\frac{eD}{c} \approx \left(\frac{m\nu_0}{n_s}\right)^{1/2}\frac{D}{\delta_\Lambda} \approx \frac{l}{\delta_\Lambda}\,, \tag{10.231}$$

где δ_Λ — лондоновская глубина проникновения в чистом сверхпроводнике, определенная в (10.162). Таким образом, $H_{c2} \gg H_c$ при $l \ll \delta_\Lambda$. В этом случае H_{c2} действительно определяет границу сверхпроводящей фазы. Если же $H_{c2} < H_c$, что имеет место при $\delta_\Lambda < l$, то переход происходит однородно по всему объему при поле H_c. В этом случае при $H = H_{c2} < H_c$ система уже находится в сверхпроводящем состоянии и ничего особенного с ней не происходит.

Глава 11.

Измерение функций Грина

Одночастичные и двухчастичные функции Грина представляют собой корреляционные функции операторов $\widehat{\psi}$ и $\widehat{\psi}^+$ (см. гл. 4). Физические характеристики, такие, как теплоемкость, проводимость, и др., в принципе всегда можно выразить через гриновские функции. Однако эта связь довольно часто оказывается весьма сложной и «односторонней», поскольку она вообще говоря не позволяет восстановить функции Грина по экспериментальным данным. (Например, термодинамические величины даются интегралами от выражений, содержащих функции Грина, — см. задачи 35, 36, 49, 60.) Поэтому представляет интерес обсудить методы, позволяющие напрямую «измерять» функции Грина и получать информацию о свойствах систем взаимодействующих частиц, которую можно легко интерпретировать теоретически.

11.1. Туннелирование

Рассмотрим сначала вопрос об измерении одночастичной функции Грина

$$G(x,x') = -i\left\langle \mathrm{T}\,\psi(x)\psi^+(x')\right\rangle . \qquad (11.1)$$

Для определенности будем говорить о гриновской функции электрона в металле. На первый взгляд, эксперимент, в котором корреляционная функция $G(x,x')$ определялась бы напрямую, кажется невозможным. Ведь пропорциональное $\widehat{\psi}^+$ или $\widehat{\psi}$ поле к системе приложить невозможно (для этого нужно было бы создать электрон «из ничего»), и поэтому корреляционная функция $G(x,x')$ не может быть связана ни с какой функцией отклика. Можно, однако, рассмотреть ситуацию, когда происходит перенос электронов из одного металла (который мы будем называть «пробником») в другой (исследуемый образец). Если перенос заряда происходит мгновенно, то его можно описывать как уничтожение электрона в пробнике и рождение его в образце. Вероятность этого процесса оказывается связанной с функциями Грина исследуемого образца и пробника. Если свойства пробника известны и достаточно просты, то можно считать, что в таком эксперименте «измеряется» функция Грина электрона в образце.

Для того, чтобы реализовать эту идею, нужно создать такую связь между пробником и образцом, чтобы переносимый электрон в каждый момент времени был или на пробнике, или на образце. (Иначе говоря, заряды пробника и образца должны быть хорошими квантовыми числами.) Это означает, что связь пробника с образцом должна быть слабой, и поэтому обычный омический контакт между двумя металлами не годится. Слабую связь можно получить, используя туннельный эффект. Рассмотрим так называемый *туннельный контакт* — два металла, разделенных потенциальным барьером, так что область между металлами оказывается классически запрещенной (см. рис. 11.1). На практике в качестве потенциального барьера обычно используется тонкий слой диэлектрика, например, окисла, образующегося на поверхности металла. На рис. 11.2 показано заполнение энергетических уровней по обе стороны контакта и распределение потенциала в случае, когда к контакту приложено постоянное напряжение V.

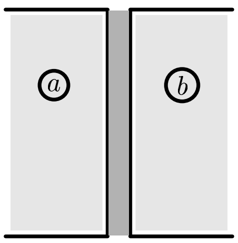


Рис. 11.1

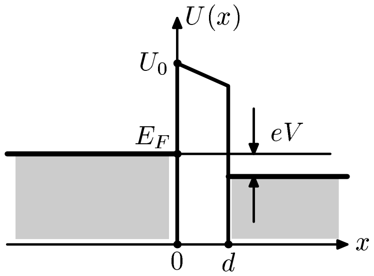


Рис. 11.2

Электроны могут туннелировать из одного металла в другой, причем прозрачность туннельного барьера, согласно формуле ВКБ, является экспоненциальной функцией

$$W \approx e^{-\mathcal{A}}, \quad \mathcal{A} = \sqrt{2mU_0}\,d/\hbar\,, \tag{11.2}$$

где U_0 — высота потенциального барьера, а d — его толщина. Если прозрачность W мала, то такой туннельный контакт обеспечивает слабую связь между двумя металлами.

В равновесии вероятности перехода электронов справа налево и слева направо равны, и ток через контакт отсутствует. Однако если к туннельному контакту приложить разность потенциалов, выводящую систему из равновесия, через контакт потечет ток, измеряя который можно определить вероятность туннелирования и, как следствие, функцию Грина.

Перейдем к количественному описанию туннелирования. Поскольку вероятность прохождения через высокий барьер экспоненциально мала, то можно вначале рассмотреть задачу, пренебрегая туннельными эффектами, а затем учесть их по теории возмущений. Пусть $\psi_{a(b)}(\mathbf{r})$ — оператор рождения электрона соответственно на пробнике или на образце в отсутствие туннелирования. Рассматривая туннелирование как мгновенный перенос заряда, можно записать гамильтониан для туннелирования следующим образом:

$$\widehat{H}_T = \int\limits_{x<0}\int\limits_{x'>d} \Big(T(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,\psi_a^+(\mathbf{r}')\psi_b(\mathbf{r}) + \mathrm{h.c.}\Big)\; d^3\mathbf{r}'\,d^3\mathbf{r} \tag{11.3}$$

Интегрирование по $\mathbf{r}$ в этой формуле производится по левому берегу, а интегрирование по $\mathbf{r}'$ — по правому. Туннельный гамильтониан вида (11.3) можно вывести [1] в пределе бесконечно тонкого и очень высокого барьера. При этом выражение (11.3) обычно используется и в более общем случае как наиболее простая формула, правильно отражающая физику в пределе малой амплитуды туннелирования $T(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$.

Перейдем в представление собственных состояний $\psi_{a,\mathbf{p}}$, $\psi_{b,\mathbf{p}'}$:

$$\psi_a(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{p}} \psi_{a,\mathbf{p}}(\mathbf{r})\, \widehat{a}_{\mathbf{p}}\,, \quad \psi_b(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{p}'} \psi_{b,\mathbf{p}'}(\mathbf{r})\, \widehat{b}_{\mathbf{p}'}\,. \tag{11.5}$$

Собственные состояния в (11.5) вдали от барьера представляют собой линейные комбинации двух плоских волн, падающей и отраженной, удовлетворяющие граничным условиям на поверхности барьера. В представлении (11.5) туннельный гамильтониан принимает вид

$$H_T = \sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} T_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}\, \widehat{a}^+_{\mathbf{p}} \widehat{b}_{\mathbf{p}'} + \mathrm{h.c.} \tag{11.6}$$

Следует иметь в виду, что нередко отражением от барьера пренебрегают и заменяют истинные собственные состояния в (11.5) на плоские волны. Хотя такое приближение на первый взгляд кажется весьма грубым, оно оказывается вполне достаточным для описания эффектов, в которых существенны только состояния с энергиями вблизи E_F. Более аккуратное рассмотрение приводит к более сложным выражениям, с которыми труднее работать. Согласие же с экспериментом, и без того обычно неплохое, при этом практически не улучшается.

Зависимость амплитуды туннелирования $T_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$ от импульсов $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}'$ в общем случае может оказаться довольно сложной. Обычно рассматривают две основные модели, соответствующие «шероховатому» и «гладкому» барьерам. В первом случае, поскольку вероятность туннелирования (11.2) экспоненциально зависит от толщины барьера, основной вклад в туннельный ток вносится тем местом, где барьер наиболее тонок и где поэтому вероятность туннелирования наибольшая. Обычно можно считать, что туннелирование происходит в какой-то определенной точке барьера. Амплитуда туннелирования $T_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$ в этом случае есть константа, не зависящая от $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$. Другая ситуация возникает в случае достаточно гладкого барьера, имеющего постоянную толщину. При туннелировании через такой барьер должна сохраняться компонента импульса электрона вдоль барьера $\mathbf{p}_\parallel$. Поэтому в данном случае амплитуда туннелирования имеет вид $T_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} = \widetilde{T}_{\mathbf{p}_\perp \mathbf{p}'_\perp} \delta(\mathbf{p}_\parallel - \mathbf{p}'_\parallel)$. В этой главе мы будем рассматривать более часто встречающийся случай шероховатого барьера и соответственно считать амплитуду туннелирования константой: $T_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} = T_0$.

---

[1] В случае бесконечно высокого и тонкого барьера с резкими краями, находящегося в плоскости $x = 0$, граничные условия в отсутствие туннелирования имеют вид: $\psi_a(x = +0) = 0$, $\psi_b(x = -0) = 0$. При этом туннельный гамильтониан есть

$$\widehat{H}_T = -\int\limits_{x=0} dydz\ T(y,z)\ \frac{\partial}{\partial x}\psi^+_a(\mathbf{r})\Big|_{x=+0}\ \frac{\partial}{\partial x}\psi_b(\mathbf{r})\Big|_{x=-0}\ + \mathrm{h.c.} \tag{11.4}$$

где $T(y,z)$ — прозрачность барьера, являющаяся в общем случае функцией координат.

Теперь найдем оператор туннельного тока. Полный гамильтониан системы есть

$$\widehat{H} = \widehat{H}_1(\hat{a}, \hat{a}^+) + \widehat{H}_2(\hat{b}, \hat{b}^+) + \widehat{H}_T\,, \tag{11.7}$$

где $\widehat{H}_{1(2)}$ — гамильтонианы соответственно пробника и образца. При этом $\widehat{H}_1$ и $\widehat{H}_2$ сохраняют заряд каждого из берегов контакта, а $\widehat{H}_T$ приводит к переносу заряда. Запишем скорость изменения заряда пробника, используя уравнения эволюции в представлении Гейзенберга:

$$\dot{\widehat{Q}}_a = i[\widehat{H}, \widehat{Q}_a]\,, \quad \widehat{Q}_a = e\sum_{\mathbf{p}} \hat{a}^+_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}}\,. \tag{11.8}$$

Нетрудно видеть, что вклад в коммутатор (11.8) дает только $\widehat{H}_T$. Определяя оператор тока $\widehat{I}$ как скорость изменения заряда и вычисляя коммутатор $[\widehat{H}, \widehat{Q}_a]$, получаем

$$\widehat{I} = \dot{\widehat{Q}}_a = ie\sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} T_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}\hat{a}^+_{\mathbf{p}}\hat{b}_{\mathbf{p}'} + \text{h.c.} \tag{11.9}$$

Чтобы найти средний по времени туннельный ток, нужно вычислить среднее от оператора (11.9) по состоянию, в котором химические потенциалы берегов различаются на eV, где V — приложенное к контакту напряжение. Это состояние — неравновесное, поэтому усреднение по нему нельзя выполнять с помощью обычной равновесной диаграммной техники. Можно однако воспользоваться полезным стандартным приемом, позволяющим перейти к эквивалентной задаче, в которой усреднение выполняется по равновесному состоянию. Для этого рассмотрим калибровочное преобразование

$$\hat{a}_{\mathbf{p}} \to \hat{a}_{\mathbf{p}}e^{ieVt}\,, \quad \hat{b}_{\mathbf{p}'} \to \hat{b}_{\mathbf{p}'}\,, \tag{11.10}$$

сдвигающее энергии всех состояний справа на $-eV$ и выравнивающее таким образом химические потенциалы. После этого преобразования туннельный гамильтониан принимает вид

$$H_T = \widehat{X}e^{ieVt} + \widehat{X}^+e^{-ieVt}\,, \tag{11.11}$$

где

$$X = \sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} T_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}\hat{a}^+_{\mathbf{p}}\hat{b}_{\mathbf{p}'}\,. \tag{11.12}$$

Туннельный ток в этом представлении равен

$$\widehat{I} = i\widehat{X}e^{ieVt} - i\widehat{X}^+e^{-ieVt}\,. \tag{11.13}$$

Таким образом, после калибровочного преобразования (11.10) мы получили зависящее от времени возмущение, действующее на равновесное состояние. Это означает, что с формальной точки зрения задача о вычислении туннельного тока сводится к вычислению отклика зависящего от времени оператора туннельного тока (11.13) на «внешнее поле», пропорциональное туннельному оператору (11.12), причем разность потенциалов eV играет роль частоты «внешнего поля». Соответствующая диаграмма приведена на рис. 11.3.

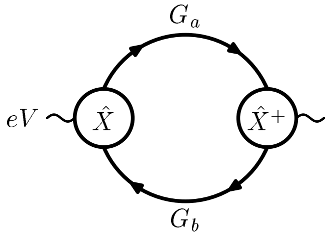


Рис. 11.3

Кружком обозначен оператор туннелирования $\widehat{X}$. Вычисление функции отклика (см. задачу 68) приводит к такому выражению для туннельного тока:

$$I(V) = 4e \sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} |T_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}|^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} G_a^R(\mathbf{p}, \varepsilon + eV)\, \operatorname{Im} G_b^R(\mathbf{p}', \varepsilon)\, [n_F(\varepsilon) - n_F(\varepsilon + eV)]\, \frac{d\varepsilon}{\pi}\,, \quad (11.14)$$

где $n_F(\varepsilon)$ — фермиевская функция распределения, а $G^R_{a(b)}(\mathbf{p}, \varepsilon)$ — фурье-образ запаздывающей функции Грина

$$G_a^R(\mathbf{p}, \varepsilon) = -i \int\limits_0^{\infty} \langle [a_{\mathbf{p}}^+(t), a_{\mathbf{p}}(0)] \rangle\, e^{i\varepsilon t}\, dt\,. \quad (11.15)$$

Для модели шероховатого барьера $T_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} = T_0$, и результат (11.14) принимает вид

$$I(V) = 4\pi e |T_0|^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \nu_a(\varepsilon + eV) \nu_b(\varepsilon)\, (n_F(\varepsilon) - n_F(\varepsilon + eV))\, d\varepsilon\,, \quad (11.16)$$

где

$$\nu_{a(b)}(\varepsilon) = -\frac{1}{\pi} \sum_{\mathbf{p}} \operatorname{Im} G^R_{a(b)}(\mathbf{p}, \varepsilon) \quad (11.17)$$

— так называемая *туннельная (или одночастичная) плотность состояний.* Происхождение этого названия становится яснее, если рассмотреть туннелирование между двумя металлами, пренебрегая эффектами взаимодействия. Тогда скорость перехода из пробника в образец можно найти по золотому правилу Ферми:

$$w_{a\to b} = \frac{2\pi}{\hbar} |T_0|^2 \nu_b(\varepsilon), \quad (11.18)$$

где $\nu_b(\varepsilon)$ — плотность состояний в образце. Суммируя по всем заполненным состояниям в пробнике, получаем ток, текущий из пробника в образец:

$$I_{a\to b} = \frac{2 \cdot 2\pi e}{\hbar} |T_0|^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \nu_a(\varepsilon + eV) \nu_b(\varepsilon)\, n_F(\varepsilon)(1 - n_F(\varepsilon + eV))\, d\varepsilon \quad (11.19)$$

(коэффициент 2 учитывает спиновое вырождение, а множитель $1 - n_F(\varepsilon + eV)$ возникает вследствие принципа Паули). Аналогично, ток из образца в пробник равен

$$I_{b\to a} = \frac{2\cdot 2\pi e}{\hbar}|T_0|^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \nu_a(\varepsilon + eV)\nu_b(\varepsilon)\, n_F(\varepsilon + eV)(1 - n_F(\varepsilon))\, d\varepsilon\,. \tag{11.20}$$

Вычисляя суммарный ток $I = I_{a\to b} - I_{b\to a}$, получаем соотношение (11.16). Итак, выражение туннельного тока через плотность состояний в отсутствие взаимодействия оказывается точно таким же, как и во взаимодействующей системе, если плотность состояний $\nu(\varepsilon)$ определена с помощью соотношения (11.17).

Заметим, что туннельная плотность состояний (11.17), вообще говоря, отличается от *термодинамической плотности состояний*

$$\widetilde{\nu}(\varepsilon) = \left.(\partial n/\partial\mu)\right|_{\mu=\varepsilon}\,, \tag{11.21}$$

которая определяет сжимаемость системы в равновесии. В отличие от туннельной плотности состояний, термодинамическая плотность состояний учитывает равным образом все состояния в системе, независимо от степени их одно– или многочастичности. Только в невзаимодействующей системе туннельная и термодинамическая плотности состояний совпадают, поскольку в этом случае многочастичные состояния есть простые комбинации одночастичных (слэтеровские детерминанты). Во взаимодействующей же системе это не так, и поэтому $\nu(\varepsilon) \neq \widetilde{\nu}(\varepsilon)$.

По одночастичной плотности состояний (11.17), найденной из туннельных измерений, можно в принципе восстановить функцию Грина, используя соотношения типа Крамерса–Кронига. Туннельные измерения, таким образом, предоставляют важную информацию о системе взаимодействующих частиц, которую трудно получить другими методами. Особенность процесса туннелирования, как уже отмечалось, заключается в том, что при туннелировании из системы вырывается электрон, в то время как при измерении таких величин, как проводимость, теплоемкость или сжимаемость, происходит лишь перераспределение квазичастиц внутри системы. Поскольку квазичастицы в основном ведут себя подобно невзаимодействующим частицам, такие методы оказываются относительно менее чувствительны к эффектам взаимодействия. При туннелировании же отличие квазичастиц от реальных частиц оказывается весьма существенным. Поэтому иногда говорят, что туннельное измерение показывает в какой мере квазичастицы во взаимодействующей системе отличаются от «голых» электронов.

Одночастичную функцию Грина можно определить не только из туннельных экспериментов, но и из некоторых других, например оптических. При поглощении оптического фотона в кристалле происходит практически мгновенный переход электрона с одной ветви электронного спектра на другую. Этот процесс можно описать как рождение электрона в одной энергетической зоне и одновременное уничтожение в другой. Так, скажем, при оптическом переходе в собственном полупроводнике электрон поглощает энергию, бо́льшую энергии запрещенной зоны, и при этом переходит из (заполненной) валентной зоны в (пустую) зону проводимости. При этом валентная зона играет роль пробника, а зона проводимости — роль исследуемого образца. Вероятность поглощения выражается через одночастичные функции Грина в каждой из двух зон точно таким же образом, как это было проделано выше для вероятности туннелирования. При этом амплитуда туннелирования $T_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}$ заменяется на амплитуду перехода в присутствии внешнего электромагнитного поля, а энергия eV — на энергию квантов поля $\hbar\omega$. Единственное отличие — δ-функционная зависимость амплитуды $T_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}$ от переданного импульса $\mathbf{p}' - \mathbf{p}$, отражающая сохранение импульса при поглощении фотона. В общем случае $T_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} = \widetilde{T}_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}\delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p} - \mathbf{k})$, где $\mathbf{k}$ — импульс фотона, а $\widetilde{T}_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}$ — матричный элемент дипольного момента между начальным и конечным состояниями. Исследование спектра поглощения, т. е. зависимости интенсивности поглощения от частоты фотонов, позволяет определить функцию Грина электрона в зоне проводимости и дает полезную информацию о динамике электрона.

Отметим также, что факторизация вероятности туннелирования в произведение туннельных плотностей состояний образца и пробника имеет место далеко не всегда. Изложенная теория туннелирования, как нетрудно видеть, существенным образом опирается на предположение о независимости динамики в исследуемом образце и в пробнике. В случае же когда в системе имеется взаимодействие с радиусом превышающим толщину барьера, это предположение, вообще говоря, несправедливо. Наиболее опасным в этом смысле как правило является кулоновское взаимодействие, приводящее к притяжению протуннелировавшего заряда и оставшейся на другом берегу дырки. В результате этого динамика электрона и дырки становится скоррелированной, что меняет вероятность туннелирования и усложняет интерпретацию результатов. Точно такие же оговорки, причем еще даже в большей степени, относятся к оптическому поглощению. В этом случае взаимодействие может привести к образованию экситона — связанного водородоподобного состояния поглотившего фотон электрона и дырки в исходной валентной зоне. При этом спектр поглощения оказывается определенной комбинацией вкладов свободных электронов и дырок, а также их связанных состояний. Эффекты подобного рода имеют место не только в полупроводниках, но и в металлах. Например, экситонные корреляции в конечном состоянии оказываются существенными при анализе спектра рентгеновского поглощения в металле (см. задачу 79).

11.2. Неупругое рассеяние

Двухчастичная функция Грина в общем случае зависит от четырех аргументов:

$$K(x_1, x_2, x_3, x_4) = \langle \mathrm{T}\, \psi(x_1)\psi^+(x_3)\psi(x_2)\psi^+(x_4)\rangle\,. \tag{11.22}$$

Измерить такую функцию было бы непросто, однако это обычно и не требуется. Достаточно интересную информацию можно извлечь из функции (11.22) в случае, когда её аргументы попарно совпадают, $x_1 = x_3$, $x_2 = x_4$. Эта функция представляет собой коррелятор плотности

$$\mathcal{K}(x_1, x_2) = \langle \mathrm{T}\, \widehat{\rho}(x_1)\widehat{\rho}(x_2)\rangle\,, \quad \widehat{\rho}(x) = \psi^+(x)\psi(x)\,. \tag{11.23}$$

Непосредственно измеряемой величиной является связанная с (11.23) запаздывающая корреляционная функция

$$\mathcal{K}^R(x_1,\, x_2) = \begin{cases} i\,\langle[\widehat{\rho}(\mathbf{r}_1, t_1),\, \widehat{\rho}(\mathbf{r}_2, t_2)]\rangle\,, & t_1 > t_2 \\ 0 & t_1 < t_2 \end{cases} \tag{11.24}$$

Функцию (11.24) можно измерить, исследуя рассеяние на изучаемой системе пучка каких-либо пробных частиц (обычно нейтронов или фотонов). В этом разделе мы изложим основные факты, относящиеся к теории рассеяния частиц в коденсированных средах, а в задачах 72, 73 и 74 приведем соответствующие примеры.

Имеется два основных вида процессов рассеяния, представляющих интерес: *упругое* и *неупругое* рассеяние. Упругое рассеяние широко используется для изучения кристаллической структуры твердых тел, и поэтому этот вид рассеяния весьма важен с прикладной точки зрения. Неупругое рассеяние обычно используется для исследования элементарных возбуждений в кристаллах, жидкостях и других системах, и нас будет интересовать именно этот вид рассеяния. Вероятность неупругого рассеяния пробной частицы на атомах какой-либо среды с передачей среде энергии $\omega = E - E'$ и импульса $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ оказывается пропорциональной мнимой части фурье-образа функции (11.24),

$$\mathcal{K}^R(\omega, \mathbf{q}) = \int \mathcal{K}^R(x_1, x_2) e^{i\omega t_{12} - i\mathbf{q}\mathbf{r}_{12}} dt_{12} d^3\mathbf{r}_{12}\,, \tag{11.25}$$

где $t_{12} = t_1 - t_2$, $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$.

Вид частиц, используемых в эксперименте, а также выбор их энергии E определяется тем, в какой области ω и $\mathbf{q}$ функция (11.25) представляет наибольший интерес. При этом следует иметь в виду, что энергии E и E' частиц до и после рассеяния связаны с их импульсами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$ дисперсионным соотношением. (Например для нейтронов $E = \mathbf{k}^2/2m_n$, $E' = \mathbf{k}'^2/2m_n$, где m_n — масса нейтрона, а для фотонов $E = \hbar c|\mathbf{k}|$, $E' = \hbar c|\mathbf{k}'|$, где c — скорость света.) Поэтому, вообще говоря, при фиксированной энергии частиц E можно исследовать только определенную область ω и $\mathbf{q}$.

Теоретическое описание рассеяния частиц разного вида оказывается практически одинаковым. Ниже мы будем для определенности говорить о рассеянии нейтронов. Нейтроны удобно использовать в качестве пробных частиц при исследовании динамики атомов или ядер, поскольку они взаимодействуют с ядрами контактно. Рассеяние нейтронов с не слишком большой энергией на ядрах происходит преимущественно в s-канале, вследствие чего реальный довольно сложный потенциал взаимодействия нейтрона с ядром можно заменить [2] на так называемый «псевдопотенциал» Ферми

$$V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{2\pi\hbar^2 a}{\mu}\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\,, \quad \mu = \frac{m_n m}{m + m_n}\,, \tag{11.26}$$

где a — длина рассеяния нейтрона на ядре, μ — приведенная масса, m и m_n — массы ядра и нейтрона соответственно. Коэффициент в псевдопотенциале (11.26) подобран так, что сечение рассеяния нейтрона на одном ядре равно $4\pi a^2$, как и должно быть при полностью изотропном s-рассеянии.

Взаимодействие нейтрона с атомами какой-либо среды, скажем жидкости, можно выразить через оператор плотности частиц среды $\widehat{\rho}(\mathbf{r}, t)$. Контактное взаимодействие (11.26) означает, что оператор взаимодействия нейтрона с системой есть

$$\widehat{\mathcal{H}}_{\rm int} = \frac{2\pi a\hbar^2}{\mu}\widehat{\rho}(\widehat{\mathbf{R}}, t)\,, \tag{11.27}$$

[2] Метод псевдопотенциала в теории рассеяния рассмотрен в [2], § 151.

где $\widehat{\mathbf{R}}$ — координата нейтрона[3]. Можно показать (см. задачу 72), что сечение неупругого рассеяния нейтронов с передачей среде энергии ω и импульса $\mathbf{q}$ выражается через мнимую часть коррелятора плотности (11.25) следующим образом:

$$\frac{d\sigma(\omega,\mathbf{q})}{d\omega\, do'} = \mathrm{const}\,\frac{\operatorname{Im}\mathcal{K}^R(\omega,\mathbf{q})}{1-e^{-\beta\omega}}\,, \tag{11.28}$$

где do' — элемент телесного угла рассеяния. Величина

$$S(\omega,\mathbf{q}) = 2\operatorname{Im}\mathcal{K}^R(\omega,\mathbf{q}) \tag{11.29}$$

называется *структурным фактором* неупругого рассеяния.

Наибольший интерес обычно представляют полюсы двухчастичной функции Грина, поскольку они определяют спектр коллективных возбуждений системы $\omega = \omega_0(\mathbf{q}) - i\gamma(\mathbf{q})$. При малой величине затухания $\gamma(\mathbf{q}) \ll \omega_0(\mathbf{q})$, полюсу двухчастичной функции Грина соответствует узкий пик в структурном факторе $S(\omega,\mathbf{q})$ при $\omega \approx \omega_0(\mathbf{q})$, имеющий ширину порядка $\gamma(\mathbf{q})$. Таким образом, положения пиков в $S(\omega,\mathbf{q})$ «прорисовывают» ветви спектра коллективных возбуждений жидкости. Иллюстрирующие это обстоятельство примеры будут рассмотрены в задачах 73 б) и 74.

Неупругое рассеяние является практически единственным методом, дающим информацию о коллективных возбуждениях с волновыми векторами $\mathbf{q}$ порядка обратного расстояния между частицами. Например, гипотеза о существовании ротонов в сверхтекучем гелии была проверена именно с помощью измерений структурного фактора. При этом спектр возбуждений при достаточно малых ω и $\mathbf{q}$ обычно можно определить и другими методами, изучая макроскопические свойства или функции отклика.

Рассмотрим пример реальных данных по неупругому рассеянию нейтронов. На рис. 11.4 показаны линии уровня структурного фактора жидкого ^{3}He. Интересно сравнить эти данные со структурным фактором идеального ферми-газа (см. задачу 73) с импульсом Ферми $p_0 = 0,786\times 10^{-8}\textit{см}^{-1}$, что соответствует плотности ^{3}He при $P = 1$ *атм*, и массой равной ато́мной массе ^{3}He. Линии уровня структурного фактора идеального ферми-газа показаны на рис. 11.5. Для удобства сравнения мы перенесли на рис. 11.4 границу области $S(\omega,\mathbf{q}) > 0$, «квазичастичный гребень» $\omega = v_F k - k^2/2m$, а также параболу $\omega = k^2/2m$ — линию максимумов $S(\omega,\mathbf{q})$ при фиксированном $|\mathbf{q}|$.

[3] Мы рассматриваем рассеивающую среду в гейзенберговском представлении, а нейтрон — в шредингеровском. Такое смешанное представление удобно тем, что в нем нейтрон рассеивается на зависящем от времени потенциале, создаваемом флуктуациями плотности системы.

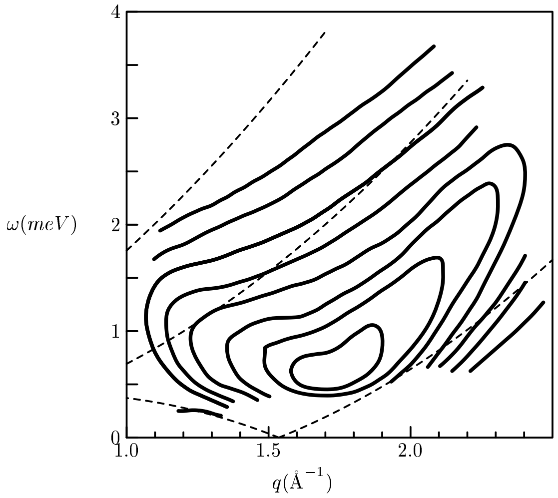


Рис. 11.4

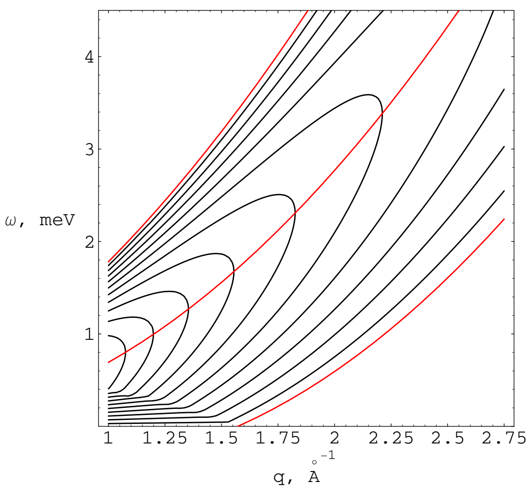


Рис. 11.5

Видно, что качественно элементарные возбуждения в ^{3}He такие же, как в ферми-газе: граница области $S(\omega, \mathbf{q}) > 0$ выглядит похоже и имеет правильный масштаб. Однако центральный максимум лежит на большом расстоянии от параболы $\omega = k^2/2m$. Причина этого расхождения состоит в отличии эффективной массы в жидком ^{3}He от массы атома в пустоте: $m_* \approx 3m$ (это значение получено из данных по теплоемкости при $T \ll E_F$, т. е. из низкоэнергетических измерений). Если учесть трехкратное различие масс, то положение максимума оказывается примерно на месте. В то же время было бы неправильно просто заменить m на m_* в формуле для $S(\omega, \mathbf{q})$ идеального ферми-газа, поскольку при этом верхняя граница области $S(\omega, \mathbf{q}) > 0$, дающаяся выражением $\omega = k^2/2m + kp_0/m$, оказалась бы значительно ниже, чем на рис. 11.4.

Таким образом, в окрестности верхней границы спектра имеет смысл пользоваться массой атома в пустоте, а вблизи максимума — эффективной массой. Причина состоит в том, что на коротких временах, соответствующих большим энергиям, взаимодействие между атомами жидкости не успевает проявиться, и они эффективно ведут себя как свободные.

Обратим также внимание на то, что максимум структурного фактора ^{3}He при $q \approx 1.75\,\text{Å}^{-1}$, $\omega \approx 0.5\,\text{meV}$ отсутствует в структурном факторе идеального ферми-газа. Этот максимум есть следствие взаимодействия. Более сильное чем в идеальном газе рассеяние при q порядка обратного расстояния между атомами ^{3}He можно объяснить существованием в жидкости ближнего порядка, возникающего вследствие взаимодействия атомов и приводящего к кристаллизации при достаточно высоком давлении или низкой температуре.

Литература: Туннелирование из сверхпроводника в нормальный металл рассматривается в [3], § 10.8, а эффект Джозефсона — в [3], § 10.12. Обсуждение структурного фактора для неупругого рассеяния можно найти в [1], § 17 и в [6], § 86, 87, 91.

11.3. Задачи 68 – 74

Задача 68. **а)** Выведите формулу (11.14) для туннельного тока, используя мацубаровскую технику. Для этого рассмотрите отклик туннельного тока (11.13) на поле, пропорциональное туннельному оператору X, — см. (11.12). Используя аналитические свойства мацубаровских функций Грина, перейдите от мнимых частот к вещественным и тем самым свяжите функцию отклика с величинами в реальном времени.

б) Рассмотрите туннелирование между двумя идеальными ферми-газами с постоянной плотностью состояний. Покажите, что при $eV \ll E_F$ вольт-амперная характеристика линейна, т. е. выполняется закон Ома $V = RI$, причем сопротивление контакта R не зависит от температуры и определяется соотношением

$$R^{-1} = 4\pi e^2 \nu_a \, \nu_b |T_0|^2 \,, \tag{11.30}$$

где ν_a и ν_b — плотности состояний берегов контакта.

в) Пусть в одном из ферми-газов имеется взаимодействие между частицами, так что собственно-энергетическая часть оказывается равной

$$\Sigma(\xi, \varepsilon) = a\xi - b\varepsilon \,, \tag{11.31}$$

где ε — энергия частицы, а $\xi = v_F(p - p_0)$, причем $\xi, \varepsilon \ll E_F$. Найдите туннельное сопротивление.

Для электрон-фононного взаимодействия собственно-энергетическая часть есть функция ε, а от ξ не зависит (см. гл. 6). Поэтому в этом случае $a = 0$. Для электрон-электронного взаимодействия собственно-энергетическая часть зависит как от ξ, так и от ε, и поэтому $a \neq 0$ и $b \neq 0$.

Задача 69. (*Туннельный ток в NS контакте.*) Рассмотрим туннельный контакт между нормальным металлом и сверхпроводником, к которому приложено напряжение V. Выразите туннельный ток при $T < T_c$ через сопротивление контакта R в нормальном состоянии, т. е. при $T > T_c$. Покажите, что при нулевой температуре зависимость туннельного тока от V имеет порог:

$$I = \frac{1}{R}\sqrt{V^2 - (\Delta/e)^2}\,\operatorname{sign} V \,, \tag{11.32}$$

где Δ — сверхпроводящая щель при $T = 0$. Найдите зависимость туннельного тока от температуры при $0 < T < T_c$?

Задача 70. (*Эффект Джозефсона.*) Туннельный ток через контакт, связывающий два сверхпроводника, обладает весьма интересными свойствами. В этом случае помимо одночастичного вклада в ток, рассмотренного в задачах 68 и 69, появляется дополнительный вклад, связанный с туннелированием куперовских пар. Формально этот вклад можно описать, заменив нормальные функции Грина в диаграмме на рис. 11.3 на аномальные, как показано на рис. 11.6. Таким образом, туннельный эксперимент позволяет «измерить» аномальную функцию Грина в сверхпроводнике.

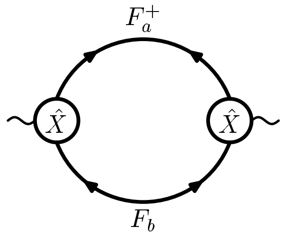


Рис. 11.6

Покажите, что в равновесии, при $V = 0$, двухчастичный ток отличен от нуля и равен

$$I = I_0 \sin(\varphi_a - \varphi_b)\,, \tag{11.33}$$

где $\varphi_{a(b)}$ — значения фазы сверхпроводящего параметра порядка $\Delta_{a(b)} = |\Delta_{a(b)}|e^{i\varphi_{a(b)}}$ на разных берегах контакта. Туннельный контакт между двумя сверхпроводниками, в котором имеет место эффект Джозефсона (11.33), называется соответственно *джозефсоновским контактом*.

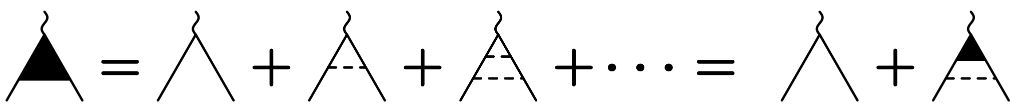
Рассмотрите случай, когда сверхпроводники по обе стороны контакта одинаковые, т. е. $\Delta_{a(b)} = \Delta e^{i\varphi_{a(b)}}$. Получите формулу для максимального тока в джозефсоновском контакте:

$$I_0 = \frac{\pi\Delta}{2eR}\,\mathrm{th}\,\frac{\Delta}{2T}\,, \tag{11.34}$$

где R — сопротивление контакта при $T > T_c$. Связь между джозефсоновским током I_0 и сопротивлением контакта в нормальном состоянии называется *соотношением Амбегаокара–Баратова*.

Задача 71. (*Плотность состояний в грязном металле*[4].) В неупорядоченном металле туннельная плотность состояний $\nu(\varepsilon)$ имеет особенность на уровне Ферми. Сингулярность $\nu(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to E_F$ свидетельствует о том, что ферми-жидкостное состояние в металле в присутствие рассеяния на случайном потенциале весьма сильно модифицируется. Чтобы найти поправку к туннельной плотности состояний, возникающую из-за кулоновского взаимодействия, проделайте следующее.

а) Вычислите вершину взаимодействия электрона с электрическим полем с учетом беспорядка, используя мацубаровскую технику; просуммируйте для этого диаграммы на рис. 11.7. Считайте, что переданный импульс $\mathbf{q}$ и переданная энергия ω_n удовлетворяют условиям $|\mathbf{q}|l \ll 1$, $\omega_n\tau \ll 1$, где τ и l — время и длина свободного пробега.



[4]см. работы: Б. Л. Альтшулер, А. Г. Аронов, ЖЭТФ, т. 77, с. 2028 (1979); B. L. Altshuler, A. G. Aronov, P. A. Lee, *Phys. Rev. Lett.*, v. 44, p. 1288 (1980).

Рис. 11.7

Покажите, что вершинная часть равна

$$\Gamma(\varepsilon_m,\,\omega_n,\,\mathbf{q}) = \begin{cases} 1/[\tau\,(|\omega_n| + D\mathbf{q}^2)] & \text{при } \varepsilon_m\,(\varepsilon_m-\omega_n)<0 \\ 1 & \text{при } \varepsilon_m\,(\varepsilon_m-\omega_n)>0 \end{cases} \tag{11.35}$$

где D — коэффициент диффузии. Диффузионный полюс выражения (11.35) описывает эффект усиления взаимодействия с внешним полем вследствие диффузии.

Изменение величины взаимодействия можно качественно объяснить тем, что из-за диффузионного замедления динамики электроны проводят больше времени в области действия внешнего поля и поэтому взаимодействуют с ним более сильно. То, насколько сильно диффузия замедляет динамику, зависит от размерности системы. Как мы знаем из задачи 9, критической размерностью является $D = 2$, поскольку при $D \leqslant 2$ число возвратов диффузионной траектории в исходную точку расходится, а при $D > 2$ — сходится. Поэтому эффекты усиления взаимодействия в грязном металле оказываются наиболее интересными в двумерном случае.

б) Найдите эффективное электрон–электронное взаимодействие $V(\omega_n, \mathbf{q})$ с учетом динамической экранировки. Для этого вычислите сумму диаграмм на рис. 8.3 и покажите, что заэкранированное взаимодействие есть

$$V(\omega_n,\,\mathbf{q}) = V_0(\mathbf{q})\;\frac{|\omega_n| + D\mathbf{q}^2}{|\omega_n| + D\mathbf{q}^2 + \nu D\mathbf{q}^2 V_0(\mathbf{q})}\,, \tag{11.36}$$

где $V_0(\mathbf{q})$ — затравочное взаимодействие. В качестве поляризационного оператора используйте мацубаровский коррелятор плотность–плотность, найденный в задаче 52.

в) Найдите собственно-энергетическую поправку к функции Грина первого порядка по заэкранированному взаимодействию $V(\omega_n, \mathbf{q})$, соответствующую диаграмме на рис. 11.8.

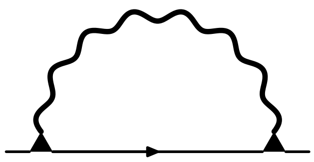


Рис. 11.8

Используя найденное выражение, найдите поправку $\delta\nu(\varepsilon)$ к плотности состояний двумерного металла в случае кулоновского взаимодействия $V_0(\mathbf{r}) = e^2/|\mathbf{r}|$. Покажите, что в этом случае поправка к плотности состояний есть

$$\frac{\delta\nu(\varepsilon)}{\nu} = -\frac{e^2}{8\pi^2\hbar\sigma}\ln\frac{1}{|\varepsilon|\tau}\ln\frac{\tau D^2(\nu e^2)^4}{|\varepsilon|}\,, \tag{11.37}$$

где σ— двумерная проводимость. Расходимость $\delta\nu(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ означает, что квазичастицы в двумерной неупорядоченной ферми-системе сильно отличаются от свободных фермионов. Усиление эффектов взаимодействия в плотности состояний (11.37) при малых ε свидетельствует о неприменимости теории возмущений в двумерном неупорядоченном металле при энергиях вблизи уровня Ферми.

Задача 72. (*Рассеяние нейтронов.*) Покажите, что сечение неупругого рассеяния нейтронов выражается через мнимую часть двухчастичной гриновской функции $\mathcal{K}(q,\omega)$. Получите соотношение (11.28).

Задача 73. а) Найдите структурный фактор $S(\omega,\,\mathbf{q}) = 2\,\mathrm{Im}\,\mathcal{K}^R(\omega,\,\mathbf{q})$ идеального ферми-газа при $T = 0$.

б) Рассмотрите структурный фактор $S(\omega,\,\mathbf{q})$ ферми-жидкости. Это можно сделать либо с помощью кинетического уравнения ферми-жидкости ([1], (2.21)), либо вычислив мнимую часть нуль-звуковой лестницы (см. рис. 8.3). Покажите, что вклад нуль-звуковой моды в структурный фактор при $|q| \ll p_0$ и $T = 0$ имеет вид $S_0(q,\omega) = A\,\delta(\omega - vq)$, где v — скорость нуль-звуковой моды. Считая взаимодействие короткодействующим, определите константу A (см. [6], § 4, 91).

Задача 74. (*Спектр фононов.*) Неупругое рассеяние нейтронов используют для определения закона дисперсии фононов в твердых телах. Нейтроны рассеиваются на ядрах, взаимодействуя с ними контактно, согласно (11.26) и (11.27). Рассмотрим фононы в рамках модели Дебая (см. с. 109), считая, что ядерная плотность представляет собой однородное желе. Тогда флуктуации плотности, на которых происходит рассеяние, записываются через поле смещений решетки (6.1) как $\delta\rho(\mathbf{r}) = -\rho_0\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}(\mathbf{r})$, где ρ_0 — средняя плотность ядер.

а) Найдите вклад дебаевских фононов в структурный фактор $S(\omega,\,\mathbf{q})$ неупругого рассеяния нейтронов.

б) (*Коновская аномалия.*) Спектр фононов в металле перенормируется из-за взаимодействия с электронами. Этот эффект был рассмотрен в задаче 31 в рамках теории Мигдала. Покажите, что перенормированный фононный спектр имеет особенность при $q = 2p_0$, и найдите соответствующий структурный фактор $S(\omega,\,\mathbf{q})$.

Особенность при $q = 2p_0$, называемая коновской аномалией, имеет то же самое происхождение, что и рассмотренное в задаче 32 смягчение спектра одномерных фононов вблизи $q = 2p_0$, приводящее к эффекту Пайерлса. В размерности больше единицы коновская аномалия является относительно слабой и, в отличие от одномерного случая, не приводит к неустойчивости.

11.4. Решения задач 68 – 74

68 а. Согласно формуле Кубо, среднее от оператора туннельного тока (11.13) в низшем порядке теории возмущений по туннельному гамильтониану (11.11) равно

$$I(t) = i\int\limits_{-\infty}^{t} \left\langle [\widehat{H}_T(t'), \widehat{I}(t)] \right\rangle dt' \,. \tag{11.38}$$

Благодаря фазовым множителям $e^{\pm ieVt}$ операторы $\widehat{H}_T(t)$ и $\widehat{I}(t)$ явно зависят от времени. Чтобы свести задачу вычисления туннельного тока к стандартной задаче о нахождении функции отклика в равновесном состоянии, введем обобщенную восприимчивость $\chi(\omega)$,

$$\chi(\omega) = i\int\limits_0^\infty \left\langle \left[\widehat{X}(t)\,,\,\widehat{I}(0)\right]\right\rangle e^{i\omega t}\,dt\,, \tag{11.39}$$

описывающую отклик туннельного тока на поле $\widehat{X}$, определенное соотношением (11.12). Нетрудно видеть, что туннельный ток как функция напряжения V на туннельном контакте связан с $\chi(\omega)$ следующим соотношением:

$$I(V) = 2\,\mathrm{Re}\,\chi(\omega = eV)\,. \tag{11.40}$$

Чтобы вычислить $\chi(\omega)$, найдем мацубаровскую восприимчивость

$$\chi_M(i\Omega_n) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\beta}^{\beta} \left\langle \mathrm{T}_\tau\,\widehat{X}(\tau)\,\widehat{I}(0)\right\rangle e^{i\Omega_n\tau}\,d\tau\,, \tag{11.41}$$

а затем продолжим ее на вещественные частоты. Подставляя в (11.41) операторы $\widehat{I}$ и $\widehat{X}$ из (11.9) и (11.12), получим

$$\begin{aligned}\langle\,\mathrm{T}_\tau\,\widehat{X}(\tau)\,\widehat{I}(0)\rangle = \sum_{\mathbf{p}_1,\,\mathbf{p}'_1,\,\mathbf{p}_2,\,\mathbf{p}'_2} T_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}'_1}\,\Big\langle \mathrm{T}_\tau\,\widehat{a}^+_{\mathbf{p}_1}(\tau)\,\widehat{b}_{\mathbf{p}'_1}(\tau)\,\Big(T_{\mathbf{p}_2\mathbf{p}'_2}\,\widehat{a}^+_{\mathbf{p}_2}(0)\,\widehat{b}_{\mathbf{p}'_2}(0)\,-\\ -\,T^*_{\mathbf{p}_2\mathbf{p}'_2}\,\widehat{a}_{\mathbf{p}_2}(0)\,\widehat{b}^+_{\mathbf{p}'_2}(0)\Big)\Big\rangle\,.\end{aligned} \tag{11.42}$$

В отсутствие сверхпроводящих корреляций в пробнике и образце средние вида $\langle\widehat{a}^+_{\mathbf{p}}\,\widehat{a}^+_{\mathbf{p}'}\rangle$ и $\langle\widehat{b}_{\mathbf{p}}\,\widehat{b}_{\mathbf{p}'}\rangle$ равны нулю. Поэтому только вклад второго члена в (11.42) оказывается отличным от нуля. Спаривая операторы в (11.42), находим

$$\langle\,\mathrm{T}_\tau\,\widehat{X}(\tau)\,\widehat{I}(0)\rangle = -ie\sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}|T_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}|^2\,G_a(\tau,\,\mathbf{p})\,G_b(-\tau,\,\mathbf{p}')\,, \tag{11.43}$$

где $G_a(\tau,\,\mathbf{p}) = -\langle\mathrm{T}_\tau\,\widehat{a}_{\mathbf{p}}(\tau)\,\widehat{a}^+_{\mathbf{p}}(0)\rangle$ и $G_b(\tau,\,\mathbf{p}) = -\langle\mathrm{T}_\tau\,\widehat{b}_{\mathbf{p}}(\tau)\,\widehat{b}^+_{\mathbf{p}}(0)\rangle$ — мацубаровские функции Грина соответственно пробника и образца. Записав функции Грина в частотном представлении и подставив в (11.41), получим

$$\chi_M(i\Omega_n) = -2ieT\sum_{\omega_m}\sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}\left|T_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}\right|^2\,G_a(i\omega_m + i\Omega_n,\,\mathbf{p})\,G_b(i\omega_m,\,\mathbf{p}')\,, \tag{11.44}$$

где множитель 2 учитывает суммирование по проекциям спина.

Теперь выполним аналитическое продолжение выражения (11.44). Используем для этого интегральное представление (7.24), с помощью которого мацубаровские функции Грина выражаются через мнимые части запаздывающих функций. В результате мацубаровская восприимчивость (11.44) принимает следующий вид:

$$\chi_M(i\Omega_n) = -2ieT\sum_{\omega_m}\sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}\left|T_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}\right|^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\frac{\mathrm{Im}\,G^R_a(\varepsilon,\,\mathbf{p})\;\mathrm{Im}\,G^R_b(\varepsilon',\,\mathbf{p}')}{(i\omega_m + i\Omega_n - \varepsilon)\;(i\omega_m - \varepsilon')}\,\frac{d\varepsilon\,d\varepsilon'}{\pi^2}\,. \tag{11.45}$$

Сумма по ω_m в (11.45) вычисляется с помощью тождества (7.85). Таким образом,

$$\chi_M(i\Omega_n) = -\frac{2ie}{\pi^2}\sum_{\mathbf{pp}'} |T_{\mathbf{pp}'}|^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} G_a^R(\varepsilon,\, \mathbf{p})\, \operatorname{Im} G_b^R(\varepsilon',\, \mathbf{p}') \frac{n_F(\varepsilon) - n_F(\varepsilon')}{\varepsilon' - \varepsilon + i\Omega_n}\, d\varepsilon d\varepsilon' \,. \tag{11.46}$$

Аналитическое продолжение (11.46) на вещественные частоты достигается заменой $i\Omega_n$ на $\omega + i0$. Вещественная часть полученного выражения дает туннельный ток

$$\begin{aligned} I(V) = \frac{4e}{\pi}\sum_{\mathbf{pp}'} |T_{\mathbf{pp}'}|^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \delta(\varepsilon' - \varepsilon - eV) \times \\ \times \operatorname{Im} G_a^R(\varepsilon,\, \mathbf{p})\, \operatorname{Im} G_b^R(\varepsilon',\, \mathbf{p}')\, \left(n_F(\varepsilon) - n_F(\varepsilon')\right)\, d\varepsilon\, d\varepsilon' \,. \end{aligned} \tag{11.47}$$

Интегрирование по ε уничтожает δ-функцию и мы получаем искомое выражение для туннельного тока:

$$I(V) = \frac{4e}{\pi}\sum_{\mathbf{pp}'} |T_{\mathbf{pp}'}|^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} G_a^R(\varepsilon + eV,\, \mathbf{p})\, \operatorname{Im} G_b^R(\varepsilon,\, \mathbf{p}')\, \left(n_F(\varepsilon) - n_F(\varepsilon + eV)\right)\, d\varepsilon \,. \tag{11.48}$$

Формула (11.48) имеет совершенно общий характер, поскольку при её выводе не делалось никаких предположений о спектре и характере взаимодействия в пробнике и образце.

68 б. Применим результат (11.48) к задаче о туннельном контакте между двумя нормальными металлами. Мнимая часть запаздывающей функции Грина $G^R(\varepsilon, \mathbf{p}) = (\varepsilon - \xi_\mathbf{p} + i0)^{-1}$ равна

$$\operatorname{Im} G^R(\varepsilon, \mathbf{p}) = -\pi\delta(\varepsilon - \xi_\mathbf{p}) \,. \tag{11.49}$$

Рассмотрим более простой случай шероховатого барьера, когда туннельный матричный элемент не зависит от импульсов: $T_{\mathbf{pp}'} = T_0$. Величина T_0 есть значение туннельного матричного элемента при энергии вблизи E_F. При этом каждая из двух функций Грина в (11.48) интегрируется по импульсам отдельно и соответственно вклад каждой из них есть

$$\int \operatorname{Im} G_{a(b)}^R(\varepsilon, \mathbf{p})\, \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \;=\; -\pi\nu_{a(b)} \,, \tag{11.50}$$

где $\nu_{a(b)}$ — плотность состояний с одной проекцией спина.

Нетрудно проверить, что

$$\int \left(n_F(\varepsilon) - n_F(\varepsilon + eV)\right) d\varepsilon = eV \tag{11.51}$$

при произвольной температуре. Поэтому туннельный ток (11.48) можно записать в виде

$$I(V) = V/R \,, \quad \text{где} \;\; R = \left(4\pi e^2\, |T_0|^2\; \nu_a\, \nu_b\right)^{-1} \tag{11.52}$$

— сопротивление туннельного контакта. Таким образом, для контакта между нормальными металлами справедлив закон Ома, причем сопротивление при $T \ll E_F$ не зависит от температуры.

Нетрудно убедиться в том, что закон Ома с независящим от температуры сопротивлением получается и при произвольной зависимости туннельного матричного элемента $T_{\mathbf{pp}'}$ от импульсов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$. Интересно, что даже в случае туннелирования через идеально гладкий барьер, при котором сохраняется параллельная барьеру компонента импульса, закон Ома по-прежнему имеет место при $T \ll E_F$. Эффект сохранения импульса при туннелировании существенно влияет на характер зависимости $I(V)$ при $eV, T \ll E_F$ только в тех случаях, когда и образец, и пробник представляют собой достаточно низкоразмерные системы.

68 в. Одночастичная функция Грина с собственно-энергетической частью вида (11.31) имеет вид

$$G(\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{1}{G_0^{-1}(\varepsilon, \mathbf{p}) - \Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})} = \frac{1}{\varepsilon(1+b) - \xi_{\mathbf{p}}(1+a) + i0}\,. \tag{11.53}$$

При этом туннельная плотность состояний

$$\nu(\varepsilon) = -\frac{1}{\pi}\int \operatorname{Im} G(\varepsilon, \mathbf{p})\,\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} = \int \delta(\varepsilon(1+b) - \xi_{\mathbf{p}}(1+a))\,\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} = \frac{\nu_0}{1+a}\,, \tag{11.54}$$

где ν_0 — плотность состояний без учета взаимодействия. Таким образом оказывается, что туннельная плотность состояний не зависит от константы b.

Полезно сравнить этот ответ с перенормировкой спектра квазичастиц. Функция Грина имеет полюс при

$$\varepsilon = \varepsilon_0(\mathbf{p}) = \frac{1+a}{1+b}\,v_F(|\mathbf{p}| - p_0)\,. \tag{11.55}$$

Таким образом, константа b дает вклад в перенормировку спектра, не меняz при этом туннельный ток. Так происходит потому, что константа b определяет величину скачка в распределении частиц по импульсам на ферми-поверхности, равную вычету функции Грина в квазичастичном полюсе

$$Z = 1/(1+b)\,. \tag{11.56}$$

Но поскольку перенормировка туннельной плотности состояний пропорциональна

$$\nu(\varepsilon) \approx Z\,(\partial\varepsilon/\partial\xi)^{-1}\,, \tag{11.57}$$

вклады константы b в эффективную массу и в вычет Z взаимно сокращаются. Таким образом, туннельный ток зависит не только от перенормированного спектра квазичастиц $\varepsilon = \xi(p)$, но и от их структуры, описываемой величиной Z.

В случае электрон-фононного взаимодействия $a = 0$, и поэтому туннельный ток оказывается точно таким же, как и в отсутствие взаимодействия. Качественно это объясняется адиабатичностью фононов. Туннелирование электрона в металл происходит мгновенно, поэтому при туннелировании решетку можно считать неподвижной. Таким образом, вероятность туннелирования определяется свойствами свободных электронов. Фононы же затем за время порядка ω_D^{-1} подстраиваются под конечное состояние электронов после туннелирования, каким бы оно ни было.

Заметим, что наш вывод об отсутствии влияния электрон–фононного взаимодействия на туннельный ток имеет весьма общий характер. Как нетрудно видеть, туннельная плотность состояний (11.54) не меняется, если собственно-энергетическая часть $\Sigma(\varepsilon)$ зависит от энергии ε произвольным образом. Для полного сокращения эффектов взаимодействия требуется лишь отсутствие зависимости Σ от $\mathbf{p}$, которое в случае электрон-фононного взаимодействия обеспечивается адиабатичностью фононов.

69. Для нахождения туннельного тока между номальным металлом и сверхпроводником можно воспользоваться общим соотношением (11.42). При этом в сверхпроводнике аномальные средние вида $\langle \hat{a}^+_{\mathbf{p}_1} \hat{a}^+_{\mathbf{p}_2} \rangle$ отличны от нуля, и поэтому требуется заново проанализировать вклад двух членов (11.42) в туннельный ток. Однако оказывается, что поскольку в номальном металле средние $\langle \hat{b}_{\mathbf{p}'_1} \hat{b}_{\mathbf{p}'_2} \rangle$ равны нулю, первый член в (11.42) по-прежнему обращается в нуль при усреднении. Поэтому, как и в задаче 68, можно перейти от (11.42) к выражению (11.48), в которое входят туннельные плотности состояний пробника и образца.

Туннельная плотность состояний дается мнимой частью функции Грина. Аналитическое продолжение функции Грина сверхпроводника (10.35) с положительных мацубаровских частот на вещественную ось дает

$$G^R(\varepsilon,\, \mathbf{p}) = \frac{\varepsilon + \xi_{\mathbf{p}}}{\varepsilon^2 - \xi_{\mathbf{p}}^2 - \Delta^2 + i0\, \mathrm{sign}\, \varepsilon}\,. \tag{11.58}$$

Следовательно туннельная плотность состояний есть

$$\nu(\varepsilon) = -\frac{1}{\pi} \int \mathrm{Im}\, G^R(\varepsilon,\, \mathbf{p})\, \frac{d^3p}{(2\pi)^3} = \nu_0 \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\varepsilon + \xi)\, \delta\left(\varepsilon^2 - \xi^2 - \Delta^2\right) \mathrm{sign}\, \varepsilon\, d\xi\,. \tag{11.59}$$

Вычисляя интеграл от δ-функции, находим

$$\nu(\varepsilon) = \begin{cases} \nu_0 |\varepsilon| / (\varepsilon^2 - \Delta^2)^{1/2} & \text{при } |\varepsilon| > \Delta\,, \\ 0 & \text{при } |\varepsilon| < \Delta\,. \end{cases} \tag{11.60}$$

Обратим внимание на то, что этот результат может быть записан в виде $\pi\nu_0 \partial\xi/\partial\varepsilon$, т. е. как плотность состояний квазичастиц с законом дисперсии $\varepsilon^2 = \Delta^2 + \xi^2$. Хотя такой подход игнорирует различие между туннелирующими электронами и квазичастицами, в которые они превращаются в сверхпроводнике, результат в данном случае оказывается верным. Причина состоит в том, что квазичастицы теории БКШ состоят из двух электронов с одинаковой энергией. Их вклады в туннельную плотность состояний равны $|u_p|^2$ и $|v_p|^2$, где u_p и v_p — коэффициенты преобразования Боголюбова. Но поскольку $u_p^2 + v_p^2 = 1$, суммарный вклад двух компонент квазичастицы в туннельный ток определяется только свойствами квазичастичного спектра. Так происходит потому, что эффекты взаимодействия в теории БКШ учитываются только в рамках теории среднего поля, и поэтому многочастичные эффекты оказываются относительно простыми.

Подставляя туннельную плотность состояний (11.60) в (11.48), находим туннельный ток:

$$I_{N-S}(V) = 4\pi e\nu_a\nu_b\,|T_0|^2 \int\limits_{|\omega|>\Delta} (n_F(\omega) - n_F(\omega+eV))\,\frac{|\omega|\,d\omega}{\sqrt{\omega^2-\Delta^2}}\,. \tag{11.61}$$

Рассмотрим случай нулевой температуры. Пусть $eV > 0$. Тогда интегрирование по энергиям производится в интервале $-eV < \varepsilon < 0$. При $eV < \Delta$ интеграл (11.61) обращается в нуль, поскольку в этой области не выполнено условие $|\varepsilon| > \Delta$. Для $eV > \Delta$ находим

$$I_{N-S}(V) = \frac{1}{eR}\int\limits_{-eV}^{-\Delta} \frac{|\varepsilon|d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2-\Delta^2}} = \frac{\sqrt{(eV)^2-\Delta^2}}{eR}\,. \tag{11.62}$$

Таким образом, зависимость туннельного тока от напряжения имеет порог, равный Δ/e. Рассматривая аналогично случай $eV < 0$, получаем искомую зависимость (11.32), обладающую свойством антисимметрии: $I_{N-S}(-V) = -I_{N-S}(V)$.

Порог при $eV = \Delta$ является резким только при нулевой температуре. При конечной температуре в нормальном металле всегда имеются квазичастицы с энергией $\varepsilon > \Delta$, которые могут туннелировать в сверхпроводник. Поэтому естественно ожидать, что при $T > 0$ корневая особенность размывается и туннельный ток оказывается отличным от нуля при всех напряжениях.

Чтобы убедиться в том, что это действительно так, найдем туннельный ток под порогом при малых температурах $T \ll \Delta$. Интеграл в (11.61) при таких T определяется окрестностями точек $\varepsilon = \pm\Delta$. Введем обозначение $\varepsilon = \pm(\Delta + x)$ в каждой из областей. Как будет ясно из дальнейших вычислений, характерное значение x оказывается порядка T, поэтому можно разложить плотность состояний по x/Δ. Выражение для туннельного тока соответственно принимает вид

$$\begin{aligned} I_{N-S}(V,T) = 4\pi e\nu_a\nu_b|T_0|^2 \int\limits_0^\infty [n_F(\Delta+x) + n_F(-\Delta-x) - \\ - n_F(\Delta+eV+x) - n_F(-\Delta-x+eV)]\,\frac{\Delta\,dx}{\sqrt{2\Delta x}}\,. \end{aligned} \tag{11.63}$$

Упростим полученное выражение, воспользовавшись тождеством $n_F(-\varepsilon) = 1 - n_F(\varepsilon)$, которому удовлетворяет фермиевская функция распределения. Получаем

$$I_{N-S}(V,T) = \frac{1}{eR}\int\limits_0^\infty [n_F(\Delta-eV+x) - n_F(\Delta+x+eV)]\sqrt{\frac{\Delta}{2x}}\,dx\,. \tag{11.64}$$

(мы выразили туннельный матричный элемент T_0 через сопротивление контакта в нормальном состоянии).

При больших положительных значениях энергии фермиевская функция распределения переходит в больцмановскую,

$$n_F(\varepsilon \gg T) \approx e^{-\varepsilon/T}\,, \tag{11.65}$$

и поэтому выражение для туннельного тока принимает следующий вид:

$$I_{N-S}(V,T) = \frac{1}{eR}e^{-\Delta/T}\,\mathrm{sh}\,\frac{eV}{T}\int\limits_0^\infty \sqrt{\frac{2\Delta}{x}}\,e^{-x/T}\,dx\,. \tag{11.66}$$

Вычисляя интеграл по x с помощью известного представление гамма-функции, находим

$$I_{N-S}(V,T) = \frac{\sqrt{2\pi\Delta T}}{eR}\,e^{-\Delta/T}\,\,\mathrm{sh}\,\frac{eV}{T}\,. \tag{11.67}$$

Это выражение неприменимо в узкой окрестности порога при $(eV - \Delta) \sim T$, поскольку при таких напряжениях приближение (11.65) нельзя применять к первому члену в (11.64).

Итак, при $0 < T \ll \Delta$ ток (11.61) при $eV < \Delta$ экспоненциально мал. По мере роста температуры ток под порогом $eV < \Delta$ возрастает, и когда температура достигает T_c, вольт-амперная характеристика становится омической, как для контакта между двумя нормальными металлами.

Помимо термоактивационного вклада в ток, описываемого формулой (11.67), под порогом $eV = \Delta$ существует еще один весьма интересный вклад, не исчезающий при $T \to 0$. Он связан с когерентным туннелированием пары электронов с противоположными импульсами и спинами. Оказавшись в сверхпроводнике, такие два электрона могут образовать куперовскую пару. Туннелирование пары, в отличие от одночастичного туннелирования, не требует затраты энергии Δ на каждую частицу, и поэтому такой вклад не «вымерзает» при низких температурах. Когерентное туннелирование пар электронов часто называют *андреевским отражением*, поскольку описанный процесс перехода двух электронов из нормального металла в сверхпроводник можно рассматривать как превращение электрона в дырку при отражении от поверхности сверхпроводника. Вероятность двухчастичного туннелирования пропорциональна $|T_0|^4$, а не $|T_0|^2$, как для одночастичного туннелирования. Поэтому при $|T_0| \ll 1$ и не слишком низкой температуре двухчастичные процессы очень редки по сравнению с одночастичными. Вследствие этого андреевское отражение вносит существенный вклад в туннельный ток лишь при достаточно низких температурах[5].

70. Поскольку теперь у нас с обеих сторон контакта находятся сверхпроводники, первый член в выражении (11.42) оказывается отличным от нуля. Поэтому усреднение (11.42) необходимо выполнить заново. Как нетрудно видеть, усреднение первого члена (11.42) выполняется так же, как и раньше, с единственной разницей,

[5]Андреевское отражение более подробно рассмотрено в литературе, процитированной на с. 285.

состоящей в замене нормальных средних на аномальные. Соответствующий вклад в восприимчивость χ_M выписывается по аналогии с задачей 68 и оказывается равным

$$\chi_{M,S-S}(i\Omega_n) = ieT \sum_{\omega_m} \sum_{\mathbf{pp}'} |T_{\mathbf{pp}'}|^2 \; F^+_{a,\mu\nu}(i\Omega_n + i\omega_m,\, \mathbf{p})\, F_{b,\nu\mu}(i\omega_m,\, \mathbf{p}')\,, \tag{11.68}$$

где $F_a(i\varepsilon_n, \mathbf{p})$ и $F_b(i\varepsilon_n, \mathbf{p})$ — аномальные функции Грина берегов контакта, а μ и ν — спиновые индексы. Суммируя по μ и ν с учетом спиновой структуры аномальных функций Грина, получаем выражение по виду сходное с (11.45) с точностью до замены нормальных функций Грина на аномальные:

$$\chi_{M,S-S}(i\Omega_n) = -2ieT \sum_{\omega_m} \sum_{\mathbf{pk}} |T_{\mathbf{pk}}|^2 \; F^+_{a}(i\Omega_n + i\omega_m,\, \mathbf{p})\, F_{b}(i\omega_m,\, \mathbf{k})\,. \tag{11.69}$$

Обратим внимание на то, что знаки выражений (11.45) и (11.69) совпадают. Это соответствует общему наблюдению о совпадении знаков «нормальных» и «аномальных» петель, сделанному в решении задачи 63.

Поскольку, как мы увидим, джозефсоновский ток отличен от нуля в равновесии, т. е. при $V = 0$, нам будет достаточно[6] вычислить $\chi_{M,S-S}(i\Omega_n)$ при $\Omega_n = 0$. Аналитическое продолжение оказывается ненужным, и можно сразу записать выражение для туннельного тока:

$$\begin{aligned} I_{S-S} &= 4e\,|T_0|^2\, T\, \mathrm{Im} \sum_{\omega_m} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta^*_a \nu_a\, d\xi_b}{\omega_m^2 + \xi_a^2 + |\Delta_a|^2}\, \frac{\Delta_b \nu_b\, d\xi_b}{\omega_m^2 + \xi_b^2 + |\Delta_b|^2} = \\ &= 4\pi^2 e\,|T_0|^2\, \nu_a \nu_b\, T\; \mathrm{Im} \sum_{\omega_m} \frac{\Delta^*_a \Delta_b}{\sqrt{\omega_m^2 + |\Delta_a|^2}\, \sqrt{\omega_m^2 + |\Delta_b|^2}}\,. \end{aligned} \tag{11.70}$$

Полученное выражение отлично от нуля когда фазы параметра порядка по разные стороны контакта различны. Пусть $\Delta_{a,b} = |\Delta_{a,b}|\, e^{i\varphi_{a,b}}$. Выражая туннельный матричный элемент T_0 через сопротивление контакта в нормальном состоянии, получаем соотношение Джозефсона:

$$I = I_0 \sin(\varphi_b - \varphi_a)\,, \quad \text{где} \quad I_0 = \frac{\pi}{eR}\, T \sum_{\omega_m} \frac{|\Delta_a||\Delta_b|}{\sqrt{\omega_m^2 + |\Delta_a|^2}\sqrt{\omega_m^2 + |\Delta_b|^2}} \tag{11.71}$$

— максимальный ток через контакт. Отметим еще раз, что, в отличие от других разновидностей туннельного тока, джозефсоновский ток не связан с релаксацией к равновесному состоянию. Эффект Джозефсона (11.33) имеет место в термодинамическом равновесии, и соответственно ток (11.71) между двумя сверхпроводниками с различающимися фазами параметра порядка может течь неограниченно долго.

[6] По этой же причине мы не рассматриваем вклад в туннельный ток (11.42), содержащий нормальные средние. Как мы видели в задачах 68 и 69, такой вклад описывает некогерентное туннелирование отдельных электронов и приводит к току, исчезающему при $V = 0$.

Формула (11.71) для I_0 упрощается в случае, когда параметры порядка по обе стороны контакта отличаются только фазой: $|\Delta_a| = |\Delta_b| \equiv \Delta$. При этом

$$I_0 = \frac{\pi}{eR} T \sum_{\omega_m} \frac{\Delta^2}{\omega_m^2 + \Delta^2}\,, \tag{11.72}$$

после чего суммирование легко производится с помощью тождества (7.83). В этом случае мы получаем соотношение (11.34) для максимального джозефсоновского тока I_0.

Что произойдет, если пропустить через контакт ток, больший чем I_0? Детальный ответ на этот вопрос зависит от свойств цепи, в которую включен контакт. Однако джозефсоновский контакт используемый в таком режиме обладает одним весьма общим свойством. При токе превосходящем I_0 на контакте появится конечное напряжение $V(t)$, в общем случае зависящее от времени. Это напряжение приводит к изменению фазы $\varphi = \varphi_b - \varphi_a$ согласно соотношению Джозефсона для фазы

$$\hbar\,\frac{d\varphi}{dt} = 2eV(t)\,, \tag{11.73}$$

которое следует из калибровочной инвариантности. Таким образом, фаза и ток оказываются зависящими от времени. Зная свойства внешней цепи, можно самосогласованно связать напряжение на контакте $V(t)$ и туннельный ток $I(t)$, и таким образом определить динамику системы. Читатель, интересующийся этим режимом работы джозефсоновского контакта, обычно называемым нестационарным эффектом Джозефсона, может найти обсуждение соответствующих вопросов в литературе, процитированной на с. 285.

71 а. Рассмотрим вершинную часть взаимодействия электрона с внешним полем. Затравочная вершинная часть (в отсутствие примесей) равна единице. Вычислим вершинную часть, дающуюся диаграммами на рис. 11.7, используя усредненные по беспорядку мацубаровские функции Грина (см. (9.17)). Рассмотрим вначале поправку к вершине, соответствующую изображенной на рис. 11.9 диаграмме с одной примесной линией.

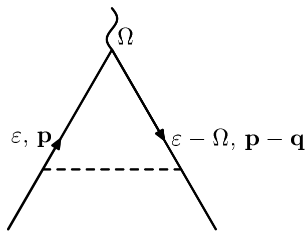


Рис. 11.9

Интересующее нас выражение

$$\Gamma^{(1)}(\varepsilon_m,\,\omega_n,\,\mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi\nu_0\tau}\int \frac{1}{\left(i\varepsilon_m - \xi_{\mathbf{p}} + \dfrac{i}{2\tau}\,\mathrm{sign}\,\varepsilon_m\right)}\times$$
$$\times\,\frac{1}{\left(i\varepsilon_m - i\omega_n - \xi_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} + \dfrac{i}{2\tau}\,\mathrm{sign}(\varepsilon_m - \omega_n)\right)}\,\frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^2}\,. \tag{11.74}$$

вычисляется таким же образом, как ступенька примесной лестницы в задаче 52. Заменяя интеграл по $d^2\mathbf{p}$ интегралом по ξ и вычисляя его методом вычетов, нетрудно показать, что выражение отлично от нуля только в том случае, когда знаки энергий ε_m и $\varepsilon_m - \omega_n$ различаются. (В противном случае оба вычета интегрируемого выражения попадают в одну и ту же полуплоскость комплексного ξ.)

В случае, когда знаки энергий различны и $\omega_n > 0$, получаем выражение

$$\Gamma^{(1)}(\varepsilon_m,\,\omega_n,\,\mathbf{q}) = \frac{1}{1+\tau\omega_n+\tau D\mathbf{q}^2} \tag{11.75}$$

подобное найденному в задаче 52.

Теперь просуммируем всю примесную лестницу, показанную на рис. 11.7. Как и в задаче 52, интересующий нас лестничный ряд образует геометрическую прогрессию. Поэтому

$$\Gamma(\varepsilon_m,\,\omega_n,\,\mathbf{q}) = \frac{1}{1-\Gamma^{(1)}} \approx \frac{1}{\tau(\omega_n+D\mathbf{q}^2)}\,. \tag{11.76}$$

Рассматривая аналогично случай $\omega_n < 0$, можно убедиться в том, что ω_n в (11.76) следует заменить на $|\omega_n|$.

Если же знаки энергий ε_m и $\varepsilon_m - \omega_n$ в функциях Грина в (11.74) совпадают, то зануляется не только первая поправка $\Gamma^{(1)}$, но, как нетрудно видеть, и все остальные члены диаграммного ряда на рис. 11.7. Это является следствием общего правила, отмеченного в гл. 9 — примесная лестница отлична от нуля только если энергии в функциях Грина имеют разные знаки.

71 б. Эффективное взаимодействие с учетом динамической экранировки вычисляется суммированием последовательности «пузырьковых» диаграмм (см. задачу 45):

$$V(\omega_n,\,\mathbf{q}) = \frac{V_0(\mathbf{q})}{1-\Pi(\omega_n,\,\mathbf{q})\,V_0(\mathbf{q})}\,, \tag{11.77}$$

где $\Pi(\omega_n,\,\mathbf{q})$ — поляризационный оператор, а $V_0(\mathbf{q})$ — затравочное взаимодействие. Подставляя поляризационный оператор $\Pi(\omega_n,\,\mathbf{q}) = -\nu D\mathbf{q}^2/(|\omega_n| + D\mathbf{q}^2)$ из (9.23), получаем искомое выражение (11.36).

Для дальнейших вычислений нам понадобится двумерный фурье-образ кулоновского потенциала взаимодействия. Его проще всего найти, проинтегрировав известный фурье-образ трехмерного кулоновского потенциала по q_z:

$$V_0^{(2)}(\mathbf{q}) = V_0^{(3)}(q_x, q_y,\, z=0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^2}{|\mathbf{r}|}\right)_{\mathbf{q}} \frac{dq_z}{2\pi} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{4\pi e^2}{\mathbf{q}^2+q_z^2}\,\frac{dq_z}{2\pi} = \frac{2\pi e^2}{|\mathbf{q}|}\,, \tag{11.78}$$

где $\mathbf{q} = (q_x, q_y)$.

71 в. Поправка к туннельной плотности состояний $\nu(\varepsilon)$ получается из поправки к функции Грина интегрированием по импульсам, которое можно заменить интегрированием по ξ:

$$\frac{\delta\nu(\varepsilon)}{\nu_0} = -\frac{1}{\pi}\int \delta G(\varepsilon,\xi)\,d\xi\,. \tag{11.79}$$

Вычислим $\delta G(i\varepsilon, \mathbf{p})$ при $T = 0$, заменяя суммы по мацубаровским частотам интегралами. Будем для определенности считать, что $\varepsilon > 0$. Выражение, соответствующее диаграмме на рис. 11.8, есть

$$\delta G(i\varepsilon, \mathbf{p}) = G_0^2(i\varepsilon, \mathbf{p}) \iint \Gamma^2(\varepsilon,\, \omega,\, \mathbf{q})\, V(\omega,\, \mathbf{q})\, G(i\varepsilon - i\omega,\, \mathbf{p} - \mathbf{q}) \frac{d\omega\, d^2q}{(2\pi)^3}\,. \tag{11.80}$$

Наибольший вклад в интеграл по энергии возникает от области $\omega > \varepsilon$, так как в этой области вершинная часть $\Gamma(\varepsilon,\, \omega,\, \mathbf{q})$ имеет диффузионный полюс и поэтому велика — см. (11.35). Пренебрегая вкладом области $\omega < \varepsilon$, имеем

$$\delta G(i\varepsilon,\, \mathbf{p}) = \frac{1}{(i\varepsilon - \xi_{\mathbf{p}} + \frac{i}{2\tau})^2} \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{1}{\left(i\varepsilon - i\omega - \xi - \mathbf{q}\mathbf{v}_{\mathbf{p}} - \frac{i}{2\tau}\right)} \times$$
$$\times \frac{V_0(\mathbf{q})}{(\omega + D\mathbf{q}^2)\,(\omega + D\mathbf{q}^2 + \nu D\mathbf{q}^2 V_0(\mathbf{q}))} \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2}\,. \tag{11.81}$$

Удобно сразу проинтегрировать это выражение по ξ. При этом мы пренебрегаем членами ω и $\mathbf{qv}$ в знаменателе по сравнению с τ^{-1}, поскольку нас интересует вклад малых энергий и импульсов. Таким образом, получаем

$$\int \delta G(i\varepsilon, \xi)\, d\xi = 2 \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} d\omega \int \frac{V_0(\mathbf{q})}{(\omega + D\mathbf{q}^2)\,(\omega + D\mathbf{q}^2 + \nu D\mathbf{q}^2 V_0(\mathbf{q}))} \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2}\,. \tag{11.82}$$

Подставляя в это выражение фурье-образ затравочного взаимодействия (11.78), получаем

$$\int \delta G(i\varepsilon, \xi)\, d\xi = -2e^2 \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} d\omega \int\limits_{0}^{\infty} \frac{dq}{(\omega + Dq^2)\,(\omega + Dq^2 + 2\pi\nu e^2 Dq)}\,. \tag{11.83}$$

Проинтегрируем найденное выражение по q. Наибольший вклад в интеграл вносит область

$$\frac{\omega}{2\pi\nu De^2} \le q \le \sqrt{\frac{\omega}{D}}\,, \tag{11.84}$$

в которой можно пренебречь Dq^2 по сравнению с ω, и ω — по сравнению с $\nu e^2 Dq$. Обрезая логарифмически расходящийся интеграл на границах области (11.84), получаем

$$\int \delta G(i\varepsilon, \xi)\, d\xi = \frac{1}{4\pi\nu D} \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \ln \frac{(\nu e^2)^2}{D\omega} \frac{d\omega}{\omega}\,. \tag{11.85}$$

Интеграл по частотам также логарифмически расходится на верхнем пределе. Чтобы получить вклад диффузионной области обрежем интеграл по ω на $\omega\tau \approx 1$, (При бо́льших значениях ω электроны движутся баллистически, поэтому эта область описывается теорией ферми-жидкости и не приводит к сингулярности в плотности состояний.) Вычисляя интеграл по ω и удерживая при аналитическом продолжении с мнимых частот на вещественные лишь главный дважды логарифмический член, получаем поправку к туннельной плотности состояний:

$$\frac{\delta\nu(\varepsilon)}{\nu} = -\frac{1}{8\pi^2\nu D}\ln\frac{(\nu e^2)^4\tau D^2}{|\varepsilon|}\ln\frac{1}{|\varepsilon|\tau}\,. \tag{11.86}$$

Вклад (11.86) в плотность состояний имеет отрицательный знак и сингулярен на малых энергиях $\varepsilon \to 0$. С помощью соотношения Эйнштейна $\sigma = e^2\nu D$ произведение νD можно выразить через проводимость, что дает искомое выражение (11.37) для плотности состояний двумерного металла.

Остановимся на физическом смысле результата (11.86). Туннельная плотность состояний описывает реакцию электронной жидкости на добавление в нее электрона. Роль кулоновского взаимодействия в этом процессе состоит в следующем. Сразу после того, как электрон протуннелировал в металл, его заряд незаэкранирован и создает кулоновское поле. Под действием этого поля остальные электроны начинают двигаться так, чтобы заэкранировать вновь прибывший электрон. Макроскопически этот процесс приводит к максвелловской релаксации заряда. Таким образом, туннелирование одного электрона сопровождается коллективным растеканием заряда многих других электронов, что приводит к уменьшению вероятности туннелирования. В чистом металле максвелловская релаксация происходит почти мгновенно (за время порядка обратной плазменной частоты). Соответственно в этом случае поправки к $G(t-t')$ из-за взаимодействия достаточно быстро затухают на больших временах, и сингулярности в $G(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ не возникает. В то же время в неупорядоченной системе, характеризующейся омической проводимостью, максвелловская релаксация происходит более медленно. Поэтому в этом случае влияние индуцированного туннелирующим электроном растекания заряда на амплитуду туннелирования оказывается существенным и соответствующая поправка к плотности состояний расходится на малых энергиях. Можно сказать, что плохо проводящая система сильнее «сопротивляется» попыткам добавить в нее электрон. Этот эффект и приводит к уменьшению одночастичной плотности состояний.

Поправка (11.86) приводит к специфической температурной зависимости туннельного тока, а также к его неомичности. Повторив проделанное выше вычисление $\delta\nu(\varepsilon)$ при конечной температуре, нетрудно убедиться в том, что результат (11.86) остается в силе с точностью до замены $\varepsilon \to \varepsilon_m = \pi T(2m+1)$. Соответствующая зависимость туннельного тока от T и V оказывается следующей:

$$G = \frac{dI}{dV} = G_0\left(1 + \frac{\delta\nu(\varepsilon_{T,eV})}{\nu}\right), \quad \varepsilon_{T,eV} = \max\left[T, eV\right]. \tag{11.87}$$

Как видно из этого выражения, при уменьшении температуры и напряжения имеет место подавление туннельного тока, причем насыщения при $eV, T \to 0$ не происходит. Сингулярное поведение туннельного сопротивления при малых температурах или напряжениях, возникающее вследствие сингулярности $\nu(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to E_F$, называется *туннельной аномалией*.

72. *(Первое решение.)* Найдем сечение рассеяния нейтрона, взаимодействующего с флуктуациями плотности среды. Согласно золотому правилу Ферми для квантово-механических переходов, общее выражение для вероятности перехода в единицу времени имеет вид

$$w_{i\to f} \;=\; \frac{2\pi}{\hbar^2}\;|\langle f,\mathbf{p}'|\widehat{\mathcal{H}}_{\rm int}|i,\mathbf{p}\rangle|^2\;\delta\left(E_f+\frac{\mathbf{p}'^2}{2m_n}-E_i-\frac{\mathbf{p}^2}{2m_n}\right), \tag{11.88}$$

где $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ — начальный и конечный импульсы нейтрона, а $|i\rangle$ и $|f\rangle$ — исходное и конечное состояния среды. Нормируем начальную волновую функцию нейтрона на единичный поток, $\psi_{n,i}(\mathbf{r})=e^{i\mathbf{pr}}/\sqrt{v}$, где $v=p/m$. Функцию же, описывающую конечное состояние, нормируем на $\delta(\mathbf{p}/2\pi\hbar)$, что дает $\psi_{n,f}(\mathbf{r})=e^{i\mathbf{p}'\mathbf{r}}/\sqrt{V}$, где V — объем системы. При этом выражение для вероятности перехода приобретает следующий вид:

$$dw_{i\to f}=\frac{2\pi}{\hbar^2 vV}\left(\frac{2\pi\hbar^2 a}{\mu}\right)^2\left|\langle i|\int\widehat{\rho}(\mathbf{r})e^{i\mathbf{qr}}\,d^3\mathbf{r}|f\rangle\right|^2\,\delta(E_f-E_i-\hbar\omega)\,\frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^3}, \tag{11.89}$$

где $\mathbf{q}=\mathbf{p}-\mathbf{p}'$, $\hbar\omega=\mathbf{p}^2/2m-\mathbf{p}'^2/2m$ — импульс и энергия, переданные нейтроном среде. Записывая элемент объема в импульсном пространстве как

$$d^3\mathbf{p}'=p'^2dp'do'=\frac{\hbar p'^2d\omega do'}{v'}, \tag{11.90}$$

получим выражение для сечения рассеяния, дающего парциальную вероятность перехода:

$$\frac{d\sigma_{i\to f}}{do'\,d\omega}=\frac{a^2p'^2}{\mu^2vv'V}\,\left|\langle i|\int\widehat{\rho}(\mathbf{r})\,e^{i\mathbf{qr}}\,d^3\mathbf{r}|f\rangle\right|^2\delta(E_f-E_i-\hbar\omega)\,. \tag{11.91}$$

Теперь усредним (11.91) по начальным состояниям системы и просуммируем по конечным:

$$\frac{d\sigma}{do'd\omega}=\frac{\widetilde{a}^2p'}{Vp}\sum_{i,f}w(E_i)\,\delta(E_f-E_i-\hbar\omega)\,\int\!\!\int\langle i|\widehat{\rho}(\mathbf{r})|f\rangle\langle f|\widehat{\rho}(\mathbf{r}')|i\rangle e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}d^3\mathbf{r}\,d^3\mathbf{r}'\,, \tag{11.92}$$

где $w(E_i)=Z^{-1}e^{-\beta E_i}$ — распределение Гиббса, и $\widetilde{a}=am_n/\mu=a(1+m_n/m)$. В силу пространственной однородности системы выражение под знаком интеграла зависит лишь от $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$, и поэтому один из интегралов по $d^3\mathbf{r}\,d^3\mathbf{r}'$ сокращается с объемом системы V. Принимая это во внимание, получаем окончательное выражение для сечения рассеяния:

$$\frac{d\sigma}{do'\,d\omega}=\frac{\widetilde{a}^2p'}{p}\sum_{i,f}\,\int\,w(E_i)\,\delta(E_f-E_i-\hbar\omega)\,\langle i|\widehat{\rho}(\mathbf{r})|f\rangle\langle f|\widehat{\rho}(0)|i\rangle\,e^{i\mathbf{qr}}\,d^3\mathbf{r}\,. \tag{11.93}$$

Чтобы связать полученное выражение со структурным фактором, определенным в (11.29) через мнимую часть двухчастичной функции Грина, $S(\omega,\,\mathbf{q})=2\,\mathrm{Im}\,\mathcal{K}^R(\omega,\,\mathbf{q})$, рассмотрим выражение (11.24) для запаздывающей корреляционной функции плотности и перепишем его в базисе собственных состояний системы. Повторяя вычисления, подобные проделанным в задаче 37, запишем фурье-образ $\mathcal{K}^R(\omega,\,\mathbf{q})$ в следующем виде:

$$\mathcal{K}^R(\omega,\,\mathbf{q}) = \sum_{if}\int \frac{\langle i|\widehat{\rho}(\mathbf{r})|f\rangle\langle f|\widehat{\rho}(0)|i\rangle}{\omega + E_i - E_f + i0}\,(w(E_f) - w(E_i))\,e^{i\mathbf{qr}}\,d^3\mathbf{r}\,. \tag{11.94}$$

Рассмотрим мнимую часть функции (11.94):

$$\operatorname{Im}\mathcal{K}^R(\omega,\,\mathbf{q}) = \pi\sum_{if}\int\langle i|\widehat{\rho}(\mathbf{r})|f\rangle\langle f|\widehat{\rho}(0)|i\rangle\,(w(E_i){-}w(E_f))\,\delta(E_f{-}E_i{-}\omega)e^{i\mathbf{qr}}\,d^3\mathbf{r}\,. \tag{11.95}$$

Заметим, что $w(E_i) - w(E_f) = w(E_i)\left[1 - e^{-\beta(E_f - E_i)}\right] = w(E_i)(1 - e^{-\beta\omega})$. Сравнивая результаты (11.93) и (11.95), получаем

$$\frac{d\sigma}{do'\,d\omega} = \frac{\widetilde{a}^2 p'}{\pi p}\,\frac{\operatorname{Im}\mathcal{K}^R(\omega,\,\mathbf{q})}{1 - e^{-\beta\omega}} = \frac{\widetilde{a}^2 p'}{2\pi p}\,\frac{S(\omega,\,\mathbf{q})}{1 - e^{-\beta\omega}}\,, \tag{11.96}$$

что и доказывает соотношение (11.28).

72. *(Второе решение.)* Выведем соотношение (11.28) между сечением рассеяния нейтрона и функцией Грина $\mathcal{K}^R(\omega,\,\mathbf{q})$, не используя золотого правила. Изложенный ниже вывод опирается на полученный в задаче 40 общий результат (7.38), связывающий мацубаровские и запаздывающие функции Грина.

Идея заключается в том, чтобы рассмотреть функцию Грина нейтрона, рассеивающегося на флуктуациях плотности среды. Вероятность рассеяния в единицу времени может быть получена из соответствующей собственно-энергетической части по формуле $\frac{1}{2\tau} = -\operatorname{Im}\Sigma(\varepsilon,\mathbf{p})$. Поскольку взаимодействие нейтрона с атомами системы можно описать с помощью псевдопотенциала (11.26), нам будет достаточно рассмотреть изображенную на рис. 11.10 диаграмму для собственно-энергетической части низшего порядка.

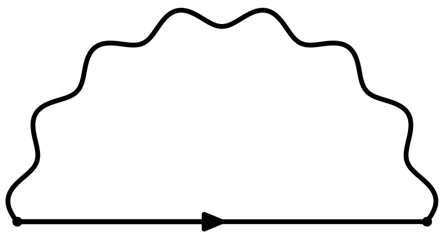


Рис. 11.10

На этой диаграмме прямая линия обозначает гриновскую функцию нейтрона

$$G_n(\varepsilon,\mathbf{p}) = \frac{1}{\varepsilon - \mathbf{p}^2/2m_n + \mu_n + i0\,\mathrm{sign}\,\varepsilon}\,, \tag{11.97}$$

а волнистая — пропагатор флуктуаций плотности $\mathcal{K}(x, x')$. Величина μ_n есть химический потенциал нейтронов, который следует устремить к $-\infty$, поскольку в системе отсутствуют равновесные нейтроны. Рассматривая среду при конечной температуре, удобно воспользоваться мацубаровской техникой. При этом собственно-энергетическая часть нейтрона равна

$$\Sigma(i\varepsilon_m, \mathbf{p}) = \left(\frac{2\pi a}{\mu}\right)^2 T \sum_{\omega_n} \int G_n(i\varepsilon_m - i\omega_n, \mathbf{p}') \, \mathcal{K}(i\omega_n, \mathbf{p}' - \mathbf{p}) \, \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} \,. \tag{11.98}$$

Аналитическое продолжение мацубаровской собственно-энергетической части (11.98) может быть выполнено методом, рассмотренным в задаче 40 б).

Чтобы установить соответствие с использованными в задаче 40 б) величинами, заметим, что корреляционная функция плотности $\mathcal{K}(i\omega_n, \mathbf{q})$ по своим аналитическим свойствам аналогична фононному пропагатору, а функция Грина нейтрона — электронной функции Грина. Выражение (11.98) имеет тот же вид, что электрон-фононная собственно-энергетическая часть (7.37). Поэтому в результате аналитического продолжения получается следующее:

$$\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p}) = \left(\frac{2\pi a}{\mu}\right)^2 \int \ldots \int \frac{\operatorname{Im} G_n^R(\varepsilon', \mathbf{p}') \, \operatorname{Im} \mathcal{K}^R(\omega, \mathbf{p} - \mathbf{p}')}{\varepsilon - \varepsilon' - \omega + i0} \times \\ \times \left(\operatorname{th} \frac{\varepsilon'}{2T} + \operatorname{cth} \frac{\omega}{2T}\right) \frac{d^3p' \, d\omega d\varepsilon'}{\pi (2\pi)^4} \,. \tag{11.99}$$

Мнимая часть (11.99) есть обратное время рассеяния, $\frac{1}{2\tau} = \operatorname{Im} \Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})$, поэтому

$$\frac{1}{\tau} = 2\pi \left(\frac{2\pi a}{\mu}\right)^2 \int \frac{d^3\mathbf{p}' \, d\omega}{(2\pi)^4} \left(\operatorname{th} \frac{\varepsilon'}{2T} + \operatorname{cth} \frac{\omega}{2T}\right) \operatorname{Im} \mathcal{K}^R(\omega, \mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta\left(\varepsilon - \omega - \varepsilon'\right) \,, \tag{11.100}$$

где $\varepsilon' = \mathbf{p}'^2/2m_n - \mu_n$ — энергия рассеянного нейтрона. Как уже было отмечено, переход к пределу одного нейтрона соответствует большим отрицательным μ_n. В пределе $|\mu_n| \gg T$ гиперболический тангенс $\operatorname{th} \varepsilon'/2T$ в (11.100) можно заменить единицей, после чего выражение в скобках в (11.100) оказывается равным $2/(1 - e^{-\beta\omega})$. Последним необходимым шагом является интегрирование по $|\mathbf{p}'|$, устраняющее оставшуюся δ-функцию. Получаем

$$\frac{1}{\tau} = \frac{a^2}{\pi \mu^2} \int m_n |\mathbf{p}'| \, \frac{\operatorname{Im} \mathcal{K}^R(\omega, \mathbf{p} - \mathbf{p}')}{1 - e^{-\omega/T}} \, d\omega do' \,, \tag{11.101}$$

где $|\mathbf{p}'|$ определяется из закона сохранения энергии при рассеянии, $\mathbf{p}'^2/2m_n = \mathbf{p}^2/2m_n - \omega$.

Сечение рассеяния связано с временем рассеяния по формуле $\tau^{-1} = \sigma v$, где $v = p/m_n$ — скорость нейтрона (мы считаем нормировочный объем равным единице). Получаем

$$\sigma = \frac{a^2 m_n^2}{\pi \mu^2} \int \frac{p'}{p} \, \frac{\operatorname{Im} \mathcal{K}^R(\omega, \mathbf{p} - \mathbf{p}')}{1 - e^{-\omega/T}} \, d\omega \, do' \,. \tag{11.102}$$

Представив полное сечение в виде

$$\sigma = \int \frac{d^2\sigma}{d\omega do'}\, d\omega\, do' \tag{11.103}$$

и сравнивая это выражение с (11.102), приходим к (11.96).

73 а. Вычислим структурный фактор $S(\omega, \mathbf{q})$ идеального ферми-газа. Рассмотрим для этого мацубаровский коррелятор плотность–плотность

$$\mathcal{K}_M(i\omega_n,\, \mathbf{q}) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\beta}^{\beta} \langle \mathrm{T}_\tau\, \widehat{\rho}(\mathbf{r},\, \tau)\, \widehat{\rho}(0,0)\rangle e^{i\omega_n\tau - i\mathbf{q}\mathbf{r}}\, d^3\mathbf{r}\, d\tau\,. \tag{11.104}$$

Спаривая ψ–операторы, получаем, что неприводимая часть среднего (11.104) дается обычной петлевой диаграммой и равна

$$\mathcal{K}_M(i\omega_n,\, \mathbf{q}) = T\sum_{\varepsilon_m}\int G\left(i\varepsilon_m,\, \mathbf{p}-\mathbf{q}/2\right)\; G\left(i\varepsilon_m + i\omega_n,\, \mathbf{p}+\mathbf{q}/2\right)\, \frac{2d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,. \tag{11.105}$$

(приводимая часть (11.104) не зависит от τ и потому не дает вклада в структурный фактор при ненулевой частоте). Суммируя по ε_m с помощью тождества (7.85), получаем

$$\mathcal{K}_M(i\omega_n,\, \mathbf{q}) = \int \frac{n_F(\xi_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2}) - n_F(\xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2})}{i\omega_n - \xi_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2} + \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2}}\, \frac{2d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,. \tag{11.106}$$

Аналитическое продолжение этого выражения достигается заменой $i\omega_n$ на $\omega + i0$. Вычисляя мнимую часть и связывая ее со структурным фактором согласно $S(\omega, \mathbf{q}) = 2\,\mathrm{Im}\,\mathcal{K}^R(\omega, \mathbf{q})$, получаем общую формулу

$$S(\omega,\, \mathbf{q}) = 2\pi\int \left(n_F(\xi_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2}) - n_F(\xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2})\right) \delta\left(\omega + \xi_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2} - \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2}\right)\, \frac{2d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,. \tag{11.107}$$

Упростим интеграл по $d^3\mathbf{p}$ в выражении (11.107). Пусть ось z направлена вдоль вектора $\mathbf{q}$. Введем обозначение $x = \cos\theta$, где θ — угол между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$. Тогда интеграл (11.107) перепишется в таком виде:

$$S(\omega,\, \mathbf{q}) = 2\pi\int\limits_0^\infty\int\limits_{-1}^{1} \left(n_F(\xi_-) - n_F(\xi_+)\right)\, \delta\left(\omega - \frac{pqx}{m}\right) \frac{2\pi p^2\, dp\, dx}{(2\pi)^3}\,, \tag{11.108}$$

где

$$\xi_\pm = \frac{p^2 - p_0^2}{2m} + \frac{q^2}{8m} \pm \frac{pqx}{2m}\,. \tag{11.109}$$

Интегрирование по x сводится к замене x на $x_0 = m\omega/pq$. При этом следует учесть, что интеграл равен нулю при $|x_0| > 1$. Таким образом, структурный фактор есть

$$S(\omega, \mathbf{q}) = \frac{m}{\pi q}\int\limits_{m|\omega|/q}^{\infty} \left(n_F(\xi_-) - n_F(\xi_+)\right)\, p dp\,. \tag{11.110}$$

До сих пор мы не делали никаких предположений о величине температуры. Хотя интеграл в (11.110) вычисляется элементарно при произвольной температуре, мы найдем структурный фактор $S(\omega, \mathbf{q})$ только в пределе нулевой температуры. При $T = 0$ фермиевская функция распределения принимает значения 0 и 1. Поэтому выражение (11.110) можно записать в виде

$$S(\omega, q) = \frac{m}{\pi q} \int\limits_{m|\omega|/q}^{\infty} \Big(\theta(p_-^2 - p^2) - \theta(p_+^2 - p^2)\Big)\, p dp\,, \qquad (11.111)$$

где

$$p_\pm^2 = p_0^2 - q^2/4 \mp m\omega \qquad (11.112)$$

— корни уравнений $\xi_\pm = 0$. Рассмотрим для определенности случай $\omega > 0$. Тогда $p_- > p_+$. В зависимости от того, как нижний предел интегрирования $m\omega/q$ соотносится с p_+ и p_-, возможны разные случаи:

а) Во-первых, при $m\omega/q > p_-$ интеграл (11.111) оказывается равным нулю. Это происходит при

$$(m\omega/q)^2 > p_0 + m\omega - q^2/4\,. \qquad (11.113)$$

Выделяя полный квадрат, получаем уравнение границы области $S(\omega, \mathbf{q}) > 0$:

$$|m\omega/q \,-\, q/2| = p_0\,. \qquad (11.114)$$

Эта граница состоит из двух несвязных частей:

$$\omega_{1,2}(q) = \pm p_0 q/m + q^2/2m\,. \qquad (11.115)$$

б) Во-вторых, при $m\omega/q < p_+$ интегрирование в (11.111) производится от p_- до p_+, что дает

$$S = \frac{m}{2\pi q}\,\Big(p_+^2 - p_-^2\Big) = \frac{m\omega}{\pi q}\,. \qquad (11.116)$$

Это выражение справедливо в области

$$(m\omega/q)^2 < p_0 - m\omega - q^2/4\,, \qquad (11.117)$$

т. е. при

$$\omega < \omega_3(q) = p_0 q/m + q^2/2m\,. \qquad (11.118)$$

в) Наконец, если $p_+ < m\omega/q < p_-$, то интегрировать по dp следует от $p = m\omega/q$ до $p = p_-$. В этом случае структурный фактор равен

$$S(\omega, \mathbf{q}) = \frac{m}{2\pi q}\,\Big(p_-^2 - (m\omega/q)^2\Big)\,. \qquad (11.119)$$

Удобно переписать это выражение, выделив полный квадрат:

$$S(\omega, \mathbf{q}) = \frac{m}{2\pi q}\,\Big(p_0^2 - (m\omega/q - q/2)^2\Big)\,. \qquad (11.120)$$

Собирая результаты для различных предельных случаев вместе и вводя безразмерные переданные энергию $\tilde{\omega} = m\omega/p_0^2$ и импульс $\tilde{q} = q/p_0$, приходим к следующему ответу:

$$S(q,\omega) = \frac{mp_0}{2\pi\tilde{q}} \begin{cases} 0 & \text{при } \tilde{\omega} > \tilde{q} + \tilde{q}^2/2\,; \\ 0 & \text{при } 0 < \tilde{\omega} < \tilde{q}^2/2 - \tilde{q}\,; \\ 2\tilde{\omega} & \text{при } 0 < \tilde{\omega} < \tilde{q} - \tilde{q}^2/2\ \ ; \\ 1 - (\tilde{\omega}/\tilde{q} - \tilde{q}/2)^2 & \text{при } \tilde{\omega} > \tilde{q} - \tilde{q}^2/2\ \ . \end{cases} \tag{11.121}$$

На рис. 11.11 изображены линии уровня $S(\omega, q)$ и показаны границы области, где $S(\omega,\, q) \neq 0$. Изображены также кривые $\omega = q^2/2m$ и $m\omega = p_0 q - q^2/2$. Граница области $S(\omega, \mathbf{q}) > 0$ пересекает прямую $\omega = 0$ при $q = 2p_0$. В этой же точке оканчивается граница области $m\omega = p_0 q - q^2/2$.

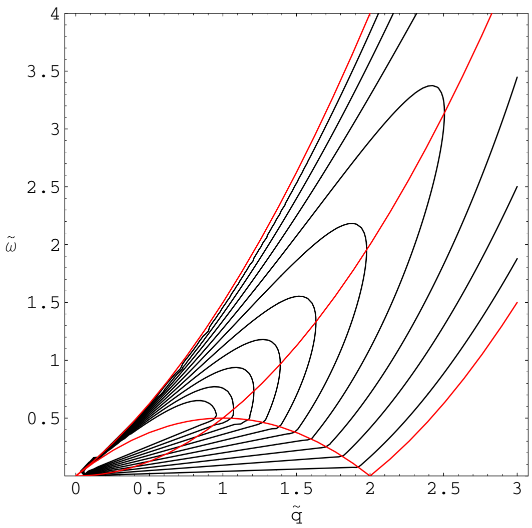


Рис. 11.11

Таким образом, точка $q = 2p_0$ оказывается особой точкой структурного фактора. Эту особенность можно интерпретировать, рассматривая рассеяние нейтрона жидкостью как рождение пары частица–дырка. При этом ω — это энергия пары, а $\mathbf{q}$ — ее импульс. Если $q < 2p_0$, то энергия пары может быть как угодно мала, потому что пару с таким импульсом можно создать, переместив частицу вдоль ферми-поверхности в состояние с другим импульсом, но с почти той же энергией. Если же $q > 2p_0$, то частицу придется перевести в состояние с другой энергией, поскольку на ферми-поверхности нет состояний с требуемым импульсом. Именно этот эффект и создает особенность при $q = 2p_0$.

Интересно отметить, что максимум структурного фактора $S(\omega, \mathbf{q})$ при фиксированном $|\mathbf{q}| > p_0$ достигается при $\omega = \mathbf{q}^2/2m$, что соответствует закону дисперсии частиц (см. (11.120)). Парабола $\omega = q^2/2m$ изображена на рис. 11.11.

Решение 73 б. Рассмотрим структурный фактор ферми-жидкости. Естественно ожидать, что он будет похож на структурный фактор ферми-газа, с тем лишь отличием, что в нем должно быть слагаемое, отвечающее процессам рассеяния с испусканием кванта нуль-звука.

Гамильтониан взаимодействующих фермионов имеет вид (8.1). Для простоты будем считать, что взаимодействие между частицами слабое и короткодействующее: $V(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = g\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$. Мацубаровский коррелятор плотность–плотность $K(\omega,\, \mathbf{q})$, через который выражается структурный фактор, получается суммированием «пузырьковых» диаграмм, изображенных на рис. 11.12.

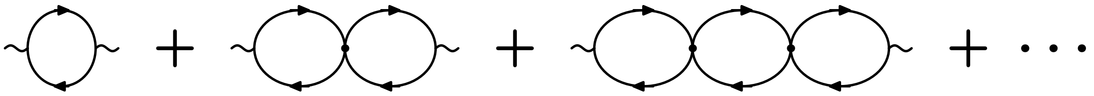


Рис. 11.12

Вершина взаимодействия на рис. 11.12 с учетом спиновой структуры есть

$$g\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\left(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\alpha'\beta'} - \delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\beta\beta'}\right)\,, \tag{11.122}$$

где первое слагаемое (11.122) представляет собой хартриевский вклад, а второе — фоковский, или обменный вклад. В случае короткодействия оба эти вклада имеют одну и ту же координатную зависимость и должны быть рассмотрены одновременно.

Отметим, что в задаче 44 при рассмотрении последовательности диаграмм для динамически экранированного кулоновского взаимодействия $V(\omega, |\mathbf{q}|)$ мы ограничились учетом одного лишь хартриевского вклада в вершину взаимодействия. Такое упрощение было возможно из-за того, что для кулоновского взаимодействия при малом переданном импульсе $|\mathbf{q}| \ll p_0$ хартриевский вклад много больше фоковского. Более того, именно хартриевское взаимодействие $4\pi e^2/\mathbf{q}^2$ расходится при $\mathbf{q}\to 0$, из-за чего и возникает необходимость рассматривать задачу об экранировании. В случае же короткодействия ситуация совершенно другая. Это видно уже из того, что хартриевский и фоковский вклады полностью сокращают друг друга для частиц с одной и той же проекцией спина. Короткодействующий потенциал приводит к взаимодействию только для фермионов с противоположными спинами. Чтобы принять во внимание это обстоятельство необходимо просуммировать лестничные диаграммы на рис. 11.12 с учетом спиновой структуры взаимодействия (11.122).

Диаграммам на рис. 11.12 соответствует запаздывающая двухчастичная функция Грина

$$K^R(\omega,\, \mathbf{q}) = -\Pi(\omega,\, \mathbf{q}) - g\Pi^2(\omega,\, \mathbf{q}) - g^2\Pi^3(\omega,\, \mathbf{q}) - \ldots = -\frac{\Pi(\omega,\, \mathbf{q})}{1-g\Pi(\omega,\, \mathbf{q})}\,, \tag{11.123}$$

где $\Pi(\omega,\, \mathbf{q})$ — запаздывающий поляризационный оператор. Воспользуемся найденным в задаче (44) точным выражением для $\Pi(\omega,\, \mathbf{q})$ идеального ферми-газа:

$$\Pi(\omega, \mathbf{q}) = \frac{\nu_0}{8a}\left(F(s-a) - F(s+a)\right)\,, \quad a = \frac{q}{2p_0},\ s = \frac{\omega + i0}{v_F k}, \tag{11.124}$$

где

$$F(u) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{1-x^2}{u-x}dx = 2u + (1-u^2)\ln\frac{u+1}{u-1}\,. \tag{11.125}$$

Чтобы получить запаздывающую функцию мы добавили $i0$ к ω. Отметим, что поляризационный оператор (11.124) в два раза меньше соответствующего поляризационного оператора из задачи 44. Дело в том, что частичное сокращение между хартриевским и фоковским вкладами (11.122) приводит к тому, что в (11.124) входит плотность состояний ν_0 с одной проекцией спина.

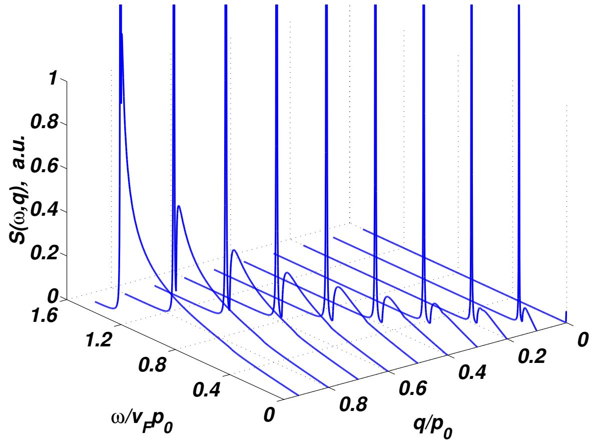


Рис. 11.13

Структурный фактор $S(\omega, \mathbf{q}) = 2\,\mathrm{Im}\,K^R(\omega, \mathbf{q})$, соответствующий (11.123) и (11.124), изображен на рис. 11.13 для $g\nu_0 = 3$. Обратим внимание на резкий пик при частотах несколько выше границы непрерывного спектра, сответствующего рассмотренному в части а) вкладу квазичастиц. Этот пик представляет собой вклад нуль-звуковой моды. Нуль-звуковой пик на рис. 11.13 характеризуется приблизительно линейной зависимостью ω от q. Он существует только при не слишком больших q и вливается в непрерывный спектр при $q \approx 0.8p_0$. Такое поведение иллюстрирует рассмотренное в задаче (44) свойство закона дисперсии коллективных мод в ферми-жидкости — иметь точку окончания на границе непрерывного спектра квазичастичных возбуждений.

Интересно рассмотреть область малых $q \ll p_0$, $\omega \ll E_F$, в которой выражение для поляризационного оператора (11.124) упрощается:

$$\Pi(\omega, \mathbf{q}) \equiv \Pi(s) = -\nu_0 \left(1 - \frac{s}{2} \ln \frac{s+1}{s-1}\right), \quad s = \frac{\omega + i0}{v_F q}. \tag{11.126}$$

Уравнение $g\Pi(s) = 1$ для полюса $K^R(\omega, \mathbf{q})$ в точности совпадает с полученным в гл. 8 уравнением (8.11), дающим закон дисперсии нулевого звука. Скорость нуль-звуковой моды $\omega = s_0 v_F |\mathbf{q}|$ зависит от константы взаимодействия g, причем $s_0 > 1$ при любом отталкивательном взаимодействии $g > 0$.

С другой стороны, мнимая часть выражения (11.126) отлична от нуля только при $s < 1$, причем в этой области $\mathrm{Im}\,\Pi(s) = \frac{\pi}{2}\nu_0 s$. Поэтому структурный фактор (11.123) можно записать в виде

$$K(s) = \frac{A}{s - s_0} + K_{\mathrm{per}}(s)\,, \tag{11.127}$$

где A — вычет $K(s)$ в полюсе $s = s_0$, а $K_{\text{рег}}(s)$ — регулярная функция, равная нулю при $s > 1$.

Величину A нетрудно найти, вычисляя вычет выражения $K(s) = -\Pi(s)/(1 - g\Pi(s))$. Получаем

$$A = \frac{\Pi(s_0)}{g\left.\dfrac{d\Pi(s)}{ds}\right|_{s=s_0}} = \frac{2}{g^2\nu_0\left[\ln\dfrac{s_0+1}{s_0-1} - \dfrac{2s_0}{s_0^2-1}\right]}\,. \tag{11.128}$$

Учитывая, что скорость нуль-звука s_0 удовлетворяет соотношению $g\Pi(s) = 1$, выражение для A можно упростить:

$$A = \frac{s_0(s_0^2-1)}{g\left[1 - g\nu_0\,\left(s_0^2-1\right)\right]}\,. \tag{11.129}$$

Итак, нуль-звуковой полюс в (11.127) приводит к δ-функционной особенности в структурном факторе. Пик оказывается резким, поскольку в линеаризованной теории ферми-жидкости нуль-звук не затухает. В действительности же ширина пика будет конечной, порядка обратного времени затухания $\approx \max\,[\omega^2, T^2]$.

Подчеркнем еще раз, что выражение (11.127) справедливо только при достаточно малых q, а при больших q нуль-звуковой пик сливается с непрерывным вкладом, и $K_{\text{рег}}(s)$ исчезает. Отметим, что с формальной точки зрения наши результаты ограничены предположением о малости взаимодействия g, позволяющим отбросить все диаграммы кроме пузырьковых. На самом же деле все сказанное о поведении структурного фактора в области $q \ll p_0$, $\omega \ll E_F$ качественно справедливо и для произвольно сильного взаимодействия. Дело в том, что в этой области работает теория ферми-жидкости и для нахождения корреляционной функции плотность–плотность можно воспользоваться кинетическим уравнением (8.7), решение которого эквивалентно суммированию пузырьковых диаграмм.

74 а. Из гамильтониана (11.27) взаимодействия нейтронов с плотностью ядер, рассмотренного в задачах (72) и (73), нетрудно получить вид взаимодействия в модели дебаевского желе:

$$\widehat{\mathcal{H}}_{\text{int}} = -\frac{2\pi a\hbar^2}{\mu}\delta\widehat{\rho}(\widehat{\mathbf{R}}, t)\,, \quad \delta\widehat{\rho} = -\rho_0\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\,, \tag{11.130}$$

где $\widehat{\mathbf{R}}$ — координата нейтрона. Соответственно, вклад фононов в структурный фактор есть $S(\omega, \mathbf{q}) = 2\,\mathrm{Im}\,\mathcal{K}^R(\omega, \mathbf{q})$, где

$$\mathcal{K}^R(\mathbf{r}, t) = -i\left(\frac{2\pi a\hbar^2}{\mu}\right)^2 \begin{cases} \langle\delta\widehat{\rho}(\mathbf{r}, t)\delta\widehat{\rho}(0,0) - \delta\widehat{\rho}(0,0)\delta\widehat{\rho}(\mathbf{r}, t)\rangle_{\text{т}}\,, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \tag{11.131}$$

Сравнивая это выражение с определением фононной функции Грина $\mathcal{D}^R(x, x') = -i\theta(t-t')\langle[\widehat{\varphi}(x), \widehat{\varphi}(x')]\rangle_{\text{т}}$, где $\widehat{\varphi}(x) = c\sqrt{\rho_0}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}$ (см. выражения (6.5) и (6.7)), получаем соотношение

$$\mathcal{K}^R(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{2\pi a\hbar^2}{\mu c}\right)^2 \mathcal{D}^R(\mathbf{r}, t)\,. \tag{11.132}$$

Запаздывающая функция Грина дебаевских фононов есть

$$\mathcal{D}^R(\omega, \mathbf{q}) = \frac{\omega_0^2(\mathbf{q})}{\omega^2 - \omega_0^2(\mathbf{q}) + i0\,\mathrm{sign}\,\omega}\,, \quad \omega_0(\mathbf{q}) = c|\mathbf{q}|\,. \tag{11.133}$$

Отсюда $\mathrm{Im}\,\mathcal{D}^R(\omega, \mathbf{q}) = \frac{\pi}{2}\omega_0(\mathbf{q})\left[\delta(\omega - \omega_0(\mathbf{q})) - \delta(\omega + \omega_0(\mathbf{q}))\right]$, и поэтому

$$S(\omega, \mathbf{q}) = \pi \left(\frac{2\pi a\hbar^2}{\mu c}\right)^2 \omega_0(\mathbf{q})\left(\delta(\omega - \omega_0(\mathbf{q})) - \delta(\omega + \omega_0(\mathbf{q}))\right)\,. \tag{11.134}$$

Отметим, что отрицательный знак второго слагаемого в (11.134) согласуется с требованием положительности вероятности рассеяния нейтронов. Это обеспечивается множителем $1/(1 - e^{-\beta\omega})$ в выражении (11.28) для сечения рассеяния.

Как следует из (11.134), вероятность рассеяния с передачей кристаллу энергии ω и импульса $\mathbf{q}$ пропорциональна

$$(N_{\mathbf{q}} + 1)\;\delta(\omega - \omega_0(\mathbf{q}))\; + \;N_{\mathbf{q}}\,\delta(\omega + \omega_0(\mathbf{q}))\,, \quad \text{где} \quad N_{\mathbf{q}} = \frac{1}{e^{\beta\omega_0(\mathbf{q})} - 1} \tag{11.135}$$

— бозевская функция распределения. Таким образом, положение пика в структурном факторе, рассматриваемое как функция ω и $\mathbf{q}$, позволяет определить спектр фононов.

74 б. Функция Грина фонона в металле $D_0(\omega, \mathbf{q}) = \omega_0^2(\mathbf{q})/(\omega^2 - \omega_0^2(\mathbf{q}))$ перенормируется за счет электрон–фононного взаимодействия. Согласно теории Мигдала (см. задачу 31), все наиболее существенные эффекты можно учесть с помощью поляризационного оператора, причем сам поляризационный оператор может быть найден через перенормированные функции Грина без учета вершинных поправок. Соответственно

$$D(\omega, \mathbf{q}) = \frac{D_0(\omega, \mathbf{q})}{1 - g^2\Pi(\omega, \mathbf{q})D_0(\omega, \mathbf{q})} = \frac{\omega_0^2(\mathbf{q})}{\omega^2 - \omega_0^2(\mathbf{q})(1 + g^2\Pi(\omega, \mathbf{q}))}\,, \quad \omega_0(\mathbf{q}) = c|\mathbf{q}|\,, \tag{11.136}$$

где поляризационный оператор $\Pi(\omega, \mathbf{q})$ дается соотношениями (11.124) и (11.125). При этом, как и в задачах 31 и 44, нас интересует только «хартриевские» вклады, дающиеся диаграммами, которые распадаются на несвязные части при разрезании любой фононной линии (остальные диаграммы малы в силу теоремы Мигдала — см. задачу 30). Поэтому в выражениях (11.124) и (11.125) в данном случае следует использовать плотность состояний $\nu = 2\nu_0$, учитывающую обе проекции спина.

Поскольку характерные ω и q, представляющие для нас интерес, есть $\omega \approx cq$, безразмерный параметр $s = \omega/v_F q$ в данном случае много меньше единицы. Соответственно, переходя в (11.124) к пределу $s \ll a = k/2p_0$, мы получаем

$$\Pi(a)_{s=0} = -\frac{\nu}{4a}\left(2a + \left(1 - a^2\right)\ln\frac{1 + a}{1 - a}\right)\,. \tag{11.137}$$

Плотность состояний ν в (11.137) должна быть определена с учетом электрон–фононной перенормировки, найденной в задаче 29. Полюс функции Грина (11.136) дает перенормированный закон дисперсии фононов

$$\omega = \omega_0(\mathbf{q})\sqrt{1 + g^2\Pi(|\mathbf{q}|/2p_0)} \tag{11.138}$$

Выражение (11.137) имеет при $|\mathbf{q}| = 2p_0$ слабую особенность, приводящую к логарифмической расходимости перенормированной скорости звука $\tilde{c} = d\omega/dq$. Эта особенность и есть коновская аномалия.

Вклад фононов в структурный фактор, согласно (11.132) и (11.136), есть

$$S(\omega,\, \mathbf{q}) = 2\left(\frac{2\pi a\hbar^2}{\mu c}\right)^2 \operatorname{Im} \frac{\omega_0^2(\mathbf{q})}{(\omega + i0)^2 - \omega_0^2(\mathbf{q})(1 + g^2\Pi(\omega + i0, \mathbf{q}))}\,. \tag{11.139}$$

На рис. 11.14 мы изобразили структурный фактор, получающийся при использовании выражений (11.124) и (11.125) для $\Pi(\omega,\, \mathbf{q})$. Значение константы электрон–фононного взаимодействия было выбрано равным $g^2\nu = 8/9$.

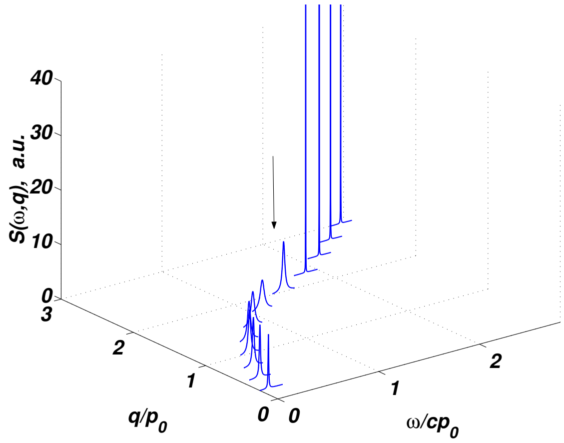


Рис. 11.14

Положение пика в плоскости (ω, q) дает закон дисперсии фононов $\omega(q)$. При $q \leqslant 2p_0$ зависимость $\omega(q)$ приблизительно линейная с наклоном $d\omega/dq = c\sqrt{1 - g^2\nu}$, что соответствует переномировке скорости акустических фононов — см. задачу 31 а. При $q > 2p_0$ перенормировка скорости постепенно исчезает. На рис. 11.14 хорошо видно также резкое возрастание наклона $d\omega/dq$ в окрестности $q = 2p_0$, помеченной стрелкой. Конечная ширина пиков на рис. 11.14 связана с тем, что электрон–фононное взаимодействие приводит к затуханию фононов (см. задачу 31 б).

Глава 12.

Бозонизация и латтинжеровская жидкость

Взаимодействующие фермионы на прямой представляют собой особую интересную систему. Оказывается, даже слабое взаимодействие полностью меняет характер одномерной ферми-системы, приводит к перестройке спектра возбуждений и делает теорию ферми-жидкости неприменимой (см. задачу 82, в которой отсутствие ферми-жидкости при $D = 1$ проиллюстрировано с помощью теории возмущений). Одномерные фермионы могут быть успешно описаны в рамках модели Томонаги–Латтинжера и ее обобщений, и по этой причине часто используется название *латтинжеровская жидкость*.

Метод бозонизации, с помощью которого строится теория латтинжеровской жидкости, является своеобразным квантовомеханическим аналогом гидродинамики. Элементарные возбуждения системы вводятся с помощью фурье-компонент операторов плотности и коммутационных соотношений между ними. Соответствующие квазичастицы подчиняются статистике Бозе. Исходные же фермионные операторы в таком представлении выражаются через бозонные операторы весьма нетривиально. Операторные соотношения между фермионными и бозонными полями напоминают соотношения Йордана–Вигнера для фермионного представления спиновых операторов, рассмотренного в разд. 1.4.

Вообще говоря, представление возбуждений ферми-системы с помощью эквивалентных бозонов имеет место для произвольной размерности системы. Так, в гл. 8 мы продемонстрировали, что теорию ферми-жидкости можно «проквантовать», используя бозе-операторы электрон-дырочных пар (см. разд. 8.3 и задачи 44, 45, 49). Однако только в одномерном случае метод бозонизации приводит к результатам, которые невозможно или же трудно получить более стандартными методами.

Помимо задачи о взаимодействующих фермионах на прямой, метод бозонизации находит применение также при изучении динамики фермионов в произвольной размерности. В частности, этот метод оказывается весьма удобным при описании встряски ферми-системы под действием возмущения, зависящего от времени. Примерами такого рода являются «катастрофа ортогональности» и задача о крае рентгеновского спектра поглощения в металле (см. задачи 78 и 79).

12.1. Гидродинамика одномерного ферми-газа

Гидродинамическое описание применимо, если характерные пространственный и временной масштабы велики по сравнению с микроскопическими длинами и временами. Соответствующие условия для ферми-газа записываются в виде: $k \ll p_0$, $\omega \ll E_F$.

Некоторые факты гидродинамики одномерного ферми-газа нам уже известны из задачи 26, в которой мы нашли флуктуации числа частиц одномерного ферми-газа внутри фиксированного интервала большой длины $L \gg p_0^{-1}$,

$$\langle\!\langle N_L^2 \rangle\!\rangle = \langle N_L^2 \rangle - \langle N_L \rangle^2 = \frac{1}{\pi^2} \ln(p_0 L)\,, \tag{12.1}$$

а также из задачи 25, в которой был найден коррелятор плотность–плотность

$$Q(\omega, k) = \nu \, \frac{v^2 k^2}{\omega^2 - v^2 k^2 + i\delta \operatorname{sign}\omega}\,, \quad k \ll p_0\,,\ \omega \ll E_F\,, \tag{12.2}$$

где ν — плотность состояний на уровне Ферми.

Интересно сопоставить эти результаты со свойствами одномерной упругой среды. Гриновская функция фононов в одномерной модели Дебая есть $D(x-x', t-t') = -i\rho c^2 \left\langle \mathrm{T}\, \partial_x \widehat{u}(x,t) \partial_x \widehat{u}(x',t') \right\rangle$, где $\widehat{u}(x,t)$ — оператор смещения среды [1]. В одномерном случае оператор $\widehat{u}(x,t)$ имеет вид

$$\widehat{u}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_k \frac{\operatorname{sign} k}{(2\rho c|k|)^{1/2}} \left(b_k e^{ikx - ic|k|t} + b_k^+ e^{-ikx + ic|k|t} \right)\,, \tag{12.3}$$

где L — длина системы, а b_k и b_k^+ — канонические бозе-операторы фононов [2] (ср. с трехмерным выражением (6.1)). В фурье-представлении:

$$D(\omega, k) = \frac{c^2 k^2}{\omega^2 - c^2 k^2 + i\delta \operatorname{sign}\omega}\,. \tag{12.4}$$

Обратим внимание на то, что это выражение совпадает с коррелятором плотности (12.2), с точностью до множителя ν и замены $v \to c$. Можно сделать еще одно наблюдение, сравнив флуктуации числа частиц (12.1) в интервале большой длины с коррелятором смещений (12.3). Пользуясь теоремой Вика, усредняем:

$$\langle\, \widehat{u}(x,t) \widehat{u}(x',t') \rangle_{t'=t} = \int \frac{e^{ik(x'-x)}}{2\rho c|k|} = \frac{1}{2\pi\rho c} \ln \frac{L}{|x-x'|}\, \frac{dk}{2\pi}\,. \tag{12.5}$$

[1]Обычно гриновская функция фононов вводится несколько иначе, через операторы $\widehat{\varphi}(x,t)$ (см. [1], (7.9)–(7.16)). Однако в модели Дебая ∇u и φ отличаются множителем: $\varphi(r,t) = c\sqrt{\rho}\,\nabla u(r,t)$.

[2]Предполагается, что $\sum\limits_k ... = \int ... \frac{dk}{2\pi}$ и $[b_k, b_{k'}^+] = 2\pi L \delta(k-k')$, где L — размер системы. Данные соглашения используются всюду в этой главе.

Отсюда нетрудно получить, что

$$\langle\, (\widehat{u}(x,t) - \widehat{u}(x',t))^2 \,\rangle \;=\; \frac{1}{\pi\rho c}\ln\frac{|x-x'|}{a}\,, \tag{12.6}$$

где a — период решетки (см. также задачу 54, где коррелятор смещений (12.5) найден при произвольной температуре).

Совпадение корреляторов (12.6) и (12.1) подсказывает, что должно существовать преобразование, переводящее одну задачу в другую. Сравнивая коэффициенты перед логарифмами, определяем правило соответствия:

$$\partial_x\widehat{u}(x,t) \quad\Leftrightarrow\quad (\pi/\rho c)^{1/2}\,\widehat{n}(x,t) = (\pi/\rho c)^{1/2}\widehat{\psi}^{+}(x,t)\psi(x,t)\,. \tag{12.7}$$

Нетрудно видеть, что если бы нашлось преобразование, обеспечивающее такую связь, то при этом коррелятор плотность–плотность (12.2) в точности перешел бы в гриновскую функцию фононов.

Преобразование фермионной задачи в эквивалентную задачу динамики одномерной упругой среды называется *бозонизацией*. Оно имеет много общего с преобразованием Йордана–Вигнера, связывающим спиновые и фермиевские операторы в одномерной цепочке (см. разд. 1.4). Причина сходства заключается в том, что спиновые операторы на разных узлах коммутируют, а значит — удовлетворяют таким же бозонным коммутационным соотношениям, как и операторы фононов. Эту аналогию можно развить, построив из спиновых операторов, взятых на узлах, операторы спиновых волн в импульсном представлении: и фононы, и спиновые волны представляют собой квазичастицы, подчиняющиеся бозе-статистике. Однако, в отличие от точного преобразования Йордана–Вигнера, преобразование бозонизации — приближенное. Точность его ограничена пределом длинных волн. Иначе говоря, оно законно только если речь идет об эффектах в ферми-системе, связанных с электронами или дырками вблизи уровня Ферми.

12.2. Коммутаторы операторов плотности

Преобразование бозонизации нетрудно построить явно. Начнем с того[3], что разобьем фурье-компоненту оператора плотности бесспиновых фермионов на два слагаемых:

$$\widehat{\rho}(k) = \sum_p a^{+}_{p-k/2}a_{p+k/2} \;=\; \widehat{\rho}_1(k) + \widehat{\rho}_2(k)\,, \tag{12.8}$$

где

$$\widehat{\rho}_1(k) = \frac{1}{L}\sum_{p>0} a^{+}_{p-k/2}a_{p+k/2}\,,\quad \widehat{\rho}_2(k) = \frac{1}{L}\sum_{p<0} a^{+}_{p-k/2}a_{p+k/2}\,. \tag{12.9}$$

Как уже было отмечено, всегда подразумевается, что существенными окажутся только состояния вблизи уровня Ферми, поэтому k мало, а p близко либо к p_0, либо

[3] Мы следуем работе: S. Tomonaga, *Progr. Theor. Phys. (Kyoto)*, v. 5, p. 544 (1950)

к $-p_0$. Такого рода соображения и служат основой для выбора представления (12.8) оператора $\widehat{\rho}(k)$ в виде суммы «правого» и «левого» операторов плотности (12.9), а также всех нижеследующих манипуляций с $\widehat{\rho}_{1,2}(k)$.

Рассмотрим коммутационные соотношения для введенных операторов. Фурье-компоненты полной плотности $\widehat{\rho}(k)$ просто коммутируют:

$$[\widehat{\rho}(k), \widehat{\rho}(k')] = 0\,. \tag{12.10}$$

А вот коммутаторы $\widehat{\rho}_1(k)$ и $\widehat{\rho}_2(k)$ нетривиальны. Для примера найдем

$$[\widehat{\rho}_1(k), \widehat{\rho}_1(k')] = \frac{1}{L}\sum_{p>0}\left[a^+_{p-k/2}a_{p+k'+k/2}\theta\left(p+\frac{k}{2}+\frac{k'}{2}\right) - a^+_{p-k'-k/2}a_{p+k/2}\right.$$
$$\left.\times\theta\left(p-\frac{k}{2}-\frac{k'}{2}\right)\right] = \frac{1}{L}\sum_{p} a^+_{p-q}a_{p+q}\left(\theta\left(p+\frac{k}{2}\right)-\theta\left(p-\frac{k}{2}\right)\right)\,, \tag{12.11}$$

где $q=\frac{1}{2}(k+k')$. Заметим, что разность $\theta-$функций ограничивает область изменения p следующим образом: $|p|<k/2$. В то же время, при интересующих нас малых $|k| \ll p_0$ практически все состояния, дающие вклад в сумму (12.11), находятся глубоко под уровнем Ферми. Поэтому естественный шаг — заменить в (12.11) произведения операторов $a^+_{p_1}a_{p_2}$ на их средние значения $\langle a^+_{p_1}a_{p_2}\rangle = 2\pi L n(p_1)\delta(p_1-p_2)$, где $n(p_1)$ — фермиевское распределение. Сделав такую замену, получаем

$$[\widehat{\rho}_1(k), \widehat{\rho}_1(-k')] \;=\; \delta_{kk'}\,\begin{cases} k, & |k|<2p_0\,,\\ 2p_0\,\mathrm{sign}\,k, & |k|>2p_0\,. \end{cases} \tag{12.12}$$

Аналогично вычисляем остальные коммутаторы. Как уже отмечалось, нас интересуют малые $k,k' \ll p_0$. При этом условии находим

$$[\widehat{\rho}_1(k), \widehat{\rho}_1(-k')] = k\,\delta_{kk'}\,, \quad [\widehat{\rho}_2(k), \widehat{\rho}_2(-k')] = -k\,\delta_{kk'}\,, \tag{12.13}$$
$$[\widehat{\rho}_1(k), \widehat{\rho}_2(-k')] = 0\,. \tag{12.14}$$

Из вывода ясно, что эти выражения есть результат приближения, пренебрегающего изменением состояний частиц глубоко под уровнем Ферми.

Отметим, что в координатном представлении коммутационные соотношения (12.13), (12.14) принимают вид

$$[\widehat{\rho}_j(x), \widehat{\rho}_l(x')] = \pm\frac{1}{2\pi i}\delta_{jl}\delta'(x-x')\,, \quad (\delta'(x)\equiv\partial_x\delta(x))\,, \tag{12.15}$$

где положительный знак соответствует правым частицам, а отрицательный — левым. Соотношение такого вида называют *аномальным коммутатором Швингера.*

Замена операторов в правой части коммутационных соотношений на скаляры, позволяющая перейти от (12.11) к (12.13), (12.14), является центральным пунктом теории Томонаги. Хотя на первый взгляд такого рода приближение может показаться малообоснованным, тем не менее было выяснено, что приближение Томонаги в точности соответствует переходу от микроскопического описания к гидродинамическому, и поэтому на масштабах, много больших среднего расстояния между электронами, оно всегда является точным[4].

Оказывается удобным выразить операторы плотности правых и левых частиц $\widehat{\rho}_{1,2}(k)$ через бозевские операторы. Наиболее естественно выбрать b_k и b_k^+ с $k > 0$ для правых частиц, и с $k < 0$ для левых частиц:

$$\widehat{\rho}_1(x) = \sum_{k>0} \frac{1}{\lambda_k L} \left(b_k e^{ikx} + b_k^+ e^{-ikx} \right), \quad \widehat{\rho}_2(x) = \sum_{k<0} \frac{1}{\lambda_k L} \left(b_k e^{ikx} + b_k^+ e^{-ikx} \right), \tag{12.16}$$

где $\lambda_k = (2\pi/|k|L)^{1/2}$. Определение (12.16) согласовано с коммутационными соотношениями (12.13), (12.14). Используя (12.13) и (12.14) нетрудно получить канонические коммутационные соотношениям между операторами b_k и $b_{k'}^+$, причем нормировка в (12.16) такова, что $[b_k, b_{k'}^+] = 2\pi L \delta_{kk'}$.

12.3. Модель Томонаги

Мы введем преобразование бозонизации на примере задачи, для решения которой, собственно говоря, это преобразование и было впервые предложено. Рассмотрим одномерную систему взаимодействующих бесспиновых фермионов:

$$\widehat{\mathcal{H}} = \frac{1}{L} \sum_p \xi(p) a_p^+ a_p + \frac{1}{2L^2} \sum_{p_1+p_3=p_2+p_4} V_{p_1-p_2} a_{p_1}^+ a_{p_2} a_{p_3}^+ a_{p_4} \,, \tag{12.17}$$

где $\xi(p) = (p^2 - p_0^2)/2m$. Здесь $V_k = \int V(r) e^{-ikr} dr$ — формфактор потенциала взаимодействия. Рассмотрим случай, когда радиус взаимодействия r_0 много больше p_0^{-1}. При этом формфактор V_k как функция k быстро спадает при $k \approx r_0^{-1} \ll p_0$. Как всегда, нас интересуют только состояния вблизи уровня Ферми, т. е. при $p_i \approx \pm p_0$.

Легко видеть, что при этих условиях все взаимодействия сводятся к двум существенно различным процессам рассеяния, при которых две частицы, рассеивающиеся друг на друге, движутся в одну сторону или навстречу друг другу. Поэтому достаточно рассмотреть такие комбинации импульсов:

(1) $p_1 \approx p_0$, $p_2 \approx p_0$, $p_3 \approx p_0$, $p_4 \approx p_0$;

(2) $p_1 \approx p_0$, $p_2 \approx p_0$, $p_3 \approx -p_0$, $p_4 \approx -p_0$

(и, конечно, отличающиеся знаком всех импульсов и/или перестановкой частиц). Введем обозначения:

$$g_1(k) \equiv V_k \,, \quad g_2(k) \equiv V_{2p_0+k} \,, \tag{12.18}$$

причем будем считать, что $k \ll p_0$. Амплитуда $g_1(k)$ описывает процесс рассеяния частиц, находящихся с одной и той же стороны поверхности Ферми (рассеяние вперед), а $g_2(k)$ — переброс двух частиц с одной стороны поверхности Ферми на другую навстречу друг другу (рассеяние назад).

[4]Подробное обсуждение этих вопросов можно найти в работе: F. D. M. Haldane, *J. Phys. C*, v. 14, p. 2585 (1981)

Запишем гамильтониан, явно выделяя малые импульсы k_1, k_2, q:

$$\widehat{\mathcal{H}} = \widehat{\mathcal{H}}_0 + \widehat{\mathcal{H}}_1 + \widehat{\mathcal{H}}_2\,, \tag{12.19}$$

где

$$\widehat{\mathcal{H}}_0 = \frac{1}{L}\sum_{k\ll p_0} \xi(p_0+k)\left(a^+_{p_0+k}\,a_{p_0+k} + a^+_{-p_0-k}\,a_{-p_0-k}\right)\,, \tag{12.20}$$

$$\widehat{\mathcal{H}}_1 = \frac{1}{2L^2}\sum_{k_1,\,k_2,\,q} g_1(q)\left[a^+_{p_0+k_1+q/2}\,a_{p_0+k_1-q/2}\,a^+_{p_0+k_2-q/2}\,a_{p_0+k_2+q/2} + \right.$$
$$\left. + \ (p_0\to -p_0)\right]\,, \tag{12.21}$$

$$\widehat{\mathcal{H}}_2 = \frac{1}{L^2}\sum_{k_1,\,k_2,\,q} g_2(q)\,a^+_{p_0+k_1+q/2}\,a_{p_0+k_1-q/2}\,a^+_{-p_0+k_2-q/2}\,a_{-p_0+k_2+q/2}\,. \tag{12.22}$$

Постараемся теперь выразить гамильтониан через операторы $\widehat{\rho}_{1,2}(k)$. Для этого заметим, что суммирование по k_1 и k_2 в $\widehat{\mathcal{H}}_1$ и $\widehat{\mathcal{H}}_2$ сводится к суммированию по p в (12.9). С учетом этого обстоятельства $\widehat{\mathcal{H}}_1$ и $\widehat{\mathcal{H}}_2$ можно переписать так:

$$\widehat{\mathcal{H}}_1 = \frac{1}{2}\sum_q g_1(q)\left(\widehat{\rho}_1(q)\,\widehat{\rho}_1(-q) + \widehat{\rho}_2(q)\,\widehat{\rho}_2(-q)\right)\,,$$
$$\widehat{\mathcal{H}}_2 = \sum_q g_2(q)\,\widehat{\rho}_1(q)\,\widehat{\rho}_2(-q)\,. \tag{12.23}$$

В отличие от взаимодействия $\widehat{\mathcal{H}}_1 + \widehat{\mathcal{H}}_2$, гамильтониан $\widehat{\mathcal{H}}_0$ невзаимодействующих частиц не удается столь же просто выразить через $\widehat{\rho}_{1,2}(k)$, поскольку в нем присутствует множитель $\xi(p_0+k)$. Тем не менее, оказывается, что если заменить квадратичный спектр фермионов $\xi(p) = (p^2 - p_0^2)/2m$ на линейный $\xi(p) = v(|p| - p_0)$, то и гамильтониан $\widehat{\mathcal{H}}_0$ можно представить в виде оператора квадратичного по $\widehat{\rho}_{1,2}(k)$. Модель одномерного ферми-газа, получающаяся таким образом, называется моделью Томонаги–Латтинжера.

Чтобы угадать, как $\widehat{\mathcal{H}}_0$ выражается через $\widehat{\rho}_1(k)$ и $\widehat{\rho}_2(k)$, применим небольшую хитрость. Предположим, что ответ записывается в виде

$$\widehat{\mathcal{H}}_0 = \sum_k \alpha_k\left(\widehat{\rho}_1(k)\,\widehat{\rho}_1(-k)\ +\ \widehat{\rho}_2(k)\,\widehat{\rho}_2(-k)\right) \tag{12.24}$$

и найдем коммутатор $\left[\widehat{\rho}_1(k),\,\widehat{\mathcal{H}}_0\right]$. С одной стороны, согласно (12.13),

$$\left[\widehat{\rho}_1(k),\,\widehat{\mathcal{H}}_0\right] = \sum_{k'}\alpha_{k'}\left[\widehat{\rho}_1(k),\,\widehat{\rho}_1(k')\,\widehat{\rho}_1(-k')\right] = \frac{k}{\pi}\alpha_k\widehat{\rho}_1(k)\,. \tag{12.25}$$

С другой стороны, найдем этот же коммутатор прямым вычислением («почестному»):

$$\left[\widehat{\rho}_1(k),\,\widehat{\mathcal{H}}_0\right] = \frac{1}{L^2}\sum_{p>0}\sum_{p'} v\,(p'-p_0)\left[a^+_{p-k/2}\,a_{p+k/2}\,,\,a^+_{p'}\,a_{p'}\right] =$$

$$= \frac{1}{L^2} \sum_{p>0} \sum_{p'} v\,(p'-p_0) \left(a^+_{p-k/2} \left[a_{p+k/2}\,,\; a^+_{p'}\, a_{p'} \right] + \left[a^+_{p-k/2}\,,\; a^+_{p'}\, a_{p'} \right] a_{p+k/2} \right) =$$
$$= \frac{2\pi}{L} \sum_{p>0} \sum_{p'} v\,(p'-p_0) \left(a^+_{p-k/2}\, a_{p'}\, \delta_{p+k/2-p'} - a^+_{p'}\, a_{p+k/2}\, \delta_{p-k/2-p'} \right) =$$
$$= \frac{vk}{L} \sum_{p>0} a^+_{p-k/2}\, a_{p+k/2} = vk\widehat{\rho}_1(k)\,. \qquad (12.26)$$

Сравнивая (12.25) и (12.26), находим, что $\alpha_k = \pi v$. Таким образом получаем

$$\widehat{\mathcal{H}}_0 = \pi v \sum_k \left[\widehat{\rho}_1(k)\, \widehat{\rho}_1(-k) + \widehat{\rho}_2(k)\, \widehat{\rho}_2(-k) \right]\,. \qquad (12.27)$$

Итак, длинноволновая динамика ферми-газа допускает описание в терминах волн плотности в газе фермионов. Отметим, что вместо величин $\widehat{\rho}_1(k)$ и $\widehat{\rho}_2(k)$ иногда бывает удобнее пользоваться их комбинациями $\widehat{\rho}(k) = \widehat{\rho}_1(k) + \widehat{\rho}_2(k)$ и $\widehat{j}(k) = \widehat{\rho}_1(k) - \widehat{\rho}_2(k)$, которые есть просто плотность и ток частиц.

Теперь можно заняться задачей о спектре возбуждений одномерного ферми-газа с взаимодействием. Все члены в преобразованном гамильтониане оказываются квадратичными по $\widehat{\rho}_{1,2}(k)$. Выражая $\widehat{\rho}_1(k)$ и $\widehat{\rho}_2(k)$ через операторы b^+_k, b_k по формулам (12.16), находим

$$\widehat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2\pi L} \sum_{k>0} \left[\Big(2\pi k v + k g_1(k) \Big) \Big(b^+_k b_k + b^+_{-k} b_{-k} \Big) + k g_2(k) \Big(b^+_k b^+_{-k} + b_k b_{-k} \Big) \right]. \qquad (12.28)$$

Переходим к квазичастицам, выполняя преобразование Боголюбова,

$$\begin{aligned} \tilde{b}_k &= \operatorname{ch}\theta_k\; b_k + \operatorname{sh}\theta_k\; b^+_{-k}\,, \\ \tilde{b}^+_{-k} &= \operatorname{ch}\theta_k\; b^+_{-k} + \operatorname{sh}\theta_k\; b_k\,, \end{aligned} \qquad (12.29)$$

и подбирая параметр преобразования θ_k так, чтобы гамильтониан стал диагональным:

$$\operatorname{th} 2\theta_k = \frac{g_2(k)}{g_1(k) + 2\pi v}\,. \qquad (12.30)$$

Получаем гамильтониан и спектр возбуждений квазичастиц:

$$\widehat{\mathcal{H}} = \frac{1}{L} \sum_k \omega(k)\, \tilde{b}^+_k \tilde{b}_k\,, \quad \omega(k) = \frac{|k|}{2\pi} \Big((2\pi v + g_1(k))^2 - g_2^2(k) \Big)^{1/2}. \qquad (12.31)$$

Полученное решение показывает, что квазичастицами в модели Томонаги–Латтинжера являются не фермионы, а бозоны со спектром (12.31). Перестройка спектра элементарных возбуждений происходит из-за того, что взаимодействие вблизи ферми-поверхности сильное, и поэтому время жизни фермионов оказывается слишком малым. Это означает, что в одном измерении теория ферми-жидкости неприменима.

Модель Томонаги–Латтинжера нетрудно обобщить на частицы со спином, что приводит к бозонизованной задаче, в которой имеются операторы как плотности заряда, так и плотности спина, причем гамильтониан остается квадратичным. К сожалению, детальное изложение всех связанных с этим вопросов увело бы нас слишком далеко. Поэтому ограничимся ссылкой на книгу [7], гл. 4, а также на оригинальные работы [5].

12.4. От бозонов к фермионам

Важную роль в теории латтинжеровской жидкости играет обратное преобразование бозонизации, позволяющее выразить фермионные операторы через бозонные (!) и получить выражение для функции Грина взаимодействующей ферми-системы.

Представление фермионных операторов можно найти, рассматривая коммутационные соотношения. Поскольку гамильтониан записывается только через операторы плотности (12.16), достаточно построить из них такие операторы $\widehat{\psi}_j(x)$, $\widehat{\psi}_j^+(x)$, чтобы выполнялись стандартные соотношения

$$\begin{aligned} &[\widehat{\psi}_j(x), \widehat{\psi}_l(x')]_+ = [\widehat{\psi}_j^+(x), \widehat{\psi}_l^+(x')]_+ = 0\,, \\ &[\widehat{\psi}_j^+(x), \widehat{\psi}_l(x')]_+ = \delta_{jl}\,\delta(x-x') \end{aligned} \tag{12.32}$$

$(j, l = 1, 2)$. Оказывается, соотношения (12.32) можно получить, выбрав представление фермионных операторов следующим образом:

$$\widehat{\psi}_j(x) = A_j e^{i\widehat{\varphi}_j(x)}, \quad \widehat{\psi}_j^+(x) = A_j^* e^{-i\widehat{\varphi}_j(x)}, \tag{12.33}$$

$$\widehat{\varphi}_j(x) = 2\pi \int_{-\infty}^{x} \widehat{\rho}_j(x')dx'\,, \tag{12.34}$$

где константы A_j, зависящие от ультрафиолетовой обрезки интеграла (12.34), будут определены позже. Выражения (12.33) по форме напоминают струну, возникающую в преобразовании Йордана–Вигнера (см. разд. 1.4). Хотя на первый взгляд выражения (12.33), (12.34) выглядят несколько таинственно, можно убедиться прямым вычислением, что они приводят к антикоммутирующим фермиевским операторам.

Проверим коммутационные соотношения (12.32) между $\widehat{\psi}_{1,2}^+(x)$ и $\widehat{\psi}_{1,2}(x')$. Воспользуемся для этого известным тождеством Бейкера–Хаусдорфа,

$$e^U e^V = e^{U+V+[U,V]/2}\,, \tag{12.35}$$

верным, если $[U, V]$ коммутирует как с U, так и с V. План вычисления заключается в том, чтобы с помощью (12.35) преобразовать произведения $\widehat{\psi}_j^+(x)\widehat{\psi}_l(x')$ и $\widehat{\psi}_j(x)\widehat{\psi}_l^+(x')$ к такому виду, в котором сингулярность при $x' = x$ выделена явным образом.

Запишем операторы фазы, стоящие в показателе экспонент (12.33), через бозонные операторы:

$$\widehat{\varphi}_1(x) = 2\pi \int_{-\infty}^{x} \widehat{\rho}_1(x')dx' = i \sum_{k>0} \lambda_k [b_k^+ e^{-ikx} - b_k e^{ikx}] e^{-a|k|/2}\,, \tag{12.36}$$

$$\widehat{\varphi}_2(x) = 2\pi \int_{-\infty}^{x} \widehat{\rho}_2(x')dx' = -i \sum_{k<0} \lambda_k [b_k^+ e^{-ikx} - b_k e^{ikx}] e^{-a|k|/2}\,, \tag{12.37}$$

[5] A. Luther and V. J. Emery, *Phys. Rev. Lett.*, v. 33, p. 589 (1974); A. Luther and I. Peschel, *Phys. Rev. B*, v. 9, p. 2911 (1974).

где, как и выше, $\lambda_k = (2\pi/kL)^{1/2}$. Величина a введена в (12.36), (12.37) для регуляризации, причем подразумевается предельный переход $a \to +0$.

Рассмотрим произведение операторов $\widehat{\psi}_1^+(x)\widehat{\psi}_1(x')$ и, воспользовавшись (12.35), запишем его как

$$\widehat{\psi}_1^+(x)\widehat{\psi}_1(x') = |A_1|^2 e^{-i\widehat{\varphi}(x)+i\widehat{\varphi}(x')+[\widehat{\varphi}(x),\widehat{\varphi}(x')]/2}, \tag{12.38}$$

где

$$[\widehat{\varphi}(x), \widehat{\varphi}(x')] = \sum_{k>0} \lambda_k^2 L \left(e^{ik(x-x')} - e^{-ik(x-x')}\right) e^{-a|k|}. \tag{12.39}$$

Далее, приведем (12.38) к нормально-упорядоченному виду:

$$\widehat{\psi}_1^+(x)\widehat{\psi}_1(x') = |A_1|^2 e^{\widehat{B}^+} e^{-\widehat{B}} e^{\frac{1}{2}([\widehat{B}^+,\widehat{B}]+[\widehat{\varphi}(x),\widehat{\varphi}(x')])}, \tag{12.40}$$

$$\widehat{B} = \sum_{k>0} \lambda_k b_k \left(e^{ikx} - e^{ikx'}\right) e^{-a|k|/2}. \tag{12.41}$$

Вычисляем коммутатор:

$$[\widehat{B}^+, \widehat{B}] = \sum_{k>0} \lambda_k^2 L \left(e^{ik(x-x')} + e^{-ik(x-x')} - 2\right) e^{-a|k|}. \tag{12.42}$$

Прибавляя к (12.42) выражение (12.39), получаем[6]

$$\frac{1}{2}\left([\widehat{B}^+, \widehat{B}] + [\widehat{\varphi}(x), \widehat{\varphi}(x')]\right) = \sum_{k>0} \lambda_k^2 L \left(e^{ik(x-x')} - 1\right) e^{-a|k|} = \tag{12.43}$$

$$= \int_0^\infty \left(e^{ik(x-x')} - 1\right) e^{-a|k|} \frac{dk}{k} = \ln \frac{a}{a + i(x'-x)}. \tag{12.44}$$

Нормальное упорядочение произведения $\widehat{\psi}_1(x')\widehat{\psi}_1^+(x)$ выполняется совершенно аналогично (12.38) — (12.44). Единственное отличие заключается в том, что коммутатор $[\widehat{\varphi}(x), \widehat{\varphi}(x')]$ входит в аналог (12.38) со знаком «$-$». Вследствие этого, вместо (12.44) имеем

$$\frac{1}{2}\left([\widehat{B}^+, \widehat{B}] - [\widehat{\varphi}(x), \widehat{\varphi}(x')]\right) = \int_0^\infty \left(e^{ik(x'-x)} - 1\right) e^{-ak} \frac{dk}{k} = \ln \frac{a}{a - i(x'-x)}. \tag{12.45}$$

Поэтому антикоммутатор

$$[\widehat{\psi}_1^+(x), \widehat{\psi}_1(x')]_+ = \widehat{\psi}_1^+(x)\widehat{\psi}_1(x') + \widehat{\psi}_1(x')\widehat{\psi}_1^+(x) \tag{12.46}$$

оказывается равен

$$a|A_1|^2 e^{-\widehat{B}^+} e^{\widehat{B}} \left[\frac{1}{a - i(x-x')} + \frac{1}{a + i(x-x')}\right]. \tag{12.47}$$

[6] В (12.44) использовано тождество $\int_0^\infty (e^{-ax} - e^{-bx})dx/x = \ln b/a$.

Выражение (12.47) при $a \to +0$ дает

$$[\widehat{\psi}_1^+(x), \widehat{\psi}_1(x')]_+ = 2\pi a |A_1|^2 \delta(x - x') , \tag{12.48}$$

откуда находим, что при выполнении условия $|A_1| = (2\pi a)^{-1/2}$ антикоммутатор $[\widehat{\psi}_1^+(x), \widehat{\psi}_1(x')]_+$ имеет требуемый вид (12.32). Аналогично можно проверить антикоммутативность $\widehat{\psi}_1(x)$ и $\widehat{\psi}_1(x')$, а также $\widehat{\psi}_1^+(x)$ и $\widehat{\psi}_1^+(x')$.

Наконец, рассмотрим коммутационные соотношения между операторами правых и левых частиц. В построенном выше представлении они коммутируют, а должны были бы антикоммутировать. Вообще говоря, поскольку эти частицы соответствуют разным ветвям спектра, коммутационные соотношения между ними могут быть выбраны произвольно, поскольку ни в каких наблюдаемых величинах они не проявляются[7]. Однако чтобы не возникало необходимости делать оговорки, принято вводить в определение величин A_j дополнительные множители:

$$A_1 = \frac{e^{\frac{i}{2}\widehat{\varphi}_2(\infty)}}{(2\pi a)^{1/2}}, \quad A_2 = \frac{e^{-\frac{i}{2}\widehat{\varphi}_1(\infty)}}{(2\pi a)^{1/2}}, \quad \widehat{\varphi}_{1,2}(\infty) = 2\pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{\rho}_{1,2}(x)\, dx. \tag{12.49}$$

Нетрудно проверить, что после этого все коммутационные соотношения принимают канонический вид (12.32).

С помощью обратного преобразования бозонизации можно найти функцию Грина латтинжеровской жидкости. Рассмотрим средние:

$$G_j(x,t) = \langle \widehat{\psi}_j(x,t) \widehat{\psi}_j^+(0,0) \rangle = (2\pi a)^{-1} \langle e^{i\widehat{\varphi}_j(x,t)} e^{-i\widehat{\varphi}_j(0,0)} \rangle . \tag{12.50}$$

С функциями Грина, определенными таким (несколько нестандартным) образом[8], оказывается весьма удобным проводить вычисления в координатно-временном представлении (см. задачи 79, 81).

Функции Грина (12.50) будут найдены в задаче 80. В случае, когда константы связи g_1 и g_2 в (12.30) не зависят от k, результат принимает довольно простой вид:

$$\begin{aligned} G_1(x,t) &= \frac{i}{2\pi(x - v't + ia)} \left(\frac{a^2}{(x - v't + ia)(x + v't - ia)} \right)^{\operatorname{sh}^2\theta}, \\ G_2(x,t) &= -\frac{i}{2\pi(x + v't - ia)} \left(\frac{a^2}{(x - v't + ia)(x + v't - ia)} \right)^{\operatorname{sh}^2\theta}, \end{aligned} \tag{12.51}$$

где $\operatorname{th}(2\theta) = g_2/(g_1 + 2\pi v)$ и $v' = \omega_k/k = \Big((2\pi v + g_1)^2 - g_2^2\Big)^{1/2}/(2\pi)$ — перенормированная скорость квазичастиц, определенная в (12.31). Нетрудно видеть, что в

[7]Подобно тому, как в обычном вторичном квантовании имеется произвол, когда гамильтониан системы не содержит явной зависимости от спина частиц. В этом случае, при определении операторов рождения и уничтожения частицы с определенной проекцией спина принципиально важна только антикоммутативность операторов с одинаковыми спинами, а операторы с различными спинами, вообще говоря, могут быть выбраны коммутирующими — это дело вкуса.

[8]Напомним определение канонической причинной функции Грина через хронологически упорядоченное среднее: $G_c(x,t,\, x',t') = -i\langle \mathrm{T}\, \widehat{\psi}_j(x,t)\widehat{\psi}_j^+(x',t')\rangle$.

отсутствие рассеяния назад ($g_2 = 0$) выражения (12.51) воспроизводят известные результаты для свободных фермионов.

С помощью гриновских функций (12.51) можно рассмотреть разнообразные вопросы. Так, интересно выяснить, как взаимодействие меняет распределение частиц по импульсам в основном состоянии, $n(p) \propto \operatorname{Im} G(\varepsilon, p)_{\varepsilon \to 0}$. Оказывается, фермиевская ступенька в $n(p)$, резкая в отсутствие взаимодействия, размывается и становится нерезкой при сколь угодно слабом взаимодействии. Размытие фермиевской сингулярности в $n(p)$ есть проявление того, что истинными квазичастицами в одномерном ферми-газе с взаимодействием являются не фермионы, а бозоны со спектром (12.31). Причина в том, что из-за взаимодействия время жизни ферми-жидкостных квазичастиц оказывается слишком малым (см. задачу 82). Нетривиальное основное состояние взаимодействующей системы обладает и другими интересными свойствами. Например, в задаче 81 мы увидим, что взаимодействие в латтинжеровской жидкости приводит к появлению аномалии в туннельной плотности состояний. Эта аномалия проявляется в неомической (степенной) вольт-амперной характеристике туннельного тока.

Литература: Хорошее изложение основных фактов и теории бозонизации можно найти в книгах: [7], гл. 4; M. Stone, *Bosonization*, (World Scientific, 1994).

12.5. Задачи 75 – 82

Задача 75. Найдите теплоемкость одномерного идеального ферми-газа, пользуясь бозонным представлением. Сравните с результатом, полученным в каноническом представлении.

Задача 76. Рассмотрим идеальный ферми-газ в конечной области $0 < x < L$ с периодическими граничными условиями. Как одночастичный, так и многочастичный спектры этой конечной системы являются дискретными. Попытаемся установить соответствие между индивидуальными состояниями в каноническом и в бозонизованном представлениях.

Линеаризуем закон дисперсии фермионов вблизи E_F. Покажите, что дискретный спектр многочастичных возбужденных состояний в обоих представлениях имеет вид $E_m = m\Delta$, где $m = 1, 2, 3, ...$, а $\Delta = 2\pi v_F / L$ — расстояние между одночастичными уровнями вблизи E_F. Обозначим через N_m кратность вырождения уровня ε_m. В силу многочастичности задачи, кратность вырождения N_m является весьма быстро возрастающей функцией m. Найдите N_m для нескольких первых уровней энергии в каноническом и в бозонном представлениях и покажите, что результаты совпадают.

Задача 77. (*Алгебра операторов.*) Докажите, что операторы $e^{i\mu\widehat{\varphi}_{1,2}(x)}$ и гармоники плотности (12.16) удовлетворяют следующим соотношениям

$$e^{i\mu\widehat{\varphi}_j(x)}\widehat{\rho}_l(k)e^{-i\mu\widehat{\varphi}_j(x)} = \widehat{\rho}_l(k) \pm \mu e^{-ikx}\delta_{jl} \quad (j, l = 1, 2), \tag{12.52}$$

где знак «+» соответствует правым частицам ($j = l = 1$), а знак «−» — левым

$(j = l = 2)$. Соотношение (12.52) в координатном представлении имеет вид

$$e^{i\mu\widehat{\varphi}_j(x)}\widehat{\rho}_l(x')e^{-i\mu\widehat{\varphi}_j(x)} = \widehat{\rho}_l(x') \pm \mu\delta_{jl}\delta(x-x')\,. \tag{12.53}$$

При такой записи видно, что оператор $e^{-i\mu\widehat{\varphi}_j(x)}$ «вставляет» в систему μ частиц, где значение μ может быть как целым, так и дробным.

Докажите также, что бозонизованные фермиевские операторы $\widehat{\psi}_j(x) = A_j e^{i\widehat{\varphi}_j(x)}$, $\widehat{\psi}_j^+(x) = A_j^* e^{-i\widehat{\varphi}_j(x)}$, $j = 1, 2$, и гармоники плотности (12.16) подчиняются следующим коммутационным соотношениям:

$$[\widehat{\psi}_j(x), \widehat{\rho}_l(p)] = \pm e^{-ipx}\widehat{\psi}_j(x)\delta_{jl} \quad (j, l = 1, 2). \tag{12.54}$$

Обратим внимание, что коммутаторы (12.54) совпадают с коммутаторами, найденными в каноническом представлении. Наряду с (12.52), соотношения (12.54) оказываются полезными при решении задач.

Задача 78. (*Катастрофа ортогональности.*) Применим метод бозонизации к изучению катастрофы ортогональности, рассмотренной в задаче 27. Напомним, что речь идет о вычислении интеграла перекрытия $K = \langle 0'|0\rangle$ основных состояний ферми-газа в отсутствие и в присутствии локализованного рассеивающего потенциала. Верно равенство

$$|K_\gamma| = \exp\left[-\alpha\,\ln\left(E_F/\gamma\right)\right]\,, \quad \alpha = 2\sum_l (2l+1)\,\frac{\delta_l^2}{\pi^2}\,, \tag{12.55}$$

где δ_l — фазы рассеяния в канале с угловым моментом l при $E = E_F$, а $\gamma \ll E_F$ — скорость включения возмущения, определенная в задаче 27.

В случае сильного рассеяния суммирование ряда теории возмущений (5.19) оказывается довольно трудоемким делом [9]. Вместо этого можно применить следующий весьма полезный прием. Рассмотрим каждый канал рассеяния как систему одномерных киральных [10] фермионов, движущихся слева направо со скоростью $v = v_F$. При этом область $x < 0$ соответствует падающим волнам, область $x > 0$ — рассеянным, а само рассеяние происходит вблизи точки $x = 0$. В такой постановке задачи встряхивание ферми-газа при включении рассеяния на потенциале эквивалентно возбуждению одномерных фермионов при пролете через окрестность $x = 0$, в которой действует внешнее переменное поле.

Запишите бозонизованный гамильтониан для фермионов в плавно меняющемся электромагнитном поле $a(x,t)$, локализованном вблизи $x = 0$. Скачку фазы рассеяния

[9] Отметим, что в данном случае оказывается возможным провести полное суммирование ряда теории возмущений (5.19). Это связано с тем, что высшие члены ряда (5.19) не становятся более сингулярными — в каждом порядке расходимость логарифмическая по γ. Однако соответствующие вычисления требуют использования специальной техники (P. Nozières, C. T. deDominicis, *Phys. Rev.*, v. 178, p. 1097 (1969)).

[10] Теорию поля и, в частности, латтинжеровскую жидкость, называют киральной, если в ней имеются только правые или же только левые частицы.

соответствует импульс поля. Определите соответствие между фазой рассеяния δ и амплитудой поля $a(x,t)$.

Бозонизованный гамильтониан квадратичен, а член, описывающий взаимодействие с полем a, линеен по операторам $\widehat{\rho}(k)$. Рассмотрите эволюцию основного состояния при включении поля и определите перекрытие начального и конечного состояний. Получите формулу (12.55).

Задача 79. (*Край спектра рентгеновского поглощения в металле.*) При поглощении мягких рентгеновских лучей в металле[11], электрон, поглотив фотон, может перейти с одной из внутренних оболочек атома решетки в свободные состояния в зоне проводимости. При этом на отдавшем электрон атоме остается дырка, обладающая положительным зарядом. Электроны в зоне проводимости, а также вылетевший электрон, могут рассеиваться на возникшем при поглощении фотона статическом потенциале дырки. Поскольку это рассеяние включается мгновенно, электроны проводимости испытывают встряску, приводящую к рождению электрон-дырочных пар. Оказывается, что именно эта динамика ферми-системы определяет характер спектра поглощения, когда энергия выбитого электрона близка к E_F.

Будем считать, что потенциал рассеяния на неподвижной дырке сферически симметричен и характеризуется фазами рассеяния δ_l, где $l = 1, 2, 3, ...$ нумерует каналы с различным угловым моментом. Предположим также, что электрон, поглощающий фотон, переходит в состояние с угловым моментом $l = j$. (Если электрон вырывается из s-состояния, то $j = 1$ по правилу отбора для дипольных переходов.) Покажите, что спектр поглощения фотонов вблизи нижней границы имеет степенное поведение:

$$W(\omega) \propto (\omega - \omega_0)^{\beta}\,, \quad \beta = \alpha - 2\delta_j/\pi\,, \tag{12.56}$$

где величина α определена выражением (12.55), а порог поглощения $\omega_0 = E_F + E_0$ есть сумма энергии образования дырки и энергии Ферми, отсчитанной от энергии связи выбитого электрона.

Два слагаемых в выражении для β известны как андерсоновский и махановский вклады. При этом α, согласно задаче 78, описывает встряхивание ферми-системы при включении рассеяния, приводящее к сложным неупругим процессам, связанным с множественным рождением электрон-дырочных пар. Вклад же $-2\delta_j/\pi$ описывает эффект притяжения выбитого электрона неподвижной дыркой[12]. Интересно, что, благодаря второму слагаемому, знак β может оказаться произвольным. При $\beta > 0$ низкоэнергетическое поглощение подавляется по сравнению с идеальным ферми-газом, а при $\beta < 0$ — наоборот, усиливается.

Задача 80. (*Функция Грина.*) Рассмотрите латтинжеровскую жидкость с взаимодействием (12.23), в котором величины $g_{1,2}(q)$ не зависят от q.

а) Получите выражения (12.51) для функции Грина (12.50) при $T = 0$.

б) Найдите функцию Грина при конечной температуре T.

[11] Именно при решении этой и родственной ей задачи о катастрофе ортогональности (см. задачи 27 и 78), были впервые введены соотношения (12.33) между бозонными и фермионными операторами (K. D. Schotte, U. Schotte, *Phys. Rev.*, v. 182, p. 479 (1969)).

[12] G. D. Mahan, *Phys. Rev.*, v. 163, p. 612 (1967)

Задача 81. (*Туннельная плотность состояний.*) Рассмотрим две параллельные одномерные системы A и B с точечным туннельным контактом между ними. Обе системы являются латтинжеровскими жидкостями и описываются гамильтонианом (12.23) с константами взаимодействия $g_{1,2}^{A,B}$. Гамильтониан системы имеет вид $\widehat{\mathcal{H}}_{\rm tot} = \widehat{\mathcal{H}}_A + \widehat{\mathcal{H}}_B + \widehat{\mathcal{H}}_{\rm tun}$, причем

$$\widehat{\mathcal{H}}_{\rm tun} = w\,\psi_B^+(x)\psi_A(x)\Big|_{x=x_0} + \text{h.c.}\,, \qquad (12.57)$$

где w — амплитуда туннелирования. При записи (12.57) предполагается, что туннелирование происходит в малой окрестности точки x_0.

Покажите, что при $T=0$ туннельный ток является степенной функцией напряжения на контакте:

$$I \propto V^{\alpha_{AB}-1}\,, \quad \alpha_{AB} = 2(1+\operatorname{sh}^2\theta_A + \operatorname{sh}^2\theta_B)\,, \qquad (12.58)$$

где $\theta_{A,B}$ связаны с константами взаимодействия $g_{1,2}^{A,B}$ соотношением (12.30). Как меняется вольт-амперная характеристика (12.58) при конечной температуре T?

Задача 82. Рассмотрим одномерные фермионы с взаимодействием (12.23). Найдите функцию Грина, пользуясь теорией возмущений и уравнением Дайсона. Рассмотрите вклады в собственно-энергетическую часть $\Sigma(\varepsilon, p)$ первого и второго порядка [13] по взаимодействию $g_{1,2}(q)$. Покажите, что полученное выражение для $\Sigma(\varepsilon, p)$ содержит расходимость при малых ε, указывающую на нефермижидкостное поведение.

12.6. Решения задач 75 – 82

75. Термодинамический потенциал одномерной бозе-системы имеет вид

$$\Omega_B = T\int \ln\left(1 - e^{-\varepsilon(k)/T}\right)\frac{dk}{2\pi\hbar}\,, \qquad (12.59)$$

где $\varepsilon(k) = v_F|k|$. Переходим к интегрированию по $x = \varepsilon(k)/T$:

$$\Omega_B = \frac{2T^2}{v_F}\int_0^\infty \ln\left(1-e^{-x}\right)\frac{dx}{2\pi\hbar}\,. \qquad (12.60)$$

Разлагая логарифм в ряд и меняя порядок суммирования и интегрирования, получаем

$$\Omega_B = -\frac{T^2}{\pi v_F}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = -\zeta(2)\frac{T^2}{\pi v_F \hbar}\,. \qquad (12.61)$$

[13]Вычисление функции Грина одномерной системы, в котором учтены вклады всех порядков теории возмущений, содержится в работе: И.Е. Дзялошинский, А.И. Ларкин, ЖЭТФ т.65, с.411 (1973). В этой работе продемонстрировано совпадение результатов вычислений, проведенных по теории возмущений и с помощью метода бозонизации.

Отсюда находим теплоемкость $C = (\pi^2/6)\,T/(\pi v_F \hbar)$.

Найдем теперь термодинамический потенциал, пользуясь каноническим фермионным представлением:

$$\Omega_F = -T \int \ln\left(1 + e^{-(k^2/2m-\mu)/T}\right)\frac{dk}{2\pi\hbar}\,. \tag{12.62}$$

Нас интересует зависящая от температуры часть Ω_F, которая определяется состояниями с энергией $|\varepsilon| \approx T$ вблизи ферми-поверхности. В этой области энергий закон дисперсии можно линеаризовать: $\xi(k) = \pm v_F(|k| - p_0)$. Теперь вычтем из выражения (12.62) его значение при $T \to 0$. Результат можно записать в виде

$$\Omega_F = -\frac{4T}{v_F}\int\limits_0^\infty \ln\left(1 + e^{-\xi/T}\right)\frac{d\xi}{2\pi\hbar}\,. \tag{12.63}$$

Как и выше, разлагаем логарифм в ряд и меняем порядок суммирования и интегрирования:

$$\Omega_F = -\frac{2T^2}{\pi v_F}\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = -\frac{1}{2}\zeta(2)\frac{2T^2}{\pi v_F \hbar}\,. \tag{12.64}$$

Видим, что $\Omega_F = \Omega_B$. Значит, теплоемкости, найденные обоими способами, совпадают.

76. Состояния ферми-газа с малыми энергиями, для которых справедливо представление бозонизации, можно разделить на правые и левые, построенные, соответственно, из плоских волн с $p \approx p_0$ и $p \approx -p_0$. Не теряя общности, ограничимся рассмотрением правых состояний. После того как соответствие между каноническим и бозонным представлениями будет установлено для правых состояний, обобщение на другие состояния будет очевидно. Для простоты будем рассматривать бесспиновые частицы.

Одночастичные состояния фермионов на кольце длины L характеризуются дискретными импульсами $p_j = 2\pi j/L$, $j \in Z$. Основное состояние $2j_{\max} + 1$ частиц есть слэтеровский детерминант $|\mathrm{vac_f}\rangle$, построенный из плоских волн с p_j, такими что $|j| \leqslant j_{\max}$.

Линеаризуя спектр вблизи $p = p_{j_{\max}}$, находим закон дисперсии правых частиц: $\varepsilon(j) = \Delta(j - j_{\max})$, где $\Delta = 2\pi p_{j_{\max}}/mL = 2\pi v_F/L$ — расстояние между уровнями вблизи E_F. Ниже будет удобно нумеровать одночастичные уровни с помощью $m = j - j_{\max}$. При этом $\varepsilon_m = m\Delta$, причем в основном состоянии заполнены уровни с $m \leqslant 0$, а уровни с $m > 0$ пусты.

Перейдем теперь к рассмотрению многочастичных возбужденных состояний. Каждое возбужденное состояние характеризуется заполнением некоторого количества одночастичных состояний с $m > 0$ одновременно с образованием точно такого же количества дырок с $m \leqslant 0$. В простейшем случае, когда имеется всего одна пара частица–дырка, состояния выглядят так: $\psi_{m|n} = a_m^+ a_n|\mathrm{vac_f}\rangle$, где $m > 0$, $n \leqslant 0$, а энергия $E_{m|n} = (m - n)\Delta$. При каждом значении энергии $E_k = k\Delta$, $k = 1, 2, 3, 4, ...$, имеется ровно k таких состояний.

Можно построить также состояния с двумя, тремя и большим числом пар частица–дырка. Нетрудно убедиться в том, что при энергиях $E = \Delta,\ 2\Delta,\ 3\Delta$ состояния с более чем одной парой отсутствуют. При энергии же $E = 4\Delta$ имеется ровно одно такое состояние:

$$\psi_{2,1|0,-1} = a_2^+ a_1^+ a_0 a_{-1} |\mathrm{vac_f}\rangle\,. \tag{12.65}$$

При $E = 5\Delta$ имеется два состояния с двумя парами: $\psi_{3,1|0,-1}$ и $\psi_{2,1|0,-2}$, где обозначения соответствуют (12.65). А при $E = 6\Delta$ имеется уже четыре состояния такого вида: $\psi_{4,1|0,-1}$, $\psi_{3,1|0,-2}$, $\psi_{2,1|0,-3}$, $\psi_{2,1|-1,-2}$.

Добавляя состояния с одной парой, получаем кратности вырождения N_m первых шести уровней $E_m = m\Delta$:

$$N_1 = 1,\ N_2 = 2,\ N_3 = 3,\ N_4 = 5,\ N_5 = 7,\ N_6 = 11. \tag{12.66}$$

Начиная с $E = 7\Delta$ требуется учитывать состояния с тремя и большим числом пар. Поэтому здесь мы ограничимся первыми шестью уровнями.

Теперь найдем многочастичные уровни и кратности их вырождения в бозонном представлении. В этом представлении спектр квазичастиц есть $\omega(p) = v_F|p|$, причем в силу периодических граничных условий импульс p принимает дискретные значения $p_j = (2\pi/L)j$, $j \in Z$. Правой ветви фермионов соответствуют правые бозоны с $j > 0$. Основное состояние $|\mathrm{vac_b}\rangle$ есть симметризованное произведение основных состояний всех правых бозонов. На языке канонических бозе-операторов b_j, b_j^+ состояние $|\mathrm{vac_b}\rangle$ подчиняется соотношениям $b_j|\mathrm{vac_b}\rangle = 0$ при всех $j > 0$.

Возбужденные состояния получаются применением к $|\mathrm{vac_b}\rangle$ некоторого количества операторов b_j^+. При этом собственные энергии, как нетрудно видеть, все оказываются кратными Δ, т. е. совпадают с энергиями, найденными в фермионном представлении.

Найдем теперь кратности вырождения. При $E = \Delta$ имеется всего одно состояние $\psi_1 = b_1^+|\mathrm{vac_b}\rangle$. При $E = 2\Delta$ существует два состояния: $\psi_2 = b_2^+|\mathrm{vac_b}\rangle$ и $\psi_{1^2} = (b_1^+)^2|\mathrm{vac_b}\rangle$. При $E = 3\Delta$ имеется три состояния:

$$\psi_3 = b_3^+|\mathrm{vac_b}\rangle, \quad \psi_{1^3} = (b_1^+)^3|\mathrm{vac_b}\rangle, \quad \psi_{2,1} = b_2^+ b_1^+|\mathrm{vac_b}\rangle\,. \tag{12.67}$$

При $E = 4\Delta$ имеется всего пять состояний:

$$\psi_4,\ \psi_{3,1},\ \psi_{2^2},\ \psi_{2,1^2},\ \psi_{1^4}\,. \tag{12.68}$$

При $E = 5\Delta$ состояния имеют вид

$$\psi_5,\ \psi_{4,1},\ \psi_{3,2},\ \psi_{3,1^2},\ \psi_{2^2,1},\ \psi_{2,1^3},\ \psi_{1^5}\,, \tag{12.69}$$

итого семь состояний. При $E = 6\Delta$ находим

$$\psi_6,\ \psi_{5,1},\ \psi_{4,2},\ \psi_{4,1^2},\ \psi_{3^2},\ \psi_{3,2,1},\ \psi_{3,1^3},\ \psi_{2^3},\ \psi_{2^2,1^2},\ \psi_{2,1^4},\ \psi_{1^6}, \tag{12.70}$$

итого одиннадцать состояний.

Получается, что для нижних шести уровней кратности вырождения (12.66), найденные в бозонном и фермионном представлениях, совпадают. Для более высоких уровней кратности вырождения быстро растут, и получить их прямым перечислением состояний становится непросто. Чтобы убедиться в совпадении кратностей вырождения для произвольно высоких уровней, удобно воспользоваться производящими функциями. В бозонном представлении производящая функция для кратностей заполнений есть

$$F_{\mathrm{B}}(z) = \sum_{m>0} N_m^{\mathrm{B}} z^m = \prod_{m>0} \frac{1}{1-z^m}\,. \tag{12.71}$$

Аналогично, производящая функция в фермионном представлении строится так:

$$F_{\mathrm{F}}(z) = \sum_{m>0} N_m^{\mathrm{F}} z^m = \oint\limits_{|\eta|=1} \left(\prod_{m>0}(1+\eta z^m)\prod_{m>0}(1+\eta^{-1}z^{m-1})\right)\frac{d\eta}{2\pi i\eta}\,. \tag{12.72}$$

Здесь первое и второе произведения соответствуют вкладам частиц и дырок. Контурный интеграл по η выделяет вклады с одинаковым числом частиц и дырок. Это ограничение необходимо, поскольку в фермионном представлении число частиц фиксировано.

Доказательство совпадения кратностей вырождения $N_m^{\mathrm{F}} = N_m^{\mathrm{B}}$ при всех m эквивалентно проверке того, что $F_{\mathrm{B}}(z) = F_{\mathrm{F}}(z)$. Это равенство можно переписать так:

$$\oint\limits_{|\eta|=1}\prod_{m>0}(1-z^m)(1+\eta z^m)(1+\eta^{-1}z^{m-1})\frac{d\eta}{2\pi i\eta} = 1\,. \tag{12.73}$$

Соотношение (12.73) следует из так называемого тройного тождества Якоби:

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1-w^{2n+2})(1+\eta w^{2n+1})(1+\eta^{-1}w^{2n+1}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\eta^n w^{n^2}\,. \tag{12.74}$$

Доказательство этого тождества неэлементарно[14].

77. Рассмотрим оператор $\widehat{\eta}_k(\mu) = e^{i\mu\widehat{\varphi}_1(x)}\widehat{\rho}_1(k)e^{-i\mu\widehat{\varphi}_1(x)}$ как функцию параметра μ. Вычислим производную

$$\frac{\partial\widehat{\eta}_k(\mu)}{\partial\mu} = ie^{i\mu\widehat{\varphi}_1(x)}[\widehat{\varphi}_1(x), \widehat{\rho}_1(k)]e^{-i\mu\widehat{\varphi}_1(x)}\,. \tag{12.75}$$

Коммутатор $[\widehat{\varphi}_1(x), \widehat{\rho}_1(k)]$ находим, пользуясь (12.16) и (12.36):

$$[\widehat{\varphi}_1(x), \widehat{\rho}_1(k)] = -i\sum_{k'>0}2\pi\left(\delta(k-k')e^{-ik'x}\delta(k+k')e^{-ik'x}\right) = -ie^{-ikx}\,. \tag{12.76}$$

Интегрируя (12.75) по μ, находим $\widehat{\eta}_k(\mu) = \widehat{\rho}_1(k) + e^{-ikx}$, что и требовалось. Рассмотрение других комбинаций j и l производится аналогично.

---

[14] См. Г. Эндрюс, Теория разбиений, с. 35, М.: Наука, 1982

Для доказательства соотношения (12.54) умножим левую и правую части (12.52) на $|A_j|^2 e^{i\mu\widehat{\varphi}_j(x)}$. Полагая $\mu = 1$, приходим к (12.54).

78. Рассмотрим рассеяние на зависящем от времени точечном потенциале, воспользовавшись представлением киральных фермионов, отдельно для каждого канала рассеяния. Гамильтониан, записанный через операторы $\widehat{\rho}_1(k)$ гармоник плотности правых частиц, имеет вид

$$\widehat{\mathcal{H}} = 2\pi v_F \sum_{k>0} \widehat{\rho}_1(k)\widehat{\rho}_1(-k) + we^{\gamma t}\widehat{\rho}_1(x=0)\,. \tag{12.77}$$

Первый член (12.77) представляет собой кинетическую энергию (12.27), а второй — потенциал рассеяния, включаемый со скоростью γ.

Свяжем амплитуду возмущения w в (12.77) с фазой рассеяния δ_l. Рассмотрим для этого одномерный идеальный ферми-газ в плавно меняющемся электромагнитном поле:

$$\widehat{\mathcal{H}}_{\rm int} = -\frac{1}{c}\int \widehat{j}_1(x)a(x,t)dx \tag{12.78}$$

Поле приложено в небольшой окрестности $x = 0$, причем его поток $\Phi(t) = \int a(x,t)dx$ плавно меняется как функция времени по закону $e^{\gamma t}$. Квазиклассический набег фазы, возникающий благодаря $a(x,t)$, дается множителем $\exp(2\pi i\Phi(t)/\Phi_0)$, где $\Phi_0 = hc/e$.

Квантовомеханическая фаза рассеяния δ_l в канале с угловым моментом l определяется с помощью асимптотики волновой функции: $\psi(r) \propto \sin(kr + \delta_l + \pi l)$. Из этого выражения видно, что изменение относительной фазы рассеянной и падающей волн при включении рассеяния есть $2\delta_l$. Сравнивая с фазой, возникающей в поле $a(x,t)$, находим

$$2\pi\,\Phi(t) = \Phi_0\, 2\delta_l e^{\gamma t}\,. \tag{12.79}$$

Подставляя это соотношение в (12.78) и выражая ток через плотность по формуле $\widehat{j}_1 = ev_F\widehat{\rho}_1$, получаем второй член гамильтониана (12.77). При этом $w = -2\delta_l\hbar v_F$.

Найдем интеграл перекрытия состояния в момент $t = 0$ с исходным состоянием $|0\rangle$, имевшимся при $t = -\infty$. Перекрытие состояний, записанное в представлении взаимодействия, есть

$$K_\gamma = \langle 0|\mathrm{T}\,\exp\Big(-i\int_{-\infty}^{0} \tilde{\mathcal{H}}_{\rm int}(t)\,dt\Big)|0\rangle\,, \tag{12.80}$$

где

$$\tilde{\mathcal{H}}_{\rm int}(t) = we^{\gamma t}\tilde{\rho}_1(x,t)_{x=0}\,,\quad \tilde{\rho}_1(x,t) = e^{i\widehat{\mathcal{H}}_0 t}\tilde{\rho}_1(x)e^{-i\widehat{\mathcal{H}}_0 t}\,. \tag{12.81}$$

Пользуясь соотношениями (12.16), выразим плотность $\widehat{\rho}_1(x)$ через бозе-операторы b_k и b_k^+, и перейдем в представление взаимодействия:

$$\tilde{\rho}_1(x,t) = \sum_{k>0}(\lambda_k L)^{-1}\left(e^{ikx-iv|k|t}b_k + e^{-ikx+iv|k|t}b_k^+\right) \tag{12.82}$$

При этом гамильтониан взаимодействия (12.81) оказывается линейным по бозе-операторам, что делает задачу усреднения экспоненты (12.80) весьма простой. Отметим, что именно на этом шаге становится очевидным преимущество бозонизации по сравнению с прямым вычислением.

Найдем среднее от экспоненты (12.80), пользуясь правилом гауссова усреднения и теоремой Вика:

$$K_\gamma = \exp\left[-w^2\int_{-\infty}^{0}dt\int_{-\infty}^{t}\langle\tilde\rho_1(x,t)\tilde\rho_1(x,t')\rangle_{x=0}e^{\gamma(t+t')}dt'\right]. \tag{12.83}$$

Согласно (12.16) интересующий нас коррелятор величин $\tilde\rho_1(x,t)_{x=0}$ есть

$$\langle\tilde\rho_1(0,t)\tilde\rho_1(0,t')\rangle = \sum_{k>0}e^{-i|k|v(t-t')-a|k|}/\lambda_k^2 L\,. \tag{12.84}$$

Подставляя (12.84) в (12.83) и вычисляя интегралы по t' и t, находим

$$K_\gamma = \exp\left(-w^2\sum_{k>0}\frac{k}{2\pi}\frac{e^{-ak}}{(\gamma+ikv_F)2\gamma}\right). \tag{12.85}$$

При вычислении интеграла (12.85) оставляем только вещественную часть, поскольку относительная фаза начального и конечного состояний нас не интересует. Результат есть

$$K_\gamma = \exp\left(-\frac{w^2}{4\pi}\sum_{k>0}\frac{ke^{-ak}}{k^2v_F^2+\gamma^2}\right) = \exp\left(-\frac{\delta^2}{2\pi^2}\ln\frac{v_F}{\gamma a}\right). \tag{12.86}$$

Остается только заметить, что $a \approx v_F/E_F$, и что вклады в K_γ от каналов рассеяния с различными значениями спина и углового момента факторизуются. Произведение независимых вкладов различных каналов дает формулу (12.55).

79. Вероятность поглощения фотона, согласно «золотому правилу», записывается в виде

$$W(\omega) = 2\pi\sum_f\left|\sum_p u_p(\omega)\langle f|a_p^+b|i\rangle\right|^2\delta(\omega-\omega_0-E_f)\,, \tag{12.87}$$

где a_p^+ — оператор рождения электрона с импульсом p в зоне проводимости, b — оператор рождения дырки (уничтожения электрона) на внутренней оболочке атома, $u_p(\omega)$ — дипольный матричный элемент, ω_0 — порог поглощения, равный сумме минимальной энергии выбитого электрона E_F и энергии образования дырки E_0. Суммирование в (12.87) происходит по импульсам p электрона, попадающего в зону проводимости, а также по всем конечным состояниям $|f\rangle$ системы с добавленными электроном и дыркой. Начальное состояние $|i\rangle$ представляет собой основное состояние идеального ферми-газа.

Преобразуем выражение (12.87), воспользовавшись соотношением

$$2\pi\sum_f\delta(\omega-\omega_0-E_f)\,|f\rangle\,\langle f| \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i\widehat{\mathcal{H}}_{\rm sc}t+i(\omega-\omega_0)t}dt\,, \tag{12.88}$$

где $\widehat{\mathcal{H}}_{\rm sc}$ — гамильтониан ферми-газа в присутствии рассеивающего центра, характеризующегося фазами рассеяния δ_l. Пренебрегая зависимостью матричного элемента $u_p(\omega)$ от ω, запишем (12.87) в виде

$$W(\omega) = A\int\limits_{-\infty}^{\infty} \langle i|b^+\widehat{\psi}_{\rm exc}e^{-i\widehat{\mathcal{H}}_{\rm sc}}\widehat{\psi}^+_{\rm exc}b|i\rangle e^{i(\omega-\omega_0)t}dt\,, \tag{12.89}$$

где $\widehat{\psi}^+_{\rm exc}(r) = A^{-1/2}\sum_p u_p a_p^+ e^{-ipr}$ — оператор рождения электрона в состоянии с угловым моментом j, локализованном в окрестности точки $r=0$, где происходит поглощение фотона. (Здесь $A = \sum_p |u_p|^2$ — нормировочный множитель.)

Теперь удобно избавиться от состояний дырки, заменив b^+b на 1. Получаем

$$W(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Tr}\left(e^{i\widehat{\mathcal{H}}_0 t}\widehat{\psi}_{\rm exc}e^{-i\widehat{\mathcal{H}}_{\rm sc}t}\widehat{\psi}^+_{\rm exc}\right)e^{i(\omega-\omega_0)t}dt\,. \tag{12.90}$$

При записи (12.90) мы воспользовались тем, что для гамильтониана $\widehat{\mathcal{H}}_0$ системы в отсутствие рассеяния ($\delta_l = 0$) исходное состояние $|i\rangle$ является собственным.

Теперь бозонизуем задачу так же, как это было сделано в задаче 78. При этом гамильтониан есть сумма независимых вкладов каналов с различными l:

$$\widehat{\mathcal{H}}_{\rm sc} = \sum_l \widehat{\mathcal{H}}_l\,. \tag{12.91}$$

Гамильтониан $\widehat{\mathcal{H}}_l$, описывающий рассеяние в канале с угловым моментом l, может быть записан через гармоники плотности киральных фермионов $\widehat{\rho}^{(l)}(k)$ следующим образом:

$$\widehat{\mathcal{H}}_l = 2\pi v_F\sum_{k>0}\left\{\widehat{\rho}^{(l)}_1(k)\widehat{\rho}^{(l)}_1(-k) - \frac{\delta_l}{\pi}\left[\widehat{\rho}^{(l)}_1(k) + \widehat{\rho}^{(l)}_1(-k)\right]\right\}\,. \tag{12.92}$$

В выражении (12.92) учтена связь между фазой рассеяния и константой связи в бозонизованном представлении точечного рассеяния, найденная в задаче 78.

Оператор рождения электрона в бозонизованном представлении записывается следующим образом:

$$\widehat{\psi}^+_{\rm exc} = (2\pi a)^{-1/2}e^{i\widehat{\varphi}_1(x)}|_{l=j,x=0}\,. \tag{12.93}$$

Обратим внимание на то, что оператор $\widehat{\psi}^+_{\rm exc}$ действует нетривиально только в канале с $l=j$, а в остальных каналах он действует как единичный оператор.

Подинтегральное выражение (12.90) есть произведение вкладов каналов с различными l. Рассмотрим сначала $l \neq j$. В этом случае, применяя доказанное в задаче 77 тождество $e^{i\mu\widehat{\varphi}_1(x)}\widehat{\rho}_1(k)e^{-i\mu\widehat{\varphi}_1(x)} = \widehat{\rho}^{(l)}_1(k) + \mu e^{-ikx}$ с $\mu = -\delta_l/\pi$ и $x=0$, находим:

$$e^{i\mu\widehat{\varphi}_1(x)}\widehat{\mathcal{H}}_0 e^{-i\mu\widehat{\varphi}_1(x)} = \widehat{\mathcal{H}}_0 + 2\pi v_F\sum_{k>0}\left(-\frac{\delta_l}{\pi}\left(\widehat{\rho}^{(l)}_1(k) + \widehat{\rho}^{(l)}_1(-k)\right) + \frac{\delta_l^2}{\pi^2}\right)\,. \tag{12.94}$$

Правая часть этого выражения, с точностью до несущественной константы [15], есть $\widehat{\mathcal{H}}_l$. Сделанное наблюдение позволяет переписать вклад l-го канала в выражение (12.90) следующим образом:

$$\mathrm{Tr}\left(e^{i\widehat{\mathcal{H}}_0 t}e^{-i\widehat{\mathcal{H}}_l t}\right) = e^{-i\Delta_l t}\langle e^{i\widehat{\mathcal{H}}_0 t}e^{i\mu\widehat{\varphi}_1}e^{-i\widehat{\mathcal{H}}_0 t}e^{-i\mu\widehat{\varphi}_1}\rangle = e^{-i\Delta_l t}\langle e^{i\mu\widehat{\varphi}_1(t)}e^{-i\mu\widehat{\varphi}_1(0)}\rangle\,, \qquad (12.95)$$

где $\mu = -\delta_l/\pi$, $\widehat{\varphi}_1(t) = \widehat{\varphi}_1(x,t)_{x=0}$. Чтобы вычислить среднее в (12.95), приведем произведение операторов к нормально-упорядоченной форме. Это нетрудно сделать, воспользовавшись тождеством Бейкера–Хаусдорфа:

$$\begin{aligned} e^{i\mu\widehat{\varphi}_1(t)}e^{-i\mu\widehat{\varphi}_1(0)} &= e^{i\mu(\widehat{\varphi}_1(t)-\widehat{\varphi}_1(0))+\frac{\mu^2}{2}[\widehat{\varphi}_1(t),\widehat{\varphi}_1(0)]} = \\ &= e^{\mu\widehat{B}^+}e^{-\mu\widehat{B}}e^{\frac{\mu^2}{2}([\widehat{B}^+,\widehat{B}]+[\widehat{\varphi}(t),\widehat{\varphi}(0)])}, \\ \widehat{B} &= \sum_{k>0}\lambda_k b_k\left(e^{-ikv_F t}-1\right)e^{-a|k|/2}\,. \end{aligned}$$

Вычисляя среднее, получаем

$$\langle e^{i\mu\widehat{\varphi}_1(t)}e^{-i\mu\widehat{\varphi}_1(0)}\rangle = \exp\left(\frac{\delta_l^2}{\pi^2}\ln\frac{a}{a+iv_F t}\right)\,. \qquad (12.96)$$

При больших t это выражение ведет себя как $t^{-\delta_l^2/\pi^2}$.

Теперь рассмотрим динамику в канале с $l = j$. Пользуясь тем же методом, что и выше, находим вклад этого канала:

$$\mathrm{Tr}\left(e^{i\widehat{\mathcal{H}}_0 t}e^{i\widehat{\varphi}_1}e^{-i\widehat{\mathcal{H}}_l t}e^{-i\widehat{\varphi}_1}\right) = \langle e^{i\widehat{\mathcal{H}}_0 t}e^{i(1+\mu)\widehat{\varphi}_1}e^{-i\widehat{\mathcal{H}}_0 t}e^{-i(1+\mu)\widehat{\varphi}_1}\rangle\,, \qquad (12.97)$$

где $\mu = -\delta_j/\pi$. В результате выполненного преобразования операторы $e^{\pm i\widehat{\varphi}_1}$ удобно комбинируются с $e^{\pm i\mu\widehat{\varphi}_1}$. Дальнейшие вычисления ничем не отличаются от случая $l \neq j$, с точностью до замены $\mu \to 1+\mu = 1-\delta_j/\pi$. В результате получаем

$$\exp\left[\left(1-\frac{\delta_j}{\pi}\right)^2\ln\frac{a}{a+iv_F t}\right]\,. \qquad (12.98)$$

Вычисляя произведение вкладов всех l с учетом кратности $2l+1$ орбитального вырождения и двукратного спинового вырождения, получаем следующее выражение:

$$W(\omega) = A^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{a}{a+iv_F t}\right)^{1-2\delta_j/\pi+2\sum\limits_l(2l+1)\delta_l^2/\pi^2}e^{i(\omega-\omega_0)t}dt\,. \qquad (12.99)$$

Показатель степени есть не что иное как $1+\beta$. При вычислении интеграла по t замыкаем контур в верхней или нижней полуплоскости комплексного t, в зависимости

[15] Роль этой константы, величина которой есть $\Delta_l = 2\pi v_F\sum\limits_{k>0}\delta_l^2/\pi^2$, сводится к небольшому сдвигу порога поглощения ω_0.

от знака $\omega-\omega_0$. В результате получаем искомое соотношение $W(\omega)\propto(\omega-\omega_0)^\beta$ при $\omega>\omega_0$ и $W(\omega)=0$ при $\omega<\omega_0$.

80 а. Сначала найдем гриновскую функцию $G^0_j(x,t)$ в отсутствии взаимодействия для правых частиц: $j=1$. Ход вычисления напоминает преобразования, проделанные выше при проверке коммутационных соотношений. Сначала преобразуем произведение операторов в (12.50) с помощью тождества Бейкера–Хаусдорфа (12.35):

$$e^{i\widehat{\varphi}_j(x,t)}e^{-i\widehat{\varphi}_j(0,0)}=e^{i\widehat{\varphi}_j(x,t)-i\widehat{\varphi}_j(0,0)}e^{\frac{1}{2}[\widehat{\varphi}_j(x,t),\widehat{\varphi}_j(0,0)]}\,. \tag{12.100}$$

Теперь нормально упорядочиваем это выражение, еще раз применяя тождество (12.35), и вычисляем коммутаторы, пользуясь (12.36):

$$e^{i\widehat{\varphi}_j(x,t)}e^{-i\widehat{\varphi}_j(0,0)}=e^{-\widehat{B}^+}e^{\widehat{B}}e^{\frac{1}{2}([\widehat{B}^+,\widehat{B}]+[\widehat{\varphi}_j(x,t),\widehat{\varphi}_j(0,0)])}=$$

$$=e^{-\widehat{B}^+}e^{\widehat{B}}\exp\left(2\pi\sum_{k>0}\frac{e^{-ak}}{k}(e^{ik(x-vt)}-1)\right)\,, \tag{12.101}$$

$$\widehat{B}=\sum_{k>0}\lambda_k b_k\left(e^{ikx-kv_Ft}-1\right)\,. \tag{12.102}$$

Сумма в экспоненте, как было найдено в (12.44), есть $\ln\Big\{a/[a-i(x-vt)]\Big\}$. Подставляем результат в (12.50), усредняем по основному состоянию, и получаем

$$G^0_1(x,t)=(2\pi)^{-1}\frac{1}{a-i(x-vt)}\,,\qquad a\to 0\,. \tag{12.103}$$

Действуя аналогично, находим

$$G^0_2(x,t)=(2\pi)^{-1}\frac{1}{a+i(x+vt)}\,,\qquad a\to 0\,. \tag{12.104}$$

Разумеется, точно такие же выражения можно получить прямым вычислением с помощью вторично-квантованных фермиевских операторов.

Перейдем к вычислению функции Грина взаимодействующих фермионов. Временная зависимость оператора $\widehat{\varphi}_j(x,t)$ может быть получена из (12.29), (12.30), (12.31). Упростим задачу, считая константы связи g_1 и g_2 независящими от k величинами. При этом угол θ в преобразовании Боголюбова (12.29) есть константа.

Преобразуем операторы b_k, b_k^+ в (12.36) с помощью соотношений (12.29). При этом оператор фазы правых частиц $\widehat{\varphi}_1(x,t)$ приобретает вид:

$$i\sum_{k>0}\lambda_k e^{-ak}\left\{e^{-ikx}[\operatorname{ch}\theta\,\tilde{b}_k^+(t)-\operatorname{sh}\theta\,\tilde{b}_{-k}(t)]-e^{ikx}[\operatorname{ch}\theta\,\tilde{b}_k(t)-\operatorname{sh}\theta\,\tilde{b}^+_{-k}(t)]\right\}\,, \tag{12.105}$$

где $\tilde{b}_k(t)=e^{-i\omega_k t}\tilde{b}_k$, $\tilde{b}^+_{-k}(t)=e^{i\omega_k t}\tilde{b}^+_{-k}$, а ω_k дается (12.31). После перегруппировки слагаемых это выражение можно компактно записать так:

$$\varphi_1(x,t)=\operatorname{ch}\theta\,\tilde{\varphi}_1(x,t)-\operatorname{sh}\theta\,\tilde{\varphi}_2(x,t)\,. \tag{12.106}$$

Аналогично, для левых частиц находим

$$\varphi_2(x,t) = \operatorname{ch}\theta\,\tilde{\varphi}_2(x,t) - \operatorname{sh}\theta\,\tilde{\varphi}_1(x,t)\,, \tag{12.107}$$

Как и выше в (12.29), (12.31), тильда в (12.106), (12.107) обозначает представление, в котором гамильтониан диагонален.

Чтобы найти функции Грина с помощью (12.106) и (12.107), заметим следующее. В диагонализованном представлении операторы $\tilde{\varphi}_1(x,t)$ и $\tilde{\varphi}_2(x',t')$ коммутируют, и поэтому среднее в (12.50) распадается на произведение средних от экспонент левых и правых величин. Каждое из этих средних практически совпадает с функцией Грина свободных частиц, найденной выше, отличаясь лишь множителями $\operatorname{ch}\theta$ и $\operatorname{sh}\theta$ в показателях экспонент. Поэтому усреднение можно заново не проводить и сразу записать ответ:

$$G_1(x,t) = (2\pi a)^{\operatorname{ch}^2\theta+\operatorname{sh}^2\theta-1}\left(G_1^0(x,t)\right)^{\operatorname{ch}^2\theta}\left(G_2^0(x,t)\right)^{\operatorname{sh}^2\theta}, \tag{12.108}$$

$$G_2(x,t) = (2\pi a)^{\operatorname{ch}^2\theta+\operatorname{sh}^2\theta-1}\left(G_2^0(x,t)\right)^{\operatorname{ch}^2\theta}\left(G_1^0(x,t)\right)^{\operatorname{sh}^2\theta}. \tag{12.109}$$

Подставляя в (12.108) выражения (12.103) и (12.104) для $G_1^0(x,t)$ и $G_2^0(x,t)$, получаем (12.51).

80 б. Функция Грина при конечной температуре может быть найдена тем же методом, что и функция Грина при $T=0$. Сначала мы рассмотрим ситуацию, когда взаимодействие отсутствует. После этого соотношения (12.106) и (12.107) позволят связать взаимодействующий и невзаимодействующий случаи.

В отсутствие взаимодействия вычисление производится так. Преобразуем произведение операторов в определении функции Грина (12.50) по формуле (12.100) и усредним получившееся выражение по матрице плотности при конечной температуре. Это усреднение гауссово, поэтому имеем

$$\langle e^{i\widehat{\varphi}_j(x,t)}e^{-i\widehat{\varphi}_j(0,0)}\rangle = e^{-\frac{1}{2}\langle(\widehat{\varphi}_j(x,t)-i\widehat{\varphi}_j(0,0))^2\rangle}e^{\frac{1}{2}[\widehat{\varphi}_j(x,t),\widehat{\varphi}_j(0,0)]}. \tag{12.110}$$

Рассмотрим правые частицы ($j=1$). Вычисляем среднее в (12.110), пользуясь (12.36):

$$\langle(\widehat{\varphi}_j(x,t)-i\widehat{\varphi}_j(0,0))^2\rangle = \sum_{k>0}\lambda_k^2 L e^{-ak}(2n_B(k)+1)\,|e^{ikx(t)}-1|^2\,, \tag{12.111}$$

где $x(t)=x-vt$, а $n_B(k)$ — бозевская функция распределения. Коммутатор в правой части (12.110) есть

$$[\widehat{\varphi}_j(x,t),\widehat{\varphi}_j(0,0)] = \sum_{k>0}\lambda_k^2 L e^{-ak}(e^{ikx(t)}-e^{-ikx(t)})\,. \tag{12.112}$$

Поэтому выражение (12.110) можно переписать в виде e^A, где

$$A = 2\pi\sum_{k>0}\frac{e^{-ak}}{k}\left((n_B(k)+1)\left(e^{ikx(t)}-1\right)+n_B(k)\left(e^{-ikx(t)}-1\right)\right)\,. \tag{12.113}$$

Чтобы найти величину A, разложим функцию распределения в ряд:

$$n_B(k) = \frac{1}{e^{vk/T} - 1} = e^{-bk} + e^{-2bk} + e^{-3bk} + \dots, \quad b = v/T\,. \tag{12.114}$$

Подставляя (12.114) в (12.113), и интегрируя каждый член ряда (12.114) по отдельности, получаем

$$A = \sum_{m\geqslant 0} \ln \frac{mb + a}{mb + a - ix(t)} + \sum_{m>0} \ln \frac{mb + a}{mb + a + ix(t)}\,. \tag{12.115}$$

Отсюда, переходя к пределу $a \to 0$, находим

$$e^A = \frac{a}{a - ix(t)} \frac{\pi x(t)/b}{\operatorname{sh}(\pi x(t)/b)} = \frac{\pi i a/b}{\operatorname{sh}(\pi(x(t) + ia)/b)}\,. \tag{12.116}$$

В результате приходим к следующему выражению для функции Грина:

$$G_1^0(x,t) = \frac{i}{2b \operatorname{sh}(\pi(x - vt + ia)/b)}\,, \quad G_2^0(x,t) = -\frac{i}{2b \operatorname{sh}(\pi(x + vt - ia)/b)} \tag{12.117}$$

(Функция Грина левых частиц получается аналогично.)

Для нахождения функций Грина взаимодействующей системы применим прием, использованный выше при рассмотрении случая $T = 0$. Заметим, что соотношения (12.106), (12.107), дающие правило преобразования операторов фазы $\widehat{\varphi}_{1,2}(x,t)$ при диагонализации гамильтониана (12.19), верны и при $T > 0$. Выражая с помощью (12.106), (12.107) операторы $\widehat{\varphi}_{1,2}(x,t)$ через операторы фазы квазичастиц $\tilde{\varphi}_{1,2}(x,t)$, подставляем их в определение функции Грина (12.50). При этом вклады $\tilde{\varphi}_1(x,t)$ и $\tilde{\varphi}_2(x',t')$ в (12.50) факторизуются. По этой причине, как и выше, каждый из вкладов есть не что иное, как функция Грина свободных частиц, правых или левых, возведенная в степень $\operatorname{ch}^2\theta$ или $\operatorname{sh}^2\theta$, соответственно. В результате находим

$$G_1(x,t) = \frac{1}{2\pi a} \left(\frac{\pi T\, i\tilde{a}}{\operatorname{sh}(\pi T(\frac{x}{v'} - t + i\tilde{a}))} \right)^{\operatorname{ch}^2\theta} \left(\frac{\pi T\, i\tilde{a}}{\operatorname{sh}(\pi T(-\frac{x}{v'} - t + i\tilde{a}))} \right)^{\operatorname{sh}^2\theta}, \tag{12.118}$$

$$G_2(x,t) = \frac{1}{2\pi a} \left(\frac{\pi T\, i\tilde{a}}{\operatorname{sh}(\pi T(-\frac{x}{v'} - t + i\tilde{a}))} \right)^{\operatorname{ch}^2\theta} \left(\frac{\pi T\, i\tilde{a}}{\operatorname{sh}(\pi T(\frac{x}{v'} - t + i\tilde{a}))} \right)^{\operatorname{sh}^2\theta}, \tag{12.119}$$

$$v' = \left((2\pi v + g_1)^2 - g_2^2 \right)^{1/2} / 2\pi\,, \quad \tilde{a} = a/v'\,, \tag{12.120}$$

где, как и в (12.51), v' — скорость квазичастиц, перенормированная взаимодействием, и $\operatorname{th} 2\theta = g_2/(g_1 + 2\pi v)$.

81. Начнем с вывода общего выражения для туннельного тока. Вычисление, которое требуется проделать, отчасти дублирует приведенный в задаче 68 вывод формулы (11.14) для туннельного тока. Однако, поскольку при рассмотрении латтинжеровской жидкости более удобно пользоваться функциями Грина в координатном представлении, а не в импульсном, как в гл. 11, более полезно не переходить в (11.14) от импульсного представления к координатному, а выполнить вычисление заново.

Итак, поданное на туннельный контакт между системами A и B напряжение eV представляет собой разность химических потенциалов: $eV = \mu_B - \mu_A$. Удобно сделать калибровочное преобразование, приводящее гамильтониан к виду $\widehat{\mathcal{H}}_{\text{tot}} = \widehat{\mathcal{H}}_A + \widehat{\mathcal{H}}_B + \widehat{\mathcal{H}}_{\text{tun}}(t)$, где гамильтониан туннелирования явно зависит от времени следующим образом:

$$\widehat{\mathcal{H}}_{\text{tun}}(t) = w\ e^{-ieVt}\psi_B^+\psi_A\Big|_{x=x_0} + \text{h.c.}\,. \tag{12.121}$$

Оператор туннельного тока определяется как производная по времени от оператора заряда:

$$\hat{I} = ie\,[\widehat{\mathcal{H}}_{\text{tot}}, \hat{Q}_A]\,, \quad \hat{Q}_A = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_A^+(x)\psi_A(x)dx\,. \tag{12.122}$$

Вычисляя коммутатор в (12.122), получаем

$$\hat{I} = ie\left(w\ e^{-ieVt}\psi_B^+\psi_A - w^*\ e^{ieVt}\psi_A^+\psi_B\right)_{x=x_0}\,. \tag{12.123}$$

Мы будем искать туннельный ток с помощью теории возмущений по (малой) амплитуде туннелирования w. Поэтому разумно перейти в представление взаимодействия по отношению к «возмущению» $\widehat{\mathcal{H}}_{\text{tun}}(t)$:

$$\langle\hat{I}(t)\rangle = \langle\hat{U}^{-1}(t)\hat{I}(t)\hat{U}(t)\rangle_0\,, \quad \hat{U}(t) = \mathrm{T}\ \exp\left(-i\int\limits_{-\infty}^{t}\widehat{\mathcal{H}}_{\text{tun}}(t')dt'\right)\,. \tag{12.124}$$

Разлагая $\hat{U}(t)$ в ряд по степеням w, убеждаемся, что главный вклад дается членом разложения первого порядка. Соответствующий оператор под знаком усреднения $\langle ...\rangle_0$ в (12.124) есть

$$e|w|^2\int\limits_{-\infty}^{t}\left([\psi_B^+(t')\psi_A(t'), \psi_A^+(t)\psi_B(t)]e^{-ieV(t'-t)} - [\psi_A^+(t')\psi_B(t'), \psi_B^+(t)\psi_A(t)]e^{ieV(t'-t)}\right)dt' \tag{12.125}$$

Два из четырех слагаемых, получающихся при расписывании коммутаторов в (12.125), можно преобразовать, сделав замену $t - t' \to t' - t$. При этом (12.125) приобретает форму, в которой области $t' < t$ и $t' > t$ оказываются равноправными. В результате выражение для туннельного тока (12.124) приобретает весьма удобный вид:

$$\langle\hat{I}(t)\rangle = e|w|^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(K_{BA}(t-t')e^{-ieV(t'-t)} - K_{AB}(t-t')e^{ieV(t'-t)}\right)dt'\,, \tag{12.126}$$

где

$$K_{BA}(t-t') = \langle\psi_B^+(t')\psi_B(t)\rangle\,\langle\psi_A(t')\psi_A^+(t)\rangle\,, \tag{12.127}$$
$$K_{AB}(t-t') = \langle\psi_A^+(t')\psi_A(t)\rangle\,\langle\psi_B(t')\psi_B^+(t)\rangle\,. \tag{12.128}$$

Средние в (12.127), (12.128) берутся соответственно по основным состояниям систем A или B. Отметим, что полученное выражение (12.126) не зависит от конкретных деталей физики туннелирования и имеет весьма общий характер.

Нас интересует ситуация, когда системы A и B представляют собой латтинжеровские жидкости. Выразим операторы рождения и уничтожения электрона в (12.127), (12.128) через операторы в бозонном представлении. Для определенности рассмотрим операторы $\psi_A^+(x)$ и $\psi_A(x)$ рождения и уничтожения электрона в системе A. Наиболее общее выражение для этих операторов, справедливое при сколь угодно сильном взаимодействии, имеет следующий вид:

$$\psi_A(x) = \sum_{m-m'=1} A_{m,m'} e^{i(m-m')p_0 x} e^{im\widehat{\varphi}_1(x)+im'\widehat{\varphi}_2(x)}\,, \tag{12.129}$$

$$\psi_A^+(x) = \sum_{m-m'=1} A^*_{m,m'} e^{-i(m-m')p_0 x} e^{-im\widehat{\varphi}_1(x)-im'\widehat{\varphi}_2(x)}\,. \tag{12.130}$$

Физический смысл этого выражения в том, что туннелирующий в систему A электрон описывается суперпозицией нескольких возможных состояний. Электрон может превратиться в правую или в левую частицу, а может — в две правых частицы и левую дырку, и т. п. Ниже мы рассмотрим задачу, не учитывая вклады составных операторов. Будем считать, что $\psi_A(x) = (2\pi a)^{-1/2} e^{i\widehat{\varphi}_1(x)}$, $\psi_A^+(x) = (2\pi a)^{-1/2} e^{-i\widehat{\varphi}_1(x)}$. Как будет видно из дальнейшего, решение без труда обобщается на более сложные случаи.

Корреляционные функции операторов $e^{\pm i\widehat{\varphi}_1(x)}$ при произвольной температуре были найдены в задаче 80. Рассмотрим сначала более простой случай $T=0$. Подставляя выражение (12.51) для функций Грина в соотношения (12.127), (12.128), находим

$$K_{BA}(t-t') = (2\pi a)^{-2}\left(\frac{\tilde a}{\tilde a - i(t'-t)}\right)^{\alpha},\ K_{AB}(t-t') = K_{BA}(t'-t)\,, \tag{12.131}$$

где

$$\tilde a = a/v_F \quad \text{и} \quad \alpha = 2(1+\operatorname{sh}^2\theta_A + \operatorname{sh}^2\theta_B)\,. \tag{12.132}$$

Выражение (12.126) удобно вычислить с помощью известного представления гамма-функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{(a+it)b}(a+it)^{-z}dt = 2\pi\frac{b^{z-1}}{\Gamma(z)}\,, \tag{12.133}$$

верного при $b>0$ и $b>0$. Находим, что при $V>0$ вклад в интеграл по времени в (12.126) дает только первый член, а при $V<0$ — только второй член. Соответственно, туннельный ток есть

$$I = e|w|^2\frac{\tilde a^{\alpha}}{2\pi a^2\Gamma(\alpha)}\begin{cases}(eV)^{\alpha-1} & \text{при } V>0\ ,\\ -(-eV)^{\alpha-1} & \text{при } V<0\ .\end{cases} \tag{12.134}$$

Получаем, что туннельный ток при $T=0$ есть степенная функция $I\propto V^{\alpha-1}$, причем показатель степени зависит от силы взаимодействия в системах A и B. Отметим также, что в случае невзаимодействующих фермионов, когда $\theta_A = \theta_B = 0$ и $\alpha = 2$, для туннельного тока выполняется закон Ома $I \propto V$, как и следовало.

При конечной температуре $T > 0$ корреляционные функции операторов $e^{\pm i\widehat{\varphi}_1(x)}$ даются выражениями (12.118). При этом

$$K_{BA}(t-t') = (2\pi a)^{-2}\left(\frac{\pi T i\tilde{a}}{\mathrm{sh}(\pi T(t'-t)+iT\tilde{a})}\right)^{\alpha},\ K_{AB}(t-t') = K_{BA}(t'-t)\,. \quad (12.135)$$

Интеграл по времени в первом слагаемом (12.126) удобно преобразовать, сдвинув контур интегрирования по t' в комплексную плоскость. Выберем новый контур так: $\pi T(t'-t) = u + i\pi/2$, где u вещественно и $-\infty < u < \infty$. Сдвигая контур таким образом, мы не задеваем особенностей интегрируемого выражения и, значит, значение интеграла при этом не меняется. Переходя к интегрированию по u, получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\pi T i\tilde{a}}{\mathrm{sh}(\pi T(t'-t)+i\tilde{a})}\right)^{\alpha} e^{-ieV(t'-t)}dt' = \frac{e^{eV/2T}}{\pi T}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\pi T\tilde{a}}{\mathrm{ch}\,u}\right)^{\alpha} e^{-i(eV/\pi T)u}du\,. \quad (12.136)$$

Второе слагаемое в (12.126) имеет особенность по другую сторону от вещественной оси. Поэтому в данном случае, чтобы не задеть особенностей интегрируемого выражения, надо сдвинуть контур в другую сторону: $\pi T(t'-t) = u - i\pi/2$, где $-\infty < u < \infty$. Как нетрудно видеть, это приводит к выражению, получающемуся из (12.136) заменой $V \to -V$.

Интеграл по u в правой части (12.136) сводится к известному интегралу

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ibu}}{\mathrm{ch}^{\alpha}u}du = 2^{\alpha-1}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(\alpha+ib)\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}(\alpha-ib)\right)}{\Gamma(\alpha)}\,. \quad (12.137)$$

Вычитая друг из друга найденные таким способом вклады первого и второго членов (12.126), получаем окончательное выражение для туннельного тока:

$$I = \frac{e|w|^2}{(2\pi a)^2}\frac{(2\pi T\tilde{a})^{\alpha}}{\pi T}\,\mathrm{sh}\left(\frac{eV}{2T}\right)\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(\alpha+i\frac{eV}{\pi T})\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}(\alpha-i\frac{eV}{\pi T})\right)}{\Gamma(\alpha)}\,. \quad (12.138)$$

Это выражение обобщает найденную выше зависимость $I \propto V^{\alpha-1}$, имеющую место при $T = 0$, на случай произвольной температуры.

С помощью (12.138) нетрудно рассмотреть предельные случаи высокой и низкой (по сравнению с eV) температуры:

$$I \propto \begin{cases} T^{\alpha-2}V & \text{при } eV \ll T\ , \\ V^{\alpha-1} & \text{при } eV \gg T\ . \end{cases} \quad (12.139)$$

Таким образом, при конечной температуре и достаточно малом eV имеет место закон Ома. Для наблюдения неомического поведения туннельного тока, характерного для латтинжеровской жидкости, требуется, чтобы выполнялось соотношение $eV \geqslant \alpha\pi T$.

Решение 82. Функции Грина в отсутствие взаимодействия имеют вид

$$G_{1,2}(\varepsilon, p) = \frac{1}{i\varepsilon \mp v_F p}, \tag{12.140}$$

где знаки «−» и «+» соответствуют правым и левым частицам.

Будем считать взаимодействие слабым и применим теорию возмущений для отыскания собственно-энергетической части $\Sigma_{1,2}(i\varepsilon, p)$. Вклады первого порядка по взаимодействию сводятся к сдвигу химического потенциала и перенормировке скорости v_F, и поэтому интереса не представляют.

Рассмотрим вклады в собственно-энергетическую часть, возникающие во втором порядке по взаимодействию. Для правых частиц имеются три различные вклада, дающиеся диаграммами, изображенными на рис. 12.1.

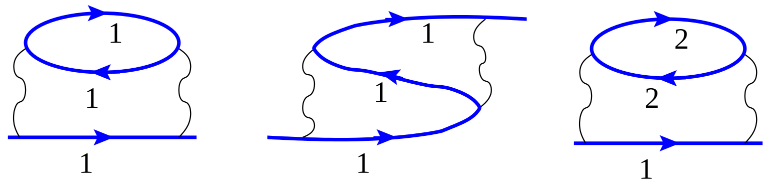


Рис. 12.1

Нетрудно видеть, что первый и второй графики, описывающие рассеяния правых частиц друг на друге, отличаются лишь знаками и поэтому сокращаются. Остается третий график, описывающий рассеяние правых частиц на левых. Соответствующее выражение имеет вид

$$\Sigma_1(\varepsilon, p) = g_2^2 \iint \Pi_2(\omega, k) G_1^0(\omega + \varepsilon, k + p) \frac{dk d\omega}{(2\pi)^2}, \tag{12.141}$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_2(\omega, k) &= \iint G_2(\varepsilon'_+, p'_+) G_2(\varepsilon'_-, p'_-) \frac{dp' d\varepsilon'}{(2\pi)^2} = \\ &= \int \frac{n(p'_-) - n(p'_+)}{i\omega + v_F k} \frac{dp'}{2\pi} = -\frac{k}{2\pi(i\omega + v_F k)} \end{aligned} \tag{12.142}$$

— поляризационный оператор левых частиц ($\varepsilon'_\pm = \varepsilon' \pm \omega/2$, $p'_\pm = p \pm k/2$).

Подставляя выражение для $\Pi_2(\omega, k)$ в (12.141), вычисляем интеграл по ω и получаем

$$\Sigma_1(i\varepsilon, p) = \frac{g_2^2}{(2\pi)^2} \int\limits_{-k_{\max}}^{k_{\max}} \Big(n(-k) - n(k+p) \Big) \frac{k\, dk}{i\varepsilon - v_F(2k+p)}. \tag{12.143}$$

Мы ввели конечные пределы интегрирования $-k_{\max} < k < k_{\max}$ в выражение (12.143), чтобы иметь возможность регуляризовать расходящийся интеграл по k.

Рассмотрим по отдельности вклады в интеграл (12.143) от двух слагаемых в интегрируемом выражении. Слагаемое с $n(-k)$ приводит к интегралу по области $0 < k < k_{\max}$, а слагаемое с $n(k+p)$ — по области $-k_{\max} < k < -p$. После сдвига переменной $k \to k - p$ во втором интеграле получаем

$$\int_0^{k_{\max}} \frac{k\, dk}{i\varepsilon - v_F(2k+p)} - \int_{-k_{\max}-p}^{0} \frac{(k-p)\, dk}{i\varepsilon - v_F(2k-p)} . \tag{12.144}$$

Теперь вычисляем оба интеграла и оставляем только сингулярные при $\varepsilon,\, p \to 0$ члены. (Несингулярные члены дают обычные ферми-жидкостные перенормировки и поэтому интереса не представляют.) Результат имеет вид

$$\begin{aligned}\Sigma_1(i\varepsilon, p) &= -\frac{g_2^2}{(4\pi v_F)^2}(i\varepsilon - v_F p)\left(\ln\frac{2v_F k_{\max}}{-(i\varepsilon - v_F p)} + \ln\frac{2v_F k_{\max}}{i\varepsilon + v_F p}\right) = \\ &= -\frac{g_2^2}{(4\pi v_F)^2}(i\varepsilon - v_F p)\, \ln\frac{4v_F^2 k_{\max}^2}{\varepsilon^2 + v_F^2 p^2} .\end{aligned} \tag{12.145}$$

Логарифмическая особенность (12.145) показывает, что уже во втором порядке теории возмущений ферми-жидкостное поведение функции Грина разрушается.

Из приведенного вычисления видно, что логарифмическая расходимость во втором порядке теории возмущений есть чисто одномерный эффект. В размерности $D > 1$ процессы рассеяния ферми-частиц друг на друге, подобные изображенным на рис. 12.1, дают вклад в $\Sigma(\varepsilon, p)$ аналогичный (12.141). Однако, сингулярность поляризационного оператора $\Pi(\omega, k)$ при $\omega,\, k \to 0$ оказывается не такой сильной, как у выражения (12.142). (Это видно, например, из трехмерного выражения (8.47), найденного в задаче 44 а.) По этой причине при $D > 1$ диаграммы, описывающие рассеяние частиц, не приводят к расходимостям, и теория ферми-жидкости оказывается устойчивой конструкцией.

Список обозначений:

E_F — энергия Ферми;
p_0 — фермиевский импульс;
v_F — скорость Ферми;
$\xi_{\mathbf{p}} = v_F(|\mathbf{p}| - p_0)$ — спектр электронов, линеаризованный вблизи уровня Ферми;
$\nu_0 = mp_0/2\pi^2\hbar^3$ — плотность состояний трехмерного бесспинового ферми-газа;
$\nu_{2D} = m/2\pi\hbar^2$ — плотность состояний двумерного бесспинового ферми-газа;
$\nu_{1D} = m/\pi\hbar p_0$ — плотность состояний одномерного бесспинового ферми-газа;
$\mu_B = e\hbar/2mc$ — магнетон Бора;
c — скорость звука;
ω_D — дебаевская частота;
k_D — дебаевский волновой вектор;
g — константа электрон–фононного взаимодействия;
$\zeta = g^2\nu_0$ — безразмерная константа электрон–фононного взаимодействия;
Постоянная Планка $\hbar$ полагается равной 1, если не оговорено особо.

При ссылках использованы следующие сокращения:

[1] А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, ГИФМЛ, М. (1962);
переиздание: Добросвет, М. (1998)

[2] Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, *Квантовая Механика*, Наука, М. (1974).

[3] Р. Фейнман, *Статистическая Механика*, Мир, М. (1978).

[4] А. Б. Мигдал, *Качественные методы в квантовой теории*, Наука, М. (1978).

[5] Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, *Статистическая Физика*, Наука, М. (1976).

[6] Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая Физика*, Наука, М. (1978).

[7] G. D. Mahan, *Many-Particle Physics*, (Plenum Press, 1990).

[8] Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Физическая Кинетика*, Наука, М. (1979).

[9] В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, М. (1989).

[10] А. М. Поляков, Калибровочные поля и струны, Черноголовка, 1995 (in English: A. M. Polyakov, Gauge Fields and Strings, Harwood, 1987).

Предметный указатель