

Συμμετροδιάμεσος

Άγγελος Άσος – assos@mit.edu

21 Ιουνίου 2023

1 Ορισμός, κατασκευή και λήμματα

- (Ορισμός) Έστω τρίγωνο ABC και το μέσο της BC , M . Η A -συμμετροδιάμεσος του τριγώνου ABC ορίζεται ως η αντανάκλαση της AM ως προς την εσωτερική διχοτόμο της A .
- (Steiner) Έστω D σημείο στην BC του ABC τριγώνου και αν η συμμετρική της AD ως προς την διχοτόμο της A γωνιάς τέμνει τη BC στο E , τότε:

$$\frac{DB}{CD} \frac{BE}{CE} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

- (Λόγος για Συμμετροδιάμεσο) Σε ένα τρίγωνο ABC , για σημείο X στην BC ισχύει

$$\frac{XB}{XC} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

ότι βρίσκεται στη συμμετροδιάμεσο αν και μόνο αν βρίσκεται στην A -συμμετροδιάμεσο του ABC

- (Κατασκευή) Έστω ABC τρίγωνο με περιγεγραμμένο κύκλο ω . Έστω οι εφαπτομένες στα B και C του ω να τέμνονται στο D . Τότε η AD είναι η A συμμετροδιάμεσος του ABC .
- (Αντιπαράλληλες και συμμετροδιάμεσος) Η A -συμμετροδιάμεσος είναι το σύνολο των μέσων των αντιπαράλληλων της BC .
- (Ίχνη απο συμμετροδιάμεσο) Ο λόγος των προβολών απο οποιοδήποτε σημείο της A -συμμετροδιαμέσου κάποιου τριγώνου ABC στις AB, AC είναι σταθερός και ίσως με $\frac{AB}{AC}$.

2 Προβλήματα

- Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC με $AB < AC < BC$ και περιγεγραμμένος κύκλος c με κέντρο O και ακτίνα R . Στα μικρά τόξα \widehat{AC} και \widehat{AB} θεωρούμε τα σημεία D και E . Έστω $K = BD \cap CE$ και $N = (BKE) \cap (CKD)$. Νδο A, K, N συνευθειακά αν και μόνο αν το K ανήκει στην A -συμμετροδιάμεσο του ABC (Αρχιμήδης 2018).

2. Έστω 3 σημεία A, B, C με αυτή τη σειρά να είναι πάνω σε μία ευθεία. Έστω ω ένας κύκλος που περνά από τα A, C και δεν έχει κέντρο στην ευθεία ABC . Οι εφαπτομένες στα A, C τέμνονται στο P . $Q = \omega \cap PB$. Νδο το σημείο που τέμνει η διχοτόμος της AQC την AC δεν εξαρτάται από την επιλογή του ω . (Μικρή Λίστα 2003, Γ2)
3. Έστω τρίγωνο ABC με $AB < AC$ και περιγεγραμμένο ω . Έστω t_B και t_C οι εφαπτομένες του ω ατ στα B και C , αντίστοιχα, και έστω $L = t_B \cap t_C$. Η ευθεία που περνά απο το B παράλληλη στην AC τέμνει την t_C στο D . Η ευθεία που περνά από το C παράλληλη στην AB τέμνει την t_B στο E . Έστω $T = (BDC) \cap AC$, και το T βρίσκεται μεταξύ A και C . Όμοια έστω $S = (BEC) \cap AB$ και το B να βρίσκεται μεταξύ S και A . Νδο ST, AL, BC συντρέχουν. (BMO 2017)
4. Έστω MN μια παράλληλη ευθεία με την BC , $M \in AB$ και $N \in AC$. $BN \cap CM = P$. Οι κύκλοι των BMP και CNP τέμνονται στο P και στο Q . Νδο η $QAP = PAC$ γωνίες. (BMO 2009)
5. Έστω ABC τρίγωνο με $AC = BC$, και P σημείο έτσι ώστε $PAB = PBC$. Αν M μέσο του AB , νδο $APM + BPC = 180$. (Πολωνία 2000)

3 Υποδείξεις

Ασκήσεις

1. -
2. Λόγος ημιτόνων στα DAB και EDC .
3. Άσκηση 1
4. Έστω η συμμετρική ευθεία της $A\Delta$ ως προς την A διχοτόμο τέμνει την BC στο M' . Νδο το M' είναι μέσο της BC .
5. 3 και νόμος ημιτόνων.
6. Ακόμα κιαλλος νόμος ημιτόνων προσπαθώντας να φτάσουμε στο 3.

Προβλήματα

1. Συμπλήρωσε το διάγραμμα. Η κατασκευή (4) θα φανεί χρήσιμη. Ίσως να χρειαστεί να προεκτείνεις τες εφαπτομένες.
2. Άσκηση 3 και θεώρημα διχοτόμων
3. Άσκηση 4,5 και λήμματα του Σεβά.
4. Άσκηση 6
5. Δες τον κύκλο (ABP)