AUTOMATIQUE THÉORIQUE. — *Sur les anneaux de Fatou forts* (1).

Note (*) de **Eduardo D. Sontag** et **Yves Rouchaleau**, présentée par M. Henri Cartan.

Il est bien connu que les anneaux principaux sont des anneaux de Fatou forts. Nous construisons ici des anneaux de Fatou forts d'un type plus général. Nous prouvons également que, dans le cas noethérien, les anneaux de Fatou forts ont leur monoïde de classes de diviseurs égal à zéro et ont une dimension au plus égale à deux.

It is well known that principal rings are strong Fatou rings. We construct here a more general type of strong Fatou rings. We also prove that the monoid of divisor classes of a noetherian strong Fatou ring contains only the zero element, and that the dimension of such a ring is at most two.

I. Préliminaires. — Soit X^* le monoïde libre engendré par l'alphabet fini non vide X. Étant donné un anneau commutatif A, appelons $A \ll X \gg$ la A-algèbre de séries formelles à coefficients dans A en les indéterminées non commutatives $x_i \in X$. Si M est un A-module, appelons M' le module *dual* formé par toutes les applications A-linéaires de M dans A.

$R = (M, \mu, \gamma, \lambda)$ est une (A-) *représentation* de $r \in A \ll X \gg$, ou *module sériel* [*cf.* (2)], si M est un A-module, $\mu : X^* \to \mathrm{End}_A(M)$ est un homomorphisme de monoïdes, $\gamma \in M$, $\lambda \in M'$, et si pour tout $w \in X^*$,

$$(r, w) = \lambda\mu(w)\gamma.$$

R est une représentation *finie* lorsque M est un A-module de type fini. Lorsque r a une représentation finie on le dit *reconnaissable*.

R est une représentation *libre* (finie) lorsque $M = A^n$. C'est le cas considéré dans (2). L'entier n est le *rang* de R; le rang d'une série reconnaissable est le plus petit rang parmi ceux de toutes les représentations libres de r.

Une représentation est *observable* s'il n'existe aucun $m \neq 0$ tel que $\lambda\mu(w)\, m = 0$ pour tout $w \in X^*$. Une représentation est *accessible* si l'ensemble $\{\mu(w)\gamma,\ w \in X^*\}$ engendre M. Une représentation *canonique* est à la fois accessible et observable. Une représentation canonique de $r \in A \ll X \gg$ existe toujours en prenant pour M le A-module engendré par les colonnes de la matrice de Hankel de r [*cf.* (2)]. Il est possible de démontrer que pour que r soit reconnaissable il faut et il suffit que sa représentation canonique soit finie [*cf.* (3)].

Les représentations de $r \in A \ll X \gg$ forment une catégorie dont les morphismes $T : R \to \bar{R}$ sont donnés par les applications A-linéaires $T : M \to \bar{M}$ satisfaisant $T(\gamma) = \bar{\gamma}$, $\bar{\lambda} \circ T = \lambda$, et $\bar{\mu}(w) \circ T = T \circ \mu(w)$ pour tout $w \in X^*$. Il est facile de prouver :

Lemme 1. — *Soient* R *et* $\bar{R}$ *deux* A-*représentations de* r, R *étant accessible et* $\bar{R}$ *observable. Il existe alors un morphisme* (*unique*) $T : R \to \bar{R}$.

Il s'ensuit en général que les représentations canoniques sont toutes isomorphes et que dans le cas particulier où A est un corps une représentation est canonique si et seulement si son rang est minimal.

Par la suite nous supposerons que A est un anneau intègre avec corps de fractions K. Un élément $r \in A \ll X \gg$ peut aussi être considéré comme une série dans $K \ll X \gg$. Si $R = (M, \mu, \gamma, \lambda)$ est une A-représentation de r, la K-représentation $R \otimes_A K$ est $(M \otimes_A K, \mu \otimes_A 1_K, \gamma \otimes_A 1, \lambda \otimes_A 1_K)$, où $(\mu \otimes_A 1_K)(w) := \mu(w) \otimes_A 1_K$. Si R est A-canonique, $R \otimes_A K$ est K-canonique. Si donc r est A-reconnaissable, le rang de r sur K est la dimension de l'espace vectoriel $M \otimes_A K$, où $R = (M, \ldots)$ est une A-représentation canonique de r. Réciproquement, si r est une représentation libre et si $R \otimes_A K$ est K-observable, il est clair que R est A-observable.

DÉFINITION [*cf.* (2)]. — A *est un anneau de Fatou fort si tout* $r \in A \ll X \gg$ *qui est* K-*reconnaissable de rang* n, *est aussi* A-*reconnaissable de rang* n.

Le résultat suivant découle clairement de la discussion précédente :

LEMME 2. — *Soient* A *un anneau de Fatou fort et* R *une* A-*représentation canonique de* $r \in A \ll X \gg$. *Si* $n = \dim M \otimes_A K$, *il existe alors une* A-*représentation libre* $\bar{R} = (A^n, \ldots)$ *et un morphisme* $T : R \to \bar{R}$.

II. UNE CONDITION SUFFISANTE. — M. Fliess a montré [*cf.* (2)] qu'un anneau principal est un anneau de Fatou fort. Nous donnons ici une autre classe d'anneaux de Fatou forts contenant les anneaux de polynomes à deux variables sur un corps.

THÉORÈME 1. — *Soit* D *un anneau principal et* $A = D[x]$. A *est alors un anneau de Fatou fort.*

Preuve. — Soit R une A-représentation canonique de r. Considérons la représentation duale $R' = (M', \mu', \lambda, \gamma'')$, où $\mu'(w) := \mu(w)'$ et où l'action de γ'' est définie par $\gamma''(f) := f(\gamma)$ pour $f \in M'$. R' est alors une A-représentation de r et $\dim M \otimes_A K = \dim M' \otimes_A K$. Mais R' est une représentation libre de r. En effet, le dual de tout A-module de type fini est libre parce qu'il satisfait à la condition de (4) (p. 13).

Remarquons qu'une preuve analogue (utilisant R'' au lieu de R') donne le résultat correspondant pour des *systèmes* de séries reconnaissables [*cf.* (5)].

III. UNE CONDITION NÉCESSAIRE.

THÉORÈME 2. — *Soient* A *un anneau de Fatou fort noethérien et* P *un* A-*module réflexif fini de rang* $n-1$. *Alors,* $P \oplus A \simeq A^n$.

Preuve. — Soient $f' : A^r \to P'$ et $g : A^s \to P$ des applications A-linéaires surjectives. Appelons p_j la projection de A^r sur la j-ième coordonnée et i_j l'inclusion dans le j-ième facteur de A^s. Définissons $f_j := p_j \circ f$, $g_j := g \circ i_j$ et prenons un alphabet $X := \{x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_r\}$.

Définissons $R = (M, \mu, \gamma, \lambda)$, où $M := P \oplus A$, $\gamma := (0, 1) \in P \oplus A$, $\lambda(p, a) := a$, où μ est définie par $\mu(x_j)(p, a) := (g_j(a), 0)$ et $\mu(y_j)(p, a) := (0, f_j(p))$. Définissons $r \in A \ll X \gg$ par $(r, w) := \lambda\mu(w)\gamma$. R est alors une A-représentation canonique de r.

Le lemme 2 implique qu'il existe une A-représentation $\bar{R} = (A^n, \bar{\mu}, \bar{\gamma}, \bar{\lambda})$, et un $T : M \to A^n$ qui induit un morphisme $T : R \to \bar{R}$.

Si nous définissons $h : M \to A^{r+1} : (p, a) \mapsto (f(p), a)$ et $\alpha : A^r \to A^{r+1} :$ $x \mapsto (\bar{\lambda} \circ \bar{\mu}(y_1)(x), \ldots, \bar{\lambda} \circ \bar{\mu}(y_r)(x), \bar{\lambda}(x))$, nous avons $\alpha \circ T = h$, donc $h' = T' \circ \alpha'$. Puisque f' est surjective, h' l'est aussi, ainsi donc que T'. Par des considérations de minimalité sur K, T' est injective. T est donc un isomorphisme.

Puisqu'un idéal I de A satisfaisant $I \oplus A \simeq A^2$ est nécessairement principal, il s'ensuit que le monoïde des classes de diviseurs d'un anneau de Fatou fort A est réduit à zéro.

Puisque les A-modules réflexifs sont projectifs, il s'ensuit que la dimension de A est au plus égale à deux [6].

(*) Séance du 29 novembre 1976.

(1) Ce travail a été aidé en partie par Air Force Grant 72-2268 par l'intermédiaire du Center for Mathematical System Theory, University of Florida, Gainesville, FL 32611, U.S.A.

(2) M. Fliess, *J. Math. Pures Appl.*, 53, 1974, p. 197-222.

(3) E. Sontag, *J. Comp. System Sc.*, 11, 1975, p. 375-381.

(4) M. Eichler, *Introduction to the Theory of Algebraic Numbers and Functions*, Academic Press, New York, 1966.

(5) M. Fliess, *Sur certaines familles de séries formelles* (*Thèse Sc. Math.*, Université Paris VII, 1972).

(6) H. Bass, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 95, 1960, p. 466-488.

Y. R. :
Centre d'automatique,
E.N.S. des Mines,
35, *rue Saint-Honoré,*
77300 *Fontainebleau*;

E. D. S. :
Center for Mathematical System Theory,
Dept. of Mathematics,
University of Florida,
Gainesville,
FL 32611,
U.S.A.